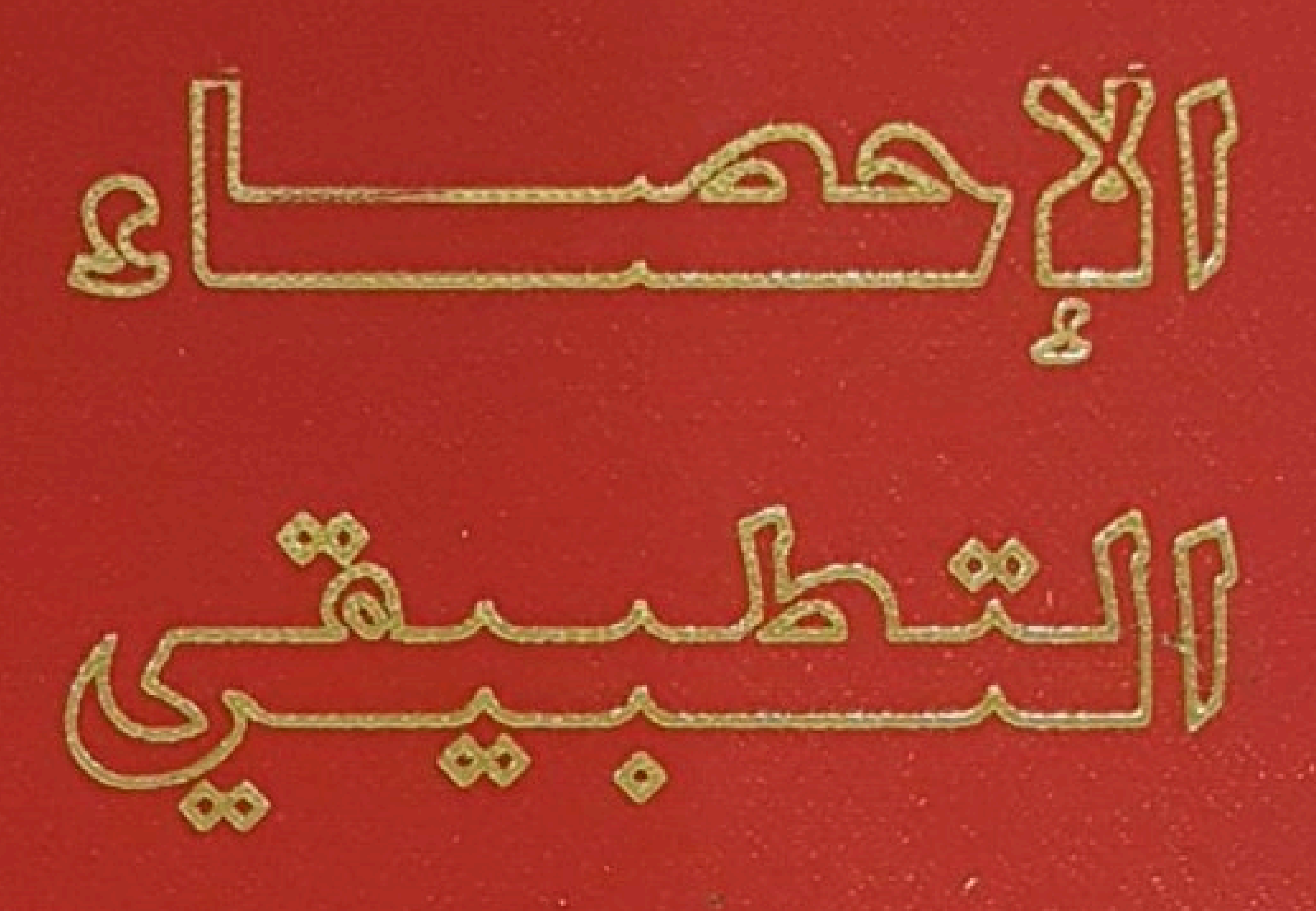


الإحصاء التطبيقي

الدكتور عبدالرحمن بن محمد سليمان أبو عمه

الدكتور أنور أحمد محمد عبدالله

الدكتور محمود محمد ابراهيم هندي





الإحصاء التطبيقي

تأليف

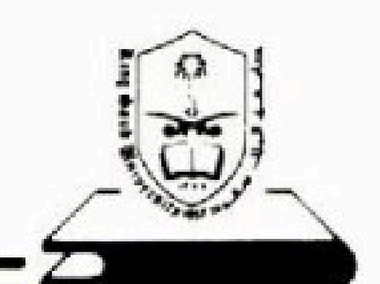
الدكتور عبدالرحمن بن محمد سليمان أبو عمه

أستاذ مشارك

الدكتور أنور أحمد محمد عبدالله — الدكتور محمود محمد ابراهيم هندي

أستاذ مساعد — أستاذ مساعد

قسم الإحصاء ـ كلية العلوم ـ جامعة الملك سعود

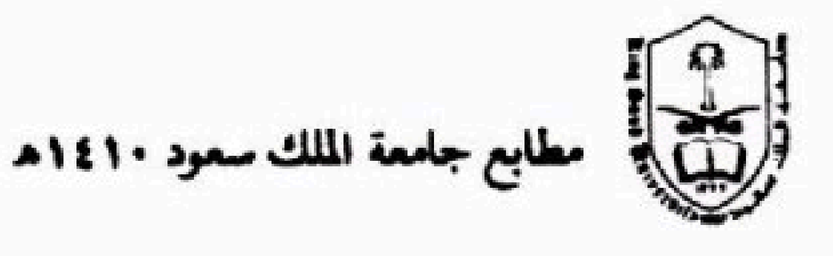


جامعة الملك سعود

عمادة شؤون المكتبات

الطبعة الأولى ١٤١٠هـ (١٩٩٠م).

٣١١
ع ع أ أبو عمه، عبدالرحمن بن محمد سليمان
الإحصاء التطبيقي/ تأليف عبدالرحمن بن محمد سليمان أبو عمه، أنور أحمد محمد عبدالله، محمود محمد ابراهيم هندي.
١. الإحصاء أ. عبدالله، أنور أحمد محمد ب. هندي، محمود محمد ابراهيم جـ. العنوان


مطابع جامعة الملك سعود ١٤١٠هـ

تقديـــم

إذا كانت بعض الدول العربية أو معظمها قد أعدت برامج فعالة في محو الأمية، واستطاعت أن تنفذ تلك البرامج بنجاح، فإن واضعي خطط التنمية في الدول المتقدمة أزاحوا الستار عن نوع آخر من الأمية، ألا وهو ما يسمى بأمية الإحصاء، وأمية الحاسب الآلي، فالكثير من الناس لا يحسون بأهمية الأرقام كما ينبغي، وكذلك لا يستطيعون استيعاب الأهداف وراء جمع البيانات المختلفة وتخزينها، ولذلك لا يتجاوبون مع الباحثين في هذا الميدان، مما يؤدي إلى إرباكٍ أو تقريب كبير في إعداد الخطط والبرامج، وتقدير احتياجات البلدان المختلفة وقدراتها. لذا كان لزاما على إدارات التطوير التربوي بالدول العربية العناية بهذا الجانب، وتزويد الطالب بجرعات متوازية من المفاهيم الإحصائية في مختلف مراحل دراسته حتى مرحلة التخصص في التعليم الجامعي.

وقد حاولنا في هذا الكتاب تقديم جهد متواضع للدارسين في العلوم الإنسانية، والعلوم النظرية والأساسية يمكّنهم بعون الله من استخدام الإحصاء بصورة جيدة وصحيحة، وربما أثرت ثقافتهم في هذا الجانب العلمي المهم، وقد أقدمنا على تعريب العديد من المفاهيم، ومحاولة تبسيطها، وكذلك التعبير عنها بمعادلات ورموز عربية.

كما حاولنا قدر الإمكان إظهار الأفكار الإحصائية الأساسية دون الخوض في ذكر البراهين الرياضية المعقدة، وذلك مراعاة للتباين في مستوى الدارسين غير المتخصصين في علم الإحصاء أو علوم الرياضيات الأخرى.

ثم أوردنا كذلك كثيرا من المفاهيم الإحصائية والعمليات اللازمة لإجرائها على شكل خطوات بغرض تبسيطها، وسهولة فهمها ومتابعتها.

ولقـد سانـدنـا في محاولتنـا هذه العـديد من المراجع والكتب باللغتين العربية والإنجليزية التي أوردنـاهـا في نهاية الكتـاب. كما استعنا ببعض الدراسات البحثية السابقة في تعليم الإحصاء، وكذلك خبرتنا المتواضعة في تدريس هذه المادة لكليات الآداب والزراعة والتربية بجامعة الملك سعود.

وفي الختام نشكر الزملاء بقسم الإحصاء الذين قدموا ملاحظاتهم واقتراحاتهم العلمية القيمـة ومسـاعـدتهم، ونخص بالـذكر السيد/ جمال رشيد الكحلوت على مراجعته لبعض مسودات الكتاب، كما نشكر الأستاذ محمد محمود عبيد على مراجعته لصحـة اللغـة وسلامتها، ولكثير من العبارات، وعلى ما بذله من جهد لمتابعة ذلك والسيد/ إبراهيم حسني الصلحات لحسن متابعته طباعة النسخ الأولي من الكتاب.

ونحن إذ نضع أمام طلاب العلم هذا الجهد المتواضع الذي لا نريد من ورائه إلا زيادة الثـروة العلمية الإحصائية لدى الطلاب والقرّاء، ومع ذلك فنحن نرحب بالتقويم راجين المولى عز وجل أن ينفع به. . والله من وراء القصد.

المؤلفــون

المحتويـات

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الفصل الأول

مقدمة

(١ - ١) نبذة عن علم الإحصاء

لقد ورد في كتب التاريخ الإسلامي ذكر الأعداد الخاصة بجيوش المسلمين، والأعداد الخاصة بجيوش الأعداء. وذلك في معظم الغزوات والمعارك التي خاضها المسلمون منذ قيام الدولة الإسلامية بهجرة الرسول ﷺ إلى المدينة المنورة، وعصر الخلافة الراشدة، وكذلك في عصر الدولتين الأموية والعباسية.

ومع أن كلمة إحصاء المشتقة من الفعل «يحصي» وماضيها «أحصى» قد وردت مشتقاتها في عدة مواضع من القرآن الكريم إلا أنها كما يبدو والله أعلم لم ترد بمعنى الإحصاء المستخدم حاليًا. فقد وردت كلمات الإحصاء لتدل على الحصر والعد الدقيق الذي ينفرد به الله سبحانه وتعالى ولا يستطيع الإنسان بمحدودية علمه إجراء مثل هذا الحصر مثل قوله تعالى «وإن تعدوا نعمة الله لا تحصوها» آية ٣٤ سورة إبراهيم... وقوله تعالى «أحصاه الله ونسوه» آية ٦ سورة المجادلة... وقوله تعالى «وأحاط بما لديهم وأحصى كل شيء عددا» آية ٢٨ سورة الجن... وقوله تعالى «وكل شيء أحصيناه في إمام مبين» آية ١٢ سورة يس... أنظر: جوهرة فهد محمد بن عبدالرحمن (١٤٠٠هـ - ١٩٨٠م) التي توضح فيها هذه النقطة بالتفصيل، ولقد اهتمت كثير من الدول في العصور الماضية بحصر أعداد السكان المنتمين لها. وذلك بهدف بناء الجيوش للدفاع عن حدود تلك الدول أو التوسع (إن أمكنهم ذلك) بغزو الدول المجاورة. ثم اتجه الاهتمام بعد ذلك إلى مراقبة النمو السكاني، وذلك عن طريق حصر المواليد والوفيات

لمعرفة الزيادة، أو النقص في عدد السكان في دولة ما، أو في مناطق محددة، أو مدن معينة فيها. كما عمدت الدول الحديثة وبعض الدول في العصور الماضية إلى حصر ثروات السكان حتى يمكن جمع الضرائب التي تدعم أرصدة الدول للصرف على شئونها الإدارية، أو صرف إعانات للعجزة والمسنين، وبناء الصناعات البسيطة، أو التوسع في مشروعاتها التنموية، أو تقديم الخدمات الضرورية كالتعليم والصحة. . . إلخ. وكان يعرف الإحصاء بعلم الدولة. ولفظ الإنجليزية للإحصاء «statistics» مشتقة من الكلمة اللاتينية «status» التي تعني الدولة، وذلك لأن الإحصاء عبارة عن جمع البيانات الخاصة بالدولة، ونشاطاتها ثم تلخيصها ووضعها في جداول أو رسوم بيانية. وبعد تطور الحياة الإنسانية، وحاجة الأمم إلى التخطيط والدراسة، وإتخاذ القرار العلمي نشأت الحاجة إلى تلخيص هذه البيانات بمقاييس علمية محددة، أو عرضها وكذلك تحليلها بهدف الوصول إلى نتائج يترتب عليها اتخاذ القرار السليم. ولقد ساعد على ذلك ظهور علم الاحتمالات الذي أخذ يتطور بصورة منتظمة، يعتمد على مسلمات تبنى عليها كل نظريات النموذج الاحتمالي.

وعلم الاحتمالات يعود إلى القرن السابع الميلادي، ويعتمد علم الاحتمالات الحديث على إسهام كثير من العلماء في ذلك القرن مثل باسكال (Pascal) وبرنولي (Bernoulli) وديموافر (DeMoivre) ولابلاس (Laplace) وجاوس (Gauss). وقد ساعد علم الاحتمالات على تطور عدد من المفاهيم الرياضية في علم الإحصاء مما جعل الإحصاء يمتد ليشتمل على تطبيقات متعددة في العلوم الأساسية والتطبيقية كالطب والهندسة والزراعة والاجتماع وعلم النفس والتعليم والاقتصاد والإدارة والصناعة وغيرها من العلوم الحيوية والتطبيقية الأخرى.

وقد يتصور بعض الأشخاص الذين لا يلمون بالإحصاء في وقتنا الحاضر أن علم الإحصاء ما هو إلا جمع بيانات وتلخيصها في جداول إحصائية ورسوم بيانية، أو تعداد سكاني فقط. ولذلك نود الإشارة إلى أن مثل هذه العمليات ليست إلا مقدمة لإجراء التحليل الإحصائي للوصول إلى نتائج محددة تساعد على اتخاذ قرارات علمية محددة تعتمد أساسا على هذه البيانات.

وسنحاول في هذا الكتاب بالشرح والتفصيل والأمثلة لطرق عرض البيانات الإحصائية وتلخيصها وتحليلها كل واحدة على حدة.

(١ - ١ - ١) تعريف علم الإحصاء

هو العلم الذي يختص بالطرق العلمية لجمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها، وذلك عن طريق التعبير عنها أو عرضها بصورة علمية وتحليلها بغرض الوصول إلى استنتاج النتائج والقوانين التي تحكمها، واتخاذ القرارات الملائمة لذلك. وينبغي الإشارة إلى وجود قسمين رئيسين للإحصاء

القسم الأول: الإحصاء الوصفي

ويشمل الطرق الخاصة بتنظيم البيانات وتلخيصها وعرضها في صورة جداول إحصائية أو رسوم بيانية، أو أشكال هندسية، أو تلخيصها، أو حساب مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت وغيرها من المقاييس الأخرى.

القسم الثاني: الإحصاء الاستدلالي أو الاستنتاجي

وهو عبارة عن مجموعة الطرق العلمية التي تُعْمَل للاستدلال على المجتمع بناءً على البيانات الإحصائية التي جمعت من عينة من هذا المجتمع وفق طرق إحصائية محددة. وتشتمل على عدد من المفاهيم والنظريات، مثل نظرية التقدير، واختبار الفرضيات، وفحوص جودة الإنتاج.

(١ - ٢) المجتمع الإحصائي والعينة الإحصائية

عند دراسة ظاهرة من الظواهر - ولتكن ظاهرة الطلاق مثلا في المجتمع السعودي - فإن جميع الأفراد المتزوجين يكوّنون ما يسمى بالمجتمع الإحصائي (population) وإذا أخذنا جزءا من هؤلاء المتزوجين فإن هذا الجزء يسمى بالعينة الإحصائية (sample). وقد يكون المجتمع الإحصائي محدودا مثل عدد طلاب جامعة الملك سعود في عام

معين. وقد يكون المجتمع غير محدود مثل عدد الأسماك في الخليج العربي في يوم ما.
ويصعب غالبا دراسة المجتمع الإحصائي كله لأسباب كثيرة نذكر منها:

١ - كثرة التكاليف، وطول الوقت اللازم لأخذ البيانات من جميع أفراد المجتمع.
٢ - ربما تُؤدي دراسة المجتمع كله إلى فقدان المجتمع فمثلا لمعرفة ما إذا كان عدد أعـواد الثقـاب في علبـة ما سليمة أو لا فإنه يتطلب استعمالها جميعا وهذا يعني استخدام كل أعواد الثقاب حتى نقول إنها سليمة أم لا. لذا لا بد من اللجوء إلى أخذ عينة للحكم من خلالها على المجتمع المأخوذة منه العينة. وكذلك عند الفحص لدم إنسان لو أننا أخذنا الدم كله لمات ذلك الإنسان، وإنما نأخذ عينة من الدم لفحصها فقط.
٣ - قد تستحيل دراسة المجتمع كله فمثلا إذا أردنا تقدير مخزون البترول في المملكة العربية السعودية فإنه يتطلب تنقيب جميع الأراضي بالمملكة وهذا أمر غير ممكن عمليا.

لذا يستخدم الإحصائيون أسلوب أخذ العينات للتمثيل عن مجتمعاتها الكلية وذلك لدراسة أي مجتمع إحصائي.

وهناك طرق كثيرة لتحديد كيفية أخذ العينة الممثلة لأي مجتمع نذكر منها ما يلي:

(١ - ٢ - ١) العينة العشوائية البسيطة

يتم اختيار هذه العينة على النحو التالي:
يعطى لكل عنصر من عناصر المجتمع رقما مسلسلا، يكون عدد خاناته مساويا لعدد خانـات المجتمع كله مبتدئا بأصفار من جهة اليسار، ومن جهة اليمين بالأرقام ١، ٢ . . . فمثـلا إذا كان عدد طلاب قسم الاجتماع ٢٠٠ طالب، وأردنا اختيار عينة عشوائية بسيطة لإجراء دراسة معينة عليها فإننا نرقم أفرادها بالأرقام . . . .، ١ . . .، ٢ . . .، . . . .، ١٩٩ ثم نستعمل جدول الأرقام العشوائية رقم (١) الملحق بنهاية هذا

الكتـاب ونقـوم بقـراءة هذا الجـدول عموديا (رأسيا) بحيث يكون عدد الخانات أو الأعمدة مساوية لعدد خانات الرقم الذي يمثل مجموع المجتمع محل الدراسة، ونقوم بقراءة هذا رأسيا (عموديا) والعدد الذي يكون أكبر من عدد المجتمع نتركه، والعدد الـذي يكـون أصغر من عدد المجتمع نأخذه، حتى نستخرج من الجداول أرقامًا، عددها يكون مساويا لعدد مفردات العينة، أو حجم العينة المطلوب دراستها من المجتمع.

وكمثـال على ذلك إذا أخذنا عينة مكونة من ١٠ طلاب يتضح من الجداول العشوائية بأن أرقام الطلاب المكونة للعينة العشوائية البسيطة هي ١٨٧، ١٤٦، ٦٢، ٠٠٠، ٥٢، ٨٢، ٣٦، ١٩٩، ١٨٩، ١١٥ وهذه الأرقام مأخوذة من الأعمدة الثلاثة الأولى من الجدول رقم (١).

(١ ـ ٢ ـ ٢) العينة العشوائية الطبقية

تعتمد أحيانا النتيجة الإحصائية على بعض الصفات كالعمر والجنس والسكن. ففي هذه الحالة يقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات تبعا للصفات التي يتكون منها المجتمع وتسمى كل مجموعة طبقة. يقوم الباحث باختيار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة، وهذه العينات يكون مجموعها عينة واحدة تسمى بالعينة الطبقية، ويعتمد أحيانا حجم كل عينة على نسبة وجودها في المجتمع.

وعلى سبيل المثال إذا أردنا اختيار عينة حجمها ٥٠٠ فردٍ من مجتمع ما. وكانت نسبة الذكور إلى الإناث في هذا المجتمع ٢ : ٣ فإننا نختار ٢٠٠ فردٍ من الذكور، ٣٠٠ فردٍ من الإنـاث، ثم نكـون من هاتين العينتين العشوائيتين البسيطتين عينة واحدة تشتمل على ٥٠٠ فردٍ من الذكور والإناث تسمى العينة الطبقية.

ونكتفي بالطريقتين السابقتين لاختيار العينات مع العلم بأن هناك عددا من طرق أخذ العينات الأخرى التي يستخدمها الإحصائيون، نذكر منها العينة العنقودية،

والعينـة المنتـظمـة، والعينة المعيارية، وغيرها. وعلى سبيل المثال يوجد نوع آخر من العينات لا يعتمد على العشوائية، وهي ما يسمى العينة العمدية، وهي تعتمد أساسا على خبرة الباحث ومعرفته الجيدة بمفردات المجتمع محل الدراسة، وتستخدم مثل هذه العينات في استطلاع الرأي العام لبعض المشكلات التي تهمه، وذلك بدلا من العينة العشوائية العالية التكاليف.

(١ ـ ٣) مصادر جمع البيانات الإحصائية

سوف نتعرض لذكر مصدرين مهمين لجمع البيانات الإحصائية، وهما:

(١ ـ ٣ ـ ١) المصدر التاريخي

وهـو أن نأخـذ البيانـات الإحصـائية من السجـلات المحفـوظـة في الهيئات والمؤسسات والوزارات المختلفة. فمثلا إذا أريد دراسة عدد الطلاب الذين التحقوا بجامعة الملك سعود خلال الفترة الزمنية (١٣٩٥ ـ ١٤٠٠هـ) فإنه يمكن أخذ هذه البيانـات من عمادة القبول والتسجيل بالجامعة وكذلك إذا أردنا معرفة عدد السكان بالمملكة العربية السعودية حسب الجنس في الفترة الزمنية (١٣٩٠ ـ ١٤٠٠هـ) فإنه يمكن معرفة ذلك من مصلحة الإحصاءات العامة، أو وكالة الأحوال المدنية بوزارة الـداخلية بالمملكـة. ويمكن معرفة البيانات الإحصائية المختلفة للدول المختلفة في مجالات الصحة والتعليم والاقتصاد والنشاطات الأخرى من سجلات هيئة الأمم، أو المؤسسات المحلية، أو الدولية الأخرى.

(١ ـ ٣ ـ ٢) المصدر الميداني

يتم جمع البيانات عن طريق المصدر الميداني بطريقة أو أكثر من الطرق التالية: المقابلة الشخصية، أو البريد، أو الهاتف. وسوف نتناول كل طريقة بالشرح كما يلي.

أ ـ المقابلة الشخصية

تقوم الجهة القائمة بجمع البيانات بتدريب عدد من الأشخاص على كيفية إجراء المقـابـلات الشخصية بغرض جمع البيانات وتدوينها. ويقوم هؤلاء الأشخاص عادة

بالانتقال إلى أفراد المجتمع المراد جمع البيانات منه وسؤال أفراد العينة المطلوب دراستها. وتسجيل الإجابة في المكان المخصص لها في الاستبانة أو الاستفسارات المطلوب الإجابة عنها، ويجب على الأشخاص المكلفين بجمع البيانات التحلي بحسن المقابلة، وتفادي الإحراج، والتأكيد على محافظتهم على سرية البيانات، وأنها لن تستخدم إلا لغرض الدراسة المشار إليها، وعدم الإيحاء للأفراد المدروسين بإجابات معينة.

ب ـ طريقة البريد

وهي عادة تستخدم في جمع البيانات من المصالح الحكومية، والهيئات والمؤسسات العامة، وذلك بأن تقوم الجهة التي تريد جمع البيانات بإرسال الاستبانات المطلوب تعبئتها إلى المصالح الحكومية، أو الأهلية الأخرى، ثم استلام الردود بالبريد. وأهم مميزات هذه الطريقة هو أنها قليلة التكاليف. أما عيوبها فضياع الخطابات، أو عدم وجود الموظف المختص للرد على مثل هذه الطلبات، أو عدم اهتمام الموظف بأهمية الموضوع للرد عليه.

جـ ـ طريقة الهاتف

وهي طريقة سريعة لجمع البيانات فمثلا إذ أرادت وزارة التعليم العالي معرفة عدد الطلاب المتوقع تخرجهم من جامعة الملك سعود للعام الدراسي الحالي فإنها تقوم بالاتصال هاتفيا بعمادة القبول والتسجيل أو إدارة الجامعة لمعرفة ذلك العدد.

قد تكون هذه الطريقة غير ممكنة لو أردنا دراسة حالة السكن، أو مدى ملاءمة العمل للتخصص لخريجي جامعة الملك سعود مثلا في سنة ما، أو في عدد معين من السنوات، وذلك ربما لعدم وجود هواتف عند جميع الأشخاص الذين هم محل الدراسة، أو بتعطُّل هذه الهواتف، أو تغيُّر الأرقام.

د ـ الاستمارة الإحصائية

هي عبارة عن ورقة أو أكثر تحتوي على الأسئلة المراد الإجابة عنها وكل سؤال يترك له مكان للإجابة عنه، ثم توزع هذه الاستمارات على أفراد العينة من المجتمع محل

الدراسة. ويتم جمعها بعد وقت كافٍ للإجابة عنها، كما يحدث في جامعة الملك سعود عند إجراء استبانة عن تقويم التدريس للمواد المختلفة في نهاية كل فصل دراسي. ويجب أن تكون الأسئلة في الاستمارة واضحة ودقيقية، وغير مملة، أو محرجة وقد تحتوي على سؤال أو أكثر، للتأكد من دقة الإجابات المعطاة. فمثلا سؤال عن الراتب، وفي نهاية الاستمارة سؤال عن المرتبة، أو المستوى، وكذلك الدرجة التي يشغلها الموظف عند تعبئة الاستمارة.

المملكة العربية السعودية
جامعة الملك سعود

فرع ....
كلية ....
قسم ....

نمــوذج (أ)
نمــوذج تقويــم الطلبة لمقــر ر دراسي

١ ـ رقم ورمز المقرر (الرمــز الرقــم) الشعبة: ....

٢ ـ المعدل التراكمي للطالب: ٤ ـ ٥ ، ٣ ـ ٤ ، ٢ ـ ٣ ، اقل من ٢

ضع اشارة (✓) تحت أحد الأرقام من ١ إلى ٥ أمام كل العبارات التالية علما بأن ١ تعني ضعيف جداً، ٥ تعني ممتاز:

أولا: استعداد استاذ المادة للتدريس:

	١	٢	٣	٤	٥
١ ـ المامه بالمادة	□	□	□	□	□
٢ ـ مدى حماسه لتدريس المادة	□	□	□	□	□
٣ ـ وضوحه في ايصال المعلومات	□	□	□	□	□
٤ ـ اعداده للمحاضرات قبل وقتها	□	□	□	□	□
٥ ـ تشجيعه للعمل الممتاز من جانب الطالب	□	□	□	□	□
٦ ـ تنميته لروح التفكير والابتكار والمناقشة	□	□	□	□	□
٧ ـ نجاحه في حسن الاستعانة بالمعيدين (ان وجدوا)	□	□	□	□	□
٨ ـ مدى استعداده للاجابة على أسئلة الطلبة	□	□	□	□	□
٩ ـ مدى التزامه بمواعيد المحاضرات	□	□	□	□	□
١٠ ـ مدى رغبتك في أن تدرس مقررا آخر مع هذا الأستاذ	□	□	□	□	□
١١ ـ تقويمك لأداء استاذ هذه المادة مقارنا ببقية أساتذة القسم الذين درست معهم	□	□	□	□	□
١٢ ـ استخدام وسائل الايضاح المعينة	□	□	□	□	□

ثانيـا : علاقة الأستاذ بالطلبـة :

	١	٢	٣	٤	٥
١ ـ احترامه لآرائهم وتجاوبه مع أسئلتهم	☐	☐	☐	☐	☐
٢ ـ ترحيبه بالنقد الهادف	☐	☐	☐	☐	☐
٣ ـ وجوده أثناء الساعات المكتبية	☐	☐	☐	☐	☐
٤ ـ التقويم العام لعلاقة الأستاذ بالطلبة	☐	☐	☐	☐	☐

ثالثـا : مساهمة هذا المقرر في تجربتك التعليمية :

	١	٢	٣	٤	٥
١ ـ معرفتك بموضوع المقرر بصورة عامة	☐	☐	☐	☐	☐
٢ ـ حبك للمادة العلمية ورغبتك في تعلمها	☐	☐	☐	☐	☐
٣ ـ زيادة رغبتك في توسيع معلوماتك وادراكك حول الموضوع في المستقبل	☐	☐	☐	☐	☐
٤ ـ قدرتك على مناقشة الموضوع بصورة أكثر حساسية ومعرفة	☐	☐	☐	☐	☐
٥ ـ التقويم العام لمساهمة هذا المقرر في رفع مستوى معلوماتك	☐	☐	☐	☐	☐

رابعـا : تقويم التخطيط لمنهج المقرر :

	١	٢	٣	٤	٥
١ ـ المنهج من حيث الكيف	☐	☐	☐	☐	☐
٢ ـ وضوح وتتابع المواضيع وفروع المواضيع	☐	☐	☐	☐	☐
٣ ـ ترابط أجزاء المادة	☐	☐	☐	☐	☐
٤ ـ التذكير على المواضيع الرئيسية والاستنتاجات	☐	☐	☐	☐	☐
٥ ـ ملاءمة الكتاب المقرر والقراءات المختارة	☐	☐	☐	☐	☐
٦ ـ فائدة الواجبات الأخرى	☐	☐	☐	☐	☐
٧ ـ مستوى وطريقة الامتحانات	☐	☐	☐	☐	☐
٨ ـ عدالة وموضوعية تصحيح الامتحانات	☐	☐	☐	☐	☐
٩ ـ اذا قارنت هذه المادة بالمواد الأخرى التي درستها في الجامعة، كم من الوقت بذلته في الدراسة والاعداد لهذه المادة عن كل ساعة معتمدة (٥ تعني وقتا كثيرا جداً، ١ تعني قليلا جداً) ..	☐	☐	☐	☐	☐

١٠ ـ يستعمل معظم وقت المحاضرة في :

الإمـلاء ☐ الشـرح ☐ المناقشـة ☐

١١ ـ في دراستي لهذه المادة اعتمدت في الغالب على :

الكتاب المقرر ☐ المذكرات ☐ إملاء الأستاذ ☐ مراجع مختلفة ☐

مطابع جامعة الملك سعود

المملكة العربية السعودية
جامعة الملك سعود
فرع ....
كلية ....
قسم ....

نمـــوذج (ب)
تقـويـــم الدروس المعملـيـة

١ ـ رقم ورمز المقرر (الرمـــز الرقـــم) الشعبة : ....

٢ ـ المعدل التراكمي للطالب : ٤ ـ ٥ ، ٣ ـ ٤ ، ٢ ـ ٣ ، اقل من ٢

ضع اشارة (✓) تحت أحد الأرقام من ١ إلى ٥ أمام كل العبارات التالية
علما بأن ١ تعني ضعيف جدا، ٥ تعني ممتاز :

	١	٢	٣	٤	٥
١ ـ مدى ارتباط التجارب العلمية بمواضيع المحاضرات	☐	☐	☐	☐	☐
٢ ـ مدى كفاية المكان والأجهزة والمواد في المختبر	☐	☐	☐	☐	☐
٣ ـ الوقت الذي تصرفه على إجراء التجارب وكتابة التقرير (٥ تعني وقتا طويلا)	☐	☐	☐	☐	☐
٤ ـ وجود المعيد ومحضر المختبر أثناء التدريب المعملي	☐	☐	☐	☐	☐
٥ ـ وجود الأستاذ أثناء ساعات المختبر	☐	☐	☐	☐	☐
٦ ـ مدى الاعداد للتجارب المعملية قبل وقتها	☐	☐	☐	☐	☐
٧ ـ نسبة التجارب التي يجريها الطالب بنفسه لإجمالي التجارب (٥ تعني نسبة عالية)	☐	☐	☐	☐	☐
٨ ـ مدى تعاون الأستاذ مع الطالب أثناء التدريب	☐	☐	☐	☐	☐
٩ ـ مدى تعاون المعيدين والمحضرين مع الطالب أثناء التدريب المعملي	☐	☐	☐	☐	☐

١٠ ـ هل تعتمد في اجراء التجارب المعملية على :
الكتاب المقرر ☐ كتاب عملي ☐ مذكرات مطبوعة ☐ شرح الأستاذ ☐

	١	٢	٣	٤	٥
١١ ـ مدى استفادتك من التدريب المعملي	☐	☐	☐	☐	☐

مطابع جامعة الملك سعود

(١ ـ ٤) تمارين

١ ـ اذكر نبذة مختصرة عن تطور علم الإحصاء واستخداماته في الحياة العملية.

٢ ـ ا) ما المقصود بالمجتمع الإحصائي، والعينة الإحصائية ممثلاً لكل منهما؟

ب) لماذا نلجأ إلى استخدام أسلوب أخذ العينات الإحصائية في بعض الدراسات؟

جـ) اذكر بعض أنواع العينات الإحصائية وكيفية الحصول عليها؟

٣ ـ اذكر أهم طرق جمع البيانات الإحصائية مع التعرض لأهم مميزات كل طريقة وعيوبها؟

٤ ـ ما هي أهم شروط صحة الاستمارة الإحصائية؟

٥ ـ حدد الطرق الإحصائية المناسبة لدراسة الظواهر التالية:

ا) الحالة الاجتماعية لطلاب جامعة الملك سعود.

ب) مدى تفشي ظاهرة التدخين في سكان أحد أحياء الرياض.

جـ) مستوى استيعاب الطلاب لمقرر الإحصاء التطبيقي في الفصل الماضي.

وذلك بتحديد طريقة أخذ العينة وتصميم الاستمارة في كل حالة.

٦ ـ اذكر ثلاثا من طرق جمع البيانات من الميدان وبين مزايا وعيوب كل منها بالتفصيل.

الفصل الثاني

تنظيم البيانات وعرضها

(٢ - ١) تنظيم البيانات وتلخيصها

بعد الانتهاء من جمع البيانات بطريقة أو أكثر من الطرق السابقة فإنها تكون في صورة غير معبرة، وقد يصعب استنتاج أي معلومات مفيدة منها. وقد تكون عبارة عن مجموعة أرقام غير مرتبة، أو مجموعة أوصاف لبعض الخصائص حسب ورودها في الاستبانات. ولتوضيح ذلك نعرض المثالين التاليين:

مثال (١)

عند دراسة الحالة الزواجية لعمال أحد المصانع أخذت عينة مكونة من ٤٠ عاملا، وكانت النتائج كما يلي:

أعزب	متزوج	أعزب	أرمل	متزوج	أعزب	متزوج	مطلق
متزوج	أعزب	أرمل	متزوج	أعزب	متزوج	أعزب	متزوج
متزوج	أرمل	متزوج	متزوج	متزوج	أرمل	متزوج	مطلق
مطلق	متزوج	أرمل	متزوج	أعزب	مطلق	أرمل	متزوج
أرمل	متزوج	متزوج	أعزب	متزوج	متزوج	أعزب	متزوج

مثال (٢)

البيانات التالية تمثل الأجر اليومي بالريال السعودي لعينة تتكون من خمسين عاملا من غير المؤهلين في إحدى المؤسسات الخاصة:

٢٥	٣٠	٣٨	٤٢	٥١	٣٤	٤٢	٥٤	٣٤	٤٢
٣٩	٤٠	٥٠	٢٦	٥٢	٣٨	٤٧	٣٥	٥٣	٢٨
٣٤	٤١	٣٥	٣١	٤١	٣٦	٥٣	٤١	٣٦	٣٢
٣٧	٤٤	٤٥	٣٧	٤٥	٤٦	٢٩	٤٦	٣٨	٤٨
٤٠	٣٣	٤٤	٤٥	٤٤	٤٠	٣١	٤٧	٤٣	٢٧

البيانات الواردة في المثالين (١)، (٢) السابقين لا يمكن الاستفادة منها . . . في أية دراسة، وذلك لعدم وضوحها، وصعوبة استنتاج أي معالم من الحالة الزواجية في مثال (١)، والأجر اليومي في مثال (٢)، فمثلا لا يمكننا معرفة عدد المتزوجين بسهولة من بيانات مثال (١) بوضعها الحالي، وخاصة إذا كان العدد كبيرا. وكذلك الحال في بيانات مثال (٢)، إذ لا نستطيع معرفة عدد العمال الذين يتقاضون أجرا أقل من **٣٥** ريالا، أو أكثر من **٤٠** ريالا بمجرد الرجوع إلى البيانات في وضعها الحالي.

لذلك أصبحت الحاجة إلى استحداث طريقة لتنظيم وتلخيص مثل هذه البيانات في صورة سهلة ضرورية جدا، حتى يمكن دراستها، واستنتاج ما نريده منها بسهولة ويسر. ومن الطرق المستخدمة لتلخيص البيانات ما يسمى التوزيعات التكرارية. يتبقى علينا التمييز بين نوعين من البيانات الإحصائية حسب طبيعتها، حيث إن البيانات تنقسم عادة إلى نوعين أساسيين نعتمد عليهما في عملية التنظيم والتلخيص، وهما:

١ ـ البيانات الوصفية (الكيفية).
٢ ـ البيانات الكمية (الرقمية).

وفيما يلي سنقوم بتعريف وشرح طريقة عمل جداول التوزيعات التكرارية لكل منهما.

(٢ ـ ١ ـ ١) البيانات الوصفية (الكيفية)

يشار للبيانات الإحصائية بأنها وصفية إذا كانت تصف عناصر الظاهرة محل الدراسة في صورة غير رقمية، مثل لون الشعر، أو لون البشرة، أو تقديرات النجاح

للطلاب، أو الحالة الاجتماعية لمجموعة من العمال في أحد المصانع مثل ما ورد في مثال (١) أو غيرها من الظواهر الأخرى. ولتلخيص وتنظيم هذا النوع من البيانات نعمل على تكوين جدول مناسب يسمى جدول تفريغ البيانات ومنه نستنتج جدولا آخر يسمى جدول التوزيع التكراري. ويتكون جدول تفريغ البيانات عادة من ثلاثة أعمدة رأسية يكتب في بداية كل عمود عنوانه المناسب، فمثلا إذا كانت الدراسة هي تقديرات الطلاب فإننا يمكن أن نكتب كلمة (الصفة) أو نكتب تقديرات الطلاب وهكذا. . .
ثم يكتب تحت العنوان في العمود الأول كل الصفات، ففي مثال (١) تكون الصفات هي: أعزب ـ متزوج ـ أرمل ـ مطلق. ويكون عنوانها «**الحالة الاجتماعية**» للعمال أما في العمود الثاني فيكون العنوان «**علامات**» وفيه تسجل القراءات على شكل علامات، ونضع لكل قراءة علامة أمام كل صفة من الصفات الموجودة في العمود الأول. والعلامة عبارة عن خط رأسي مثل «ا» فإذا ما وصل عدد العلامات إلى أربع مثل «اااا» فإن الخط الخامس يكتب مائل ليكوّن ما يسمى الحزمة على الصورة «𝍸» ويكون عددها خمسا.
بعد تفريغ كل البيانات تعد الحزم أمام كل صفة، ويكتب العدد في العمود الثالث الذي يسمى عمود التكرارات، ويقصد بالتكرار عدد عناصر الظاهرة أمام كل صفة من الصفات الموجودة في العمود الأول. ومن هذا الجدول يصاغ جدول التوزيع التكراري المكون من عمودين الأول يشتمل على أسماء الصفات، والثاني التكرارات.
ففي مثال (١) يكون جدول تفريغ البيانات كالتالي:

جدول (٢ ـ ١): تفريغ البيانات للحالة الزواجية للعمال في مثال (١)

الصفة	العلامات	التكرار (عدد العمال)
أعزب	𝍸 IIII	٩
متزوج	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	٢٠
أرمل	𝍸 II	٧
مطلق	IIII	٤
المجموع		٤٠

إذا حذفنا العمود الثاني من الجدول (١) السابق لتفريغ البيانات فإننا نحصل على جدول مكون من عمودين يسمى جدول التوزيع التكراري كما هو موضح بجدول (٢ ـ ٢) التالي:

جدول (٢ ـ ٢): التوزيع التكراري للحالة الزواجية للعمال في مثال (٢)

الصفة (الحالة الزواجية)	التكرار (عدد العمال)
أعزب	٩
متزوج	٢٠
أرمل	٧
مطلق	٤
المجموع	٤٠

يلاحظ كذلك أن يحتوي أي جدول إحصائي على عنوان يوضح نوعية الجدول، وطبيعة البيانات المعروضة فيه، كما هو موضح في الجدولين السابقين.

(٢ ـ ١ ـ ٢) البيانات الكمية (الرقمية)

وهي البيانات الإحصائية التي تقاس فيها عناصر الظاهرة بمقياس كمي (رقمي) مثل أطوال مجموعة من الطلاب تقاس بالسم، أو أوزان مجموعة من الطلاب تقاس بالكجم، أو الأجور اليومية لمجموعة من العمال تقاس بالريال، ودرجات مجموعة من الطلاب تقاس بالدرجة وغيرها...، ولتنظيم هذه البيانات وتلخيصها لوضعها في جدول تكراري نكوّن أولا جدولا للتفريغ (مثل ما سبق في حالة البيانات الوصفية) مع استبدال الصفة في العمود الأول بما يسمى الفئات، وقبل كتابة جدول التفريغ نلخص طريقة تكوين الفئات في الخطوات التالية:

(أ) نحدد مدى البيانات، وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة للبيانات ومن مثال (٢) يكون المدى كالتالي:

المدى = أكبر قراءة - أصغر قراءة

= ٥٤ - ٢٥

= ٢٩ ريالا

(ب) يقسم المدى إلى عدد مناسب من الفئات، وعادة يتراوح عدد الفئات من ٥ إلى ١٥ فئة تقريبا. وفي مثال (٢) نختار عدد الفئات، يساوي ٦ فئات على سبيل المثال.

(جـ) نحسب طول الفئة، وهو يساوي المدى مقسوما على عدد الفئات المختار، ويقرب الكسر الناتج من خارج القسمة إن وجد إلى العدد الصحيح مهما كانت قيمته، وذلك لجعل طول الفئة عددا صحيحا، ففي مثال (٢) السابق يكون

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات المقترح}}$$

$$= \frac{٢٩}{٦}$$

= ٤,٨٣

= ٥ ريالات

(د) يحدد بداية الفئة الأولى (الصغرى) ويعرف بالحد الأدنى التقريبي للفئة الأولى، وذلك باعتبار أصغر رقم في البيانات، وكذلك يحدد بداية الفئة الثانية بإضافة طول الفئة إلى الحد الأدنى التقريبي للفئة الأولى، وهكذا بالنسبة لباقي الفئات الأخرى. أما بالنسبة لتحديد نهاية الفئة الأولى، أو ما يسمى الحد الأعلى التقريبي للفئة الأولى فإنه يمكن تعيينه بإضافة طول الفئة إلى بداية الفئة الأولى ثم نطرح من حاصل الجمع مقدار وحدة دقة من الوحدات التي قربت إليها المشاهدات وهكذا لتعيين باقي الحدود العليا للفئات الباقية، وذلك في حالة الفئات المنتظمة، أي المتساوية الأطوال.

وباستخدام الخطوات السابقة يمكن تحديد فئات مثال (٢) السابق على النحو التالي:

(٢٥ ـ ٢٩)، (٣٠ ـ ٣٤)، (٣٥ ـ ٣٩)، (٤٠ ـ ٤٤)، (٤٥ ـ ٤٩)، (٥٠ ـ ٥٤)
وبذلك يكون جدول تفريغ البيانات الكمية التي وردت في مثال (٢) السابق بالشكل التالي:

جدول (٢ ـ ٣): تفريغ البيانات لأجور العمال في مثال (٢)

فئات الأجر	العلامات	التكرار(عدد العمال)
٢٥ ـ ٢٩	𝍸	٥
٣٠ ـ ٣٤	𝍸 |||	٨
٣٥ ـ ٣٩	𝍸 𝍸	١٠
٤٠ ـ ٤٤	𝍸 𝍸 |||	١٣
٤٥ ـ ٤٩	𝍸 |||	٨
٥٠ ـ ٥٤	𝍸		٦
المجموع		٥٠

ويمكن الحصول على الجدول التكراري للبيانات الكمية من جدول (٢ ـ ٣) السابق لتفريغ البيانات بأن نحذف عمود العلامات، وبذلك يصبح الجدول من عمودين الأول يمثل فئات الأجر، والثاني يمثل التكرارات لها، ويكتب كالتالي:

جدول (٢ ـ ٤) التوزيع التكراري لأجور العمال في مثال (٢)

فئات الأجر	التكرار (عدد العمال)
٢٥ ـ ٢٩	٥
٣٠ ـ ٣٤	٨
٣٥ ـ ٣٩	١٠
٤٠ ـ ٤٤	١٣
٤٥ ـ ٤٩	٨
٥٠ ـ ٥٤	٦
المجموع	٥٠

(٢ ـ ١ ـ ٣) تكوين الحدود الفعلية للفئات

تكون الحدود الفعلية (أو الحقيقية) للفئات من الحدود المقربة وذلك بأن نطرح نصف وحدة دقة من الحدود الدنيا المقربة للفئات لنحصل على الحدود الدنيا الحقيقية. ونضيف نصف وحدة دقة إلى الحدود العليا المقربة للفئات لنحصل على الحدود الحقيقية لها. وفي حالة الأرقام المقربة إلى أقرب رقم صحيح نطرح من الحد الأدنى لكل فئة ٠,٥ ونضيف إلى الحد الأعلى لكل فئة ٠,٥ وبذلك نحصل على الحدود الحقيقية وذلك بسبب جزء عشري يقرب إلى الرقم الأكبر الصحيح إذا كان الجزء العشري ٠,٥ فأكثر. ويقرب إلى الرقم الأصغر الصحيح، وإذا كان الجزء العشري أقل من ٠,٥ فمثلا الرقم ٢٥ الموجود في مثال (٢) ربما كانت قيمته ٢٤,٥، ٢٤,٦، ... فيقرب إلى ٢٥ وبذلك تكون البداية الحقيقية التي تفي بكل هذه البدايات هي ٢٤,٥، وبالنسبة للحد الأعلى الحقيقي للفئة الأولى يكون ٢٩,٥ بدلا من ٢٩، لأنه يمكن أن يكون قبل التقريب أحد القيم التالية ٢٩,١، ٢٩,٣ ... ، ٢٩,٤٩٩ وهكذا بالنسبة لباقي الفئات ففي المثال (٢) السابق تكون الحدود الفعلية هي (٢٤,٥ ـ ٢٩,٥)، (٢٩,٥ ـ ٣٤,٥)، (٣٤,٥ ـ ٣٩,٥)، (٣٩,٥ ـ ٤٤,٥)، (٤٤,٥ ـ ٤٩,٥)، (٤٩,٥ ـ ٥٤,٥) وبذلك يصبح الجدول التكراري رقم (٢ ـ ٤) بالحدود الفعلية كالتالي:

جدول (٢ ـ ٥): التوزيع التكراري لأجور العمال في مثال (٢)

فئات الأجر	٢٤,٥ـ٢٩,٥	٢٩,٥ـ٣٤,٥	٣٤,٥ـ٣٩,٥	٣٩,٥ـ٤٤,٥	٤٤,٥ـ٤٩,٥	٤٩,٥ـ٥٤,٥
التكرار	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

(٢ ـ ١ ـ ٤) تحديد مراكز الفئات

تحسب مراكز الفئات التي سوف نرمز لها بالرمز س بالعلاقة التالية

$$\text{س} = \frac{\text{الحد الأعلى للفئة} + \text{الحد الأدنى لنفس الفئة}}{٢}$$

ومن الملاحظ أن قيمة مركز الفئة س لا يتأثر إذا كانت الحدود فعلية أو مقربة، ولكن المهم أن يكون الحدان الأعلى والأدنى إما مقربين وإما حقيقيين معا. ويمكن تلخيص الجداول التكرارية التي سبق تكوينها من مثال (٢) في جدول واحد كالتالي:

جدول (٢ ـ ٦) التوزيع التكراري لأجور العمال في مثال (٢)

فئات الأجر	الحدود الفعلية للفئات	مركز الفئات (س)	التكرار (عدد العمال)
٢٥ ـ ٢٩	٢٤,٥ ـ ٢٩,٥	٢٧	٥
٣٠ ـ ٣٤	٢٩,٥ ـ ٣٤,٥	٣٢	٨
٣٥ ـ ٣٩	٣٤,٥ ـ ٣٩,٥	٣٧	١٠
٤٠ ـ ٤٤	٣٩,٥ ـ ٤٤,٥	٤٢	١٣
٤٥ ـ ٤٩	٤٤,٥ ـ ٤٩,٥	٤٧	٨
٥٠ ـ ٥٤	٤٩,٥ ـ ٥٤,٥	٥٢	٦
المجموع	ـ	ـ	٥٠

(٢ ـ ٢) أنواع الجداول للتوزيعات التكرارية

سندرس في هذا الفصل أنواع الجداول للتوزيعات التكرارية مع التمثيل البياني لبعض المنحنيات المناظرة لها:

(٢ ـ ٢ ـ ١) الجدول المتجمع الصاعد والجدول المتجمع الهابط

قد يكون المطلوب أحيانا معرفة عدد التكرارات للظاهرة محل الدراسة التي تقل عن قيمة معينة أو التي تساوي أو تزيد عن قيمة معينة أخرى ففي مثال (٢) السابق قد يكون المطلوب إيجاد عدد العمال الذين يتقاضون أجرة ٣٩,٥ ريالا أو أقل فيكون عددهم = ٥ + ٨ + ١٠ = ٢٣ عاملا وهذا ما يسمى التكرار المتجمع الصاعد. كما قد يكون المطلوب إيجاد عدد العمال الذين يتقاضون أجرا يوميا يساوي ٤٤,٥ ريالا أو أكثر، فيكون عددهم = ٨ + ٦ = ١٤ عاملا، وهو ما يسمى التكرار المتجمع الهابط أو

النازل. ويتكون كل من الجدول المتجمع الصاعد أو الجدول المتجمع الهابط فيما يلي على الترتيب وذلك باستخدام الحدود الفعلية للفئات في مثال (٢) السابق.

جدول (٢ ـ ٧) الجدول المتجمع الصاعد لأجور العمال في مثال (٢)

حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤,٥	صفر
أقل من ٢٩,٥	٥
أقل من ٣٤,٥	١٣
أقل من ٣٩,٥	٢٣
أقل من ٤٤,٥	٣٦
أقل من ٤٩,٥	٤٤
أقل من ٥٤,٥	٥٠

جدول (٢ ـ ٨) الجدول المتجمع الهابط لأجور العمال في مثال (٢)

حدود الفئات	التكرار المتجمع الهابط
أكبر من ٢٤,٥	٥٠
أكبر من ٢٩,٥	٤٥
أكبر من ٣٤,٥	٣٧
أكبر من ٣٩,٥	٢٧
أكبر من ٤٤,٥	١٤
أكبر من ٤٩,٥	٦
أكبر من ٥٤,٥	صفر

يلاحظ كتابة عبارة أقل من الحدود الدنيا الحقيقية لجميع الفئات ما عدا الفئة العليا فيكتب أقل من لكل من حديها الأدنى والأعلى، وذلك في حالة الجدول المتجمع

الصاعد، أما في حالة الجدول المتجمع الهابط فتكتب عبارة أكبر من لكل من الحدود الدنيا الحقيقية لجميع الفئات ما عدا الفئة العليا فيكتب أكبر من لكل من حديها الأعلى والأدنى .

(٢ ـ ٢ ـ ٢) جدول التوزيع التكراري النسبي والمئوي

يستخدم التكرار النسبي عندما يراد زيادة التفصيل في دراسة سلوك الظاهرة محل الدراسة، أو تبسيط عملية المقارنة بين ظاهرتين أو أكثر لنفس الخاصية في فترات مختلفة، أو مقارنة الظواهر المختلفة لنفس الخاصية في نظامين مختلفين. ويعرف التكرار النسبي لأي فئة بأنه يساوي تكرار هذه الفئة مقسوما على مجموع التكرارات، ويعرف كذلك التكرار المئوي بأنه يساوي التكرار النسبي مضروبا في ١٠٠ وإذا أضفنا التكرار النسبي والمئوي للجدول التكراري (٢ ـ ٤) السابق فإنه يأخذ الصيغة التالية :

جدول (٢ ـ ٩) التوزيع التكراري النسبي والمئوي لأجور العمال في مثال (٢)

الفئات	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي
٢٥ ـ ٢٩	٥	٠,١٠	١٠
٣٠ ـ ٣٤	٨	٠,١٦	١٦
٣٥ ـ ٣٩	١٠	٠,٢٠	٢٠
٤٠ ـ ٤٤	١٣	٠,٢٦	٢٦
٤٥ ـ ٤٩	٨	٠,١٦	١٦
٥٠ ـ ٥٤	٦	٠,١٢	١٢
المجموع	٥٠	١	١٠٠

وكذلك يمكن إيجاد التكرار النسبي المتجمع والتكرار المئوي المتجمع في كل من الجداول التكرارية المتجمعة الصاعدة أو الهابطة.

(٢ ـ ٢ ـ ٣) جداول التوزيعات التكرارية ذات الفئات غير المنتظمة (غير متساوية الطول)

الفئات المنتظمة أو المتساوية الطول يكون لها أهمية كبيرة، وخاصة لتسهيل إجراء التحليل الإحصائي الذي سوف نتعرض له فيما بعد. ولكن بعض الظواهر محل الدراسة تكون عملية تعريفها في فئات منتظمة غير ملائمة لها، وذلك كأن تكون بعض الفئات خالية من التكرارات، أو بها تكرارات قليلة جدا والذي يعزى إلى أن بيانات الظاهرة محل الدراسة تتركز أكثر في مواضع معينة دون الأخرى ويتبعثر عدد قليل منها في بعض المواضع الأخرى مثل ظاهرة درجات الطلاب، أو الأجور، أو الإنفاق، أو دخول الأسر، أو أعداد وفيات الأطفال الرضع، وستكون الفئات غير المنتظمة في مثل هذه الحالات أكثر ملاءمة لتلخيص الظاهرة في جدول تكراري. ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي الذي يمثل التعبير عن الإنفاق الشهري لمجموعة من الأسر في جدول تكراري بفئات غير منتظمة، وسنوضح كذلك كيفية تعديل التكرارات في مثل هذه الحالة.

مثال (٣)

عند دراسة ظاهرة الإنفاق الشهري لعينة من الأسر القروية بمئات الريالات حيث إن حجم العينة ٣٠ أسرة وكانت البيانات في الجدول التكراري التالي:

فئات الإنفاق الشهري	٧ ـ ٩	١٠ ـ ١٤	١٥ ـ ١٩	٢٠ ـ ٢٤	٢٥ ـ ٣٩
التكرار (عدد الأسر)	٢	٤	١٥	٦	٣

والمطلوب إيجاد التكرار المعدل لهذه البيانات. يلاحظ أن هذا الجدول يحتوي على فئات غير منتظمة، ولإيجاد جدول التوزيع التكراري المعدل نعمد إلى حساب التكرار المعدل لكل فئة بحيث يساوي التكرار المشاهد مقسوما على طول الفئة كما في الجدول التالي:

جدول (٢ ـ ١٠) التوزيع التكراري المعدل للإنفاق في مثال (٣)

فئات الإنفاق	طول الفئة	التكرار المشاهد	التكرار المعدل
٧ ـ ٩	٣	٢	٠,٦٧
١٠ ـ ١٤	٥	٤	٠,٨٠
١٥ ـ ١٩	٥	١٥	٣,٠٠
٢٠ ـ ٢٤	٥	٦	١,٢٠
٢٥ ـ ٣٩	١٥	٣	٠,٢٠
المجمــوع	ــ	٣٠	ــ

ويمكن أن يعـدل تكـرار الفئات غير المنتظمة فقط، ويترك التكرار المشاهد للفئات الأخرى بدون تعديل، وذلك بتطبيق العلاقة التالية:

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{التكرار المشاهد للفئة غير المنتظمة} \times \text{طول الفئة المنتظمة}}{\text{طول الفئة غير المنتظمة}}$$

ففي مثال (٣) نلاحظ أن التكرار للفئة الأولى وكذلك الفئة الأخيرة يكون لفئات غير منتظمة، ويكون التكرار المعدل للفئة الأولى كالتالي:

$$\text{التكرار المعدل للفئة الأولى} = \frac{٢ \times ٥}{٣} = \frac{١٠}{٣} = ٣,٣$$

$$\text{والتكرار المعدل للفئة الأخيرة} = \frac{٣ \times ٥}{١٥} = ١$$

ويمكن كتابة الجدول بعد التعديل لتكرارات الفئات غير المنتظمة بالجدول (٢ ـ ١١).

(٢ ـ ٢ ـ ٤) جداول التوزيعات التكرارية المفتوحة

إذا كان لدينـا على سبيل المثـال بيانات الإنفاق الشهري لمجموعة من الأسر ووجدنا أن قيم الإنفاق الصغرى أو الكبرى عددها قليل ومتباعدة، فإنه يفضل في هذه الحـالـة وضعهـا في جدول تكراري مفتوح من أسفل أو من أعلى. ففي حالة القيم

جدول (٢ ـ ١١) التوزيع التكراري المعدل للفئات غير المنتظمة في مثال (٣)

فئات الإنفاق	طول الفئة	التكرار المشاهد	التكرار المعدل للفئات غير المنتظمة
٧ ـ ٩	٣	٢	٣,٣
١٠ ـ ١٤	٥	٤	٤
١٥ ـ ١٩	٥	١٥	١٥
٢٠ ـ ٢٤	٥	٦	٦
٢٥ ـ ٣٩	١٥	٣	١

الصغرى يكتب أقل من عدد معين (يُخْتارُ عددٌ مناسبٌ) بحيث تحتوي هذه الفئة على عدد معقول من التكرارات وكذلك في حالة الإنفاق الكبيرة يكتب أكبر من رقم معين مناسب كما هو موضح في الجدول التكراري التالي:

جدول (٢ ـ ١٢) التوزيع التكراري للإنفاق بمئات الريالات

فئات الإنفاق	التكرار «عدد الأسر»
أقل من ١٠	٢
١٠ ـ ١٤	٤
١٥ ـ ١٩	١٥
٢٠ ـ ٢٤	٦
٢٥ فأكثر	٣
المجمـــوع	٣٠

يلاحظ أن الجـدول التكراري السابق يحتوي على فئات مفتوحة من الطرفين الأدنى والأعلى وفي بعض الظواهر قد يكون الجدول التكراري مفتوحا من طرف واحد فقط.

(٢ ـ ٢ ـ ٥) جداول التوزيعات التكرارية المزدوجة

في بعض الأحيان يكون المطلوب هو تنظيم وتلخيص بيانات إحصائية لبعض الظواهر ذات متغيرين مثل أطوال وأوزان مجموعة من الطلاب، أو درجات امتحان الإحصاء والفيزياء لمجموعة من الطلاب، أو أجور وإنتاج مجموعة من العمال. ففي مثل هذه الحالات لا بد من تكوين جدول مزدوج لفئات تكتب رأسيا لتمثيل الظاهرة الأولى، ولتكن أجور عمال مثلا، وفئات تكتب أفقيا لتمثل إنتاج هؤلاء العمال، وتفرغ بعد ذلك البيانات للأجور والإنتاج لكل قراءة من الأجر في الفئة الخاصة بها من فئات الأجر على أن يراعى أن تكون تحت فئة الإنتاج ما يندرج تحتها من فئات الإنتاج كما نوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٤)

البيانات التالية تمثل أجور **٣٠** عاملا وإنتاجهم في اليوم الواحد بالريال السعودي، والمطلوب تكوين جدول تفريغ لهذه البيانات وصياغة جدول التوزيع التكراري المزدوج لفئات الأجر وفئات الإنتاج

الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج
٥١	٥٦	٨١	٧٦	٥٤	٥١	٥٨	٩١	٧٧	٧٢
٧١	٧٣	٧٢	٦٩	٧٢	٦٦	٧٤	٧٦	٩٤	٩٤
٨٢	٨١	٦٣	٦٦	٨٦	٨٧	٩١	٩٣	٦٤	٦٨
٦٢	٦١	٨٤	٨٣	٥٧	٥٣	٧٥	٧٣	٩٤	٩٧
٨٣	٨٦	٦٤	٦١	٨٧	٨٢	٩٢	٩٣	٧٧	٧٣
٧٩	٧٦	٨٥	٨٢	٦١	٥٨	٧٦	٧١	٧٩	٧٨

نعمل في البداية جدولا للتفريغ المزدوج بحيث نختار أطوالا مناسبة لحدود فئات الأجور، وكذلك حدود فئات الإنتاج لمجموعة العمال، وفي هذا المثال نختار فئات أجر

ذات أطوال متساوية، تساوي عشرة ريالات، وتكتب رأسيا، وتكون كالتالي:

(٥٠ ـ ٥٩)، (٦٠ ـ ٦٩)، (٧٠ ـ ٧٩)، (٨٠ ـ ٨٩)، (٩٠ ـ ٩٩)

كما نختار الإنتاج بالقطعة، ولتكن في مثالنا هذا تساوي عشر قطع. وتكتب أفقيا، وتكون كالتالي:

(٥٠ ـ ٥٩)، (٦٠ ـ ٦٩). . . . (٩٠ ـ ٩٩)

ويكون التفريغ للقراءات السابقة بوضع القراءة ٥١ ريالا، لها علامة (١) أمام فئة الأجر (٥٠ ـ ٥٩) تحت فئة الإنتاج للقراءة ٥٦، وتكون فئة الإنتاج (٥٠ ـ ٥٩) أيضا في مثالنا هذا. وهكذا نكرر كتابة العلامات لباقي القراءات ونكوّن الحزم عندما يكون في الخانة خمس علامات، وهكذا حتى نتمكن من تفريغ كل القراءات وبذلك يصبح عندنا جدول التفريغ المزدوج التالي:

جدول (٢ ـ ١٣) تفريغ البيانات المزدوج لأجور العمال وانتاجهم في مثال (٤)

الإنتاج / الأجر	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩	٩٠-٩٩	المجموع
٥٠ ـ ٥٩	III					٣
٦٠ ـ ٦٩	I	IIII				٥
٧٠ ـ ٧٩		II	𝍸 III			١٠
٨٠ ـ ٨٩			I	𝍸 I	I	٨
٩٠ ـ ٩٩					IIII	٤
المجموع	٤	٦	٩	٦	٥	٣٠

وبعد تحديد عناصر جدول التفريغ (٢ ـ ١٣) السابق نعمل على صياغة جدول التوزيع التكراري وذلك بكتابة الأرقام المناظرة لكل خانة بدلا من العلامات، وبذلك نحصل على الجدول التالي:

جدول (٢ - ١٤) التوزيع التكراري لأجور العمال وإنتاجهم في مثال (٤)

الإنتاج / الأجر	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩	٩٠-٩٩	المجموع
٥٠ - ٥٩	٣					٣
٦٠ - ٦٩	١	٤				٥
٧٠ - ٧٩		٢	٨			١٠
٨٠ - ٨٩			١	٦	١	٨
٩٠ - ٩٩					٤	٤
المجموع	٤	٦	٩	٦	٥	٣٠

ويمكن عمل جدول التوزيعات التكرارية للبيانات الوصفية أيضا مثل مسميات الوظيفة، والحالة الاجتماعية للعاملين بإحدى الوزارات على سبيل المثال، فإنه في هذه الحالة تستبدل الفئة الرأسية باسم الصفة، ولتكن مسميات الوظيفة، وتستبدل الفئة الأفقية بالصفة الثانية، وهي الحالة الاجتماعية، وتفرغ البيانات الوصفية مثل ما اتبع في مثال (٤)، لتحصل على الجدول التكراري المزدوج للبيانات الوصفية.

(٢ - ٣) التمثيل البياني للتوزيعات التكرارية

لقد سبق الكلام عن طرق تنظيم البيانات الإحصائية وتلخيصها بواسطة جداول التوزيعات التكرارية. أما الآن فسوف نستعرض تنظيم البيانات وتلخيصها بطريقة التمثيل البياني لهذه الجداول التكرارية. والهدف الأساسي من التمثيل البياني بالإضافة لتلخيص البيانات هو توضيحها ووضعها في صيغة بسيطة يمكن بوساطتها فهم طبيعة التوزيعات التكرارية وصورها المختلفة، وسنتناول طرق التمثيل البياني باستخدام كل من:

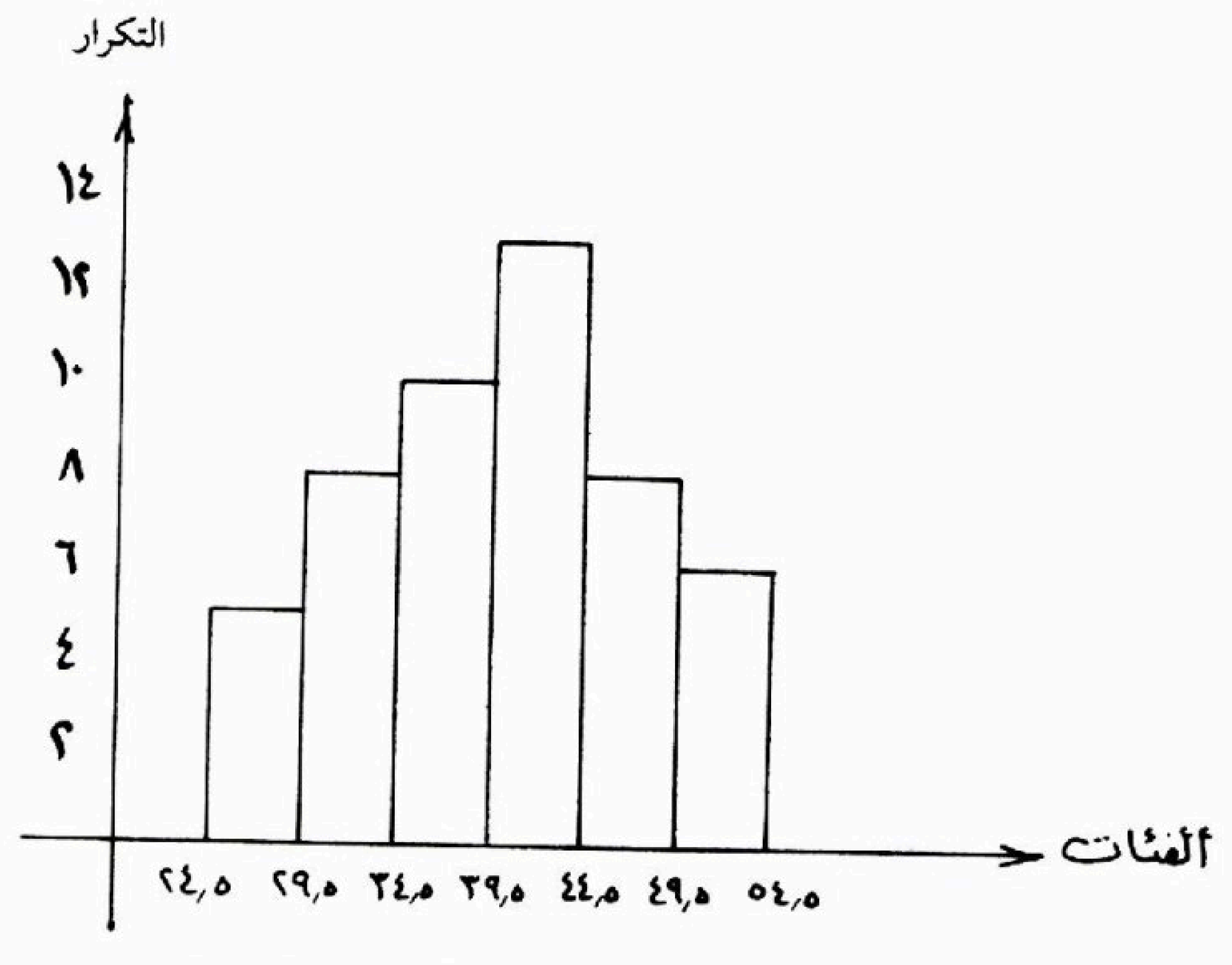
١ - المدرج التكراري

٢ - المضلع التكراري

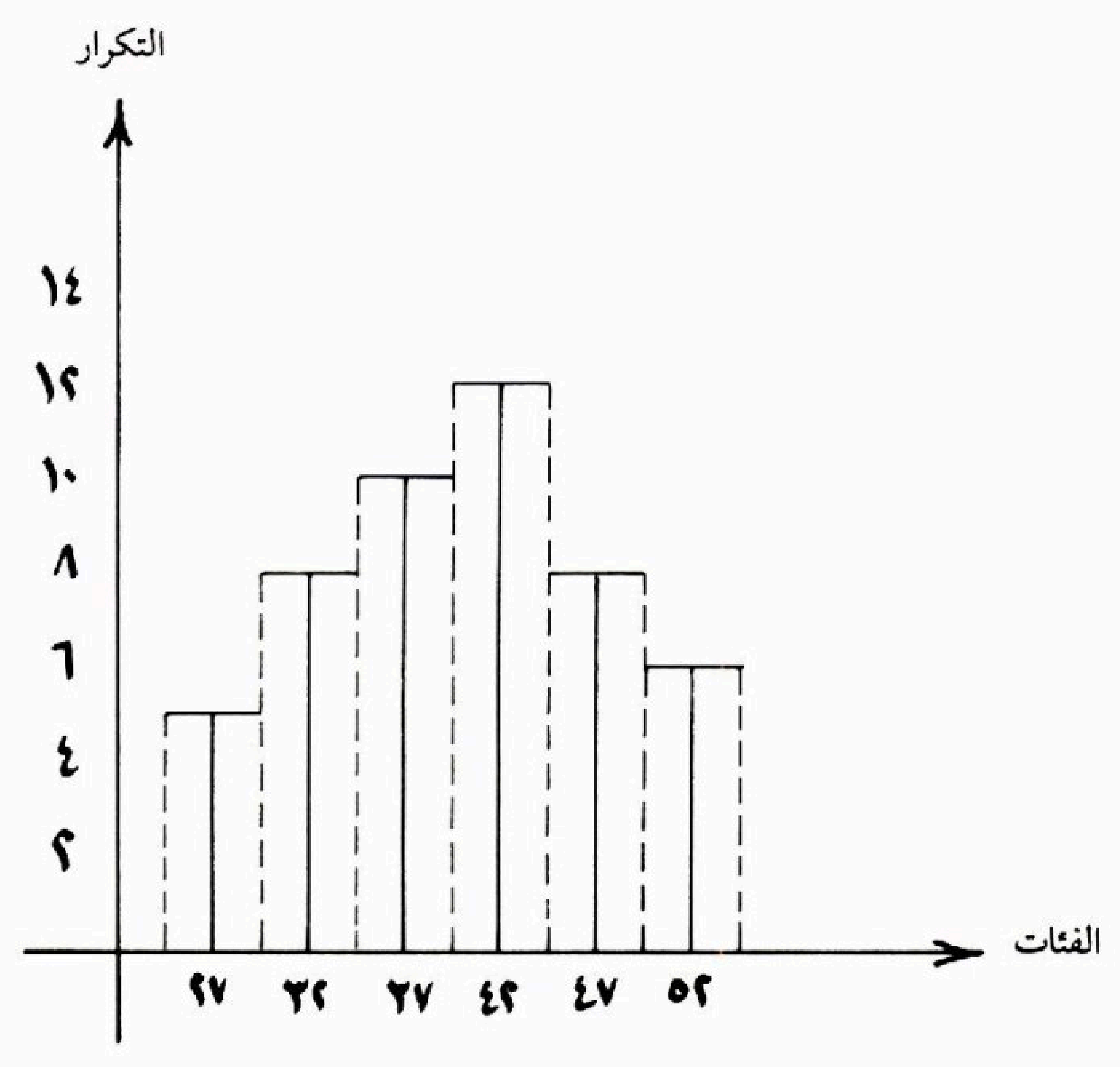
٣ ـ المنحنى التكراري
٤ ـ المنحنى المتجمع الصاعد
٥ ـ المنحنى المتجمع الهابط

(٢ ـ ٣ ـ ١) المدرج التكراري

يرسم المدرج التكراري على محورين متعامدين. وهو عبارة عن مستطيلات رأسية متلاصقة، قاعدة كل منها عبارة عن طول الفئة المناظرة لهذا المستطيل، وارتفاع كل منها عبارة عن تكرار تلك الفئة المناظرة، ويراعى أن يكون تمثيل الفئات على المحور الأفقي بالحدود الحقيقية لها، ولتوضيح ذلك نمثل المدرج التكراري للبيانات الإحصائية من جدول (٢ ـ ٤) السابق الخاص بأجور العمال في مثال (٢)، وذلك بطريقتين الأولى باستخدام الحدود الدنيا والعليا الحقيقية للفئات، والطريقة الثانية باستخدام مراكز الفئات كما يلي:



شكل (٢ ـ ١): المدرج التكراري باستخدام الحدود الفعلية للفئات



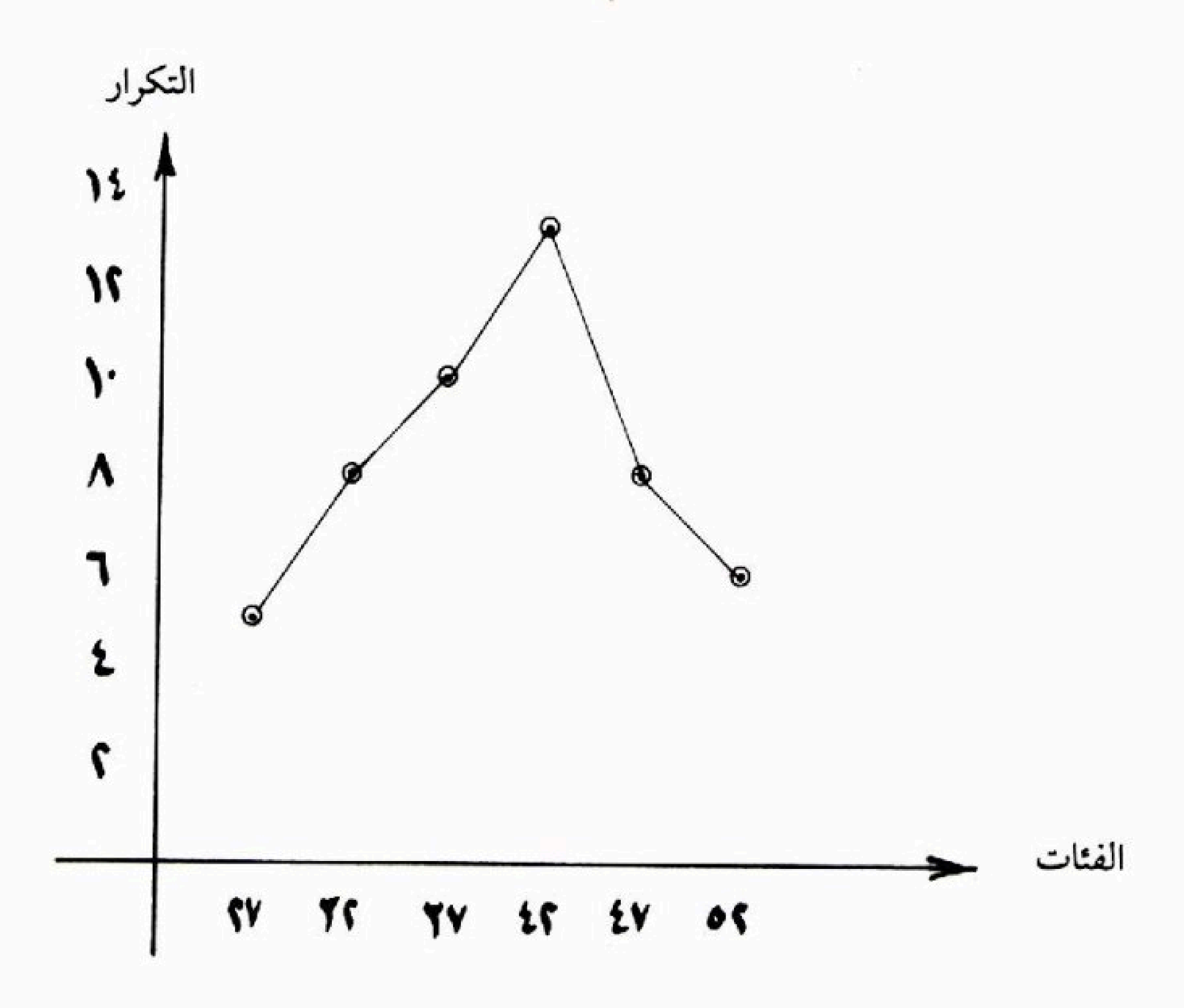
شكل (٢ ـ ٢): المدرج التكراري باستخدام مراكز الفئات

يلاحظ عند رسم المدرج التكراري باستخدام مراكز الفئات مراعاة أن يكون المركز في منتصف القاعدة حيث يتساوي بعداه بكلا الجانبين لحدَّي الفئة الأدنى والأعلى، ومجموع بُعْدَي منتصف القاعدة عن الجانبين يساوي طول الفئة.

(٢ ـ ٣ ـ ٢) المضلع التكراري

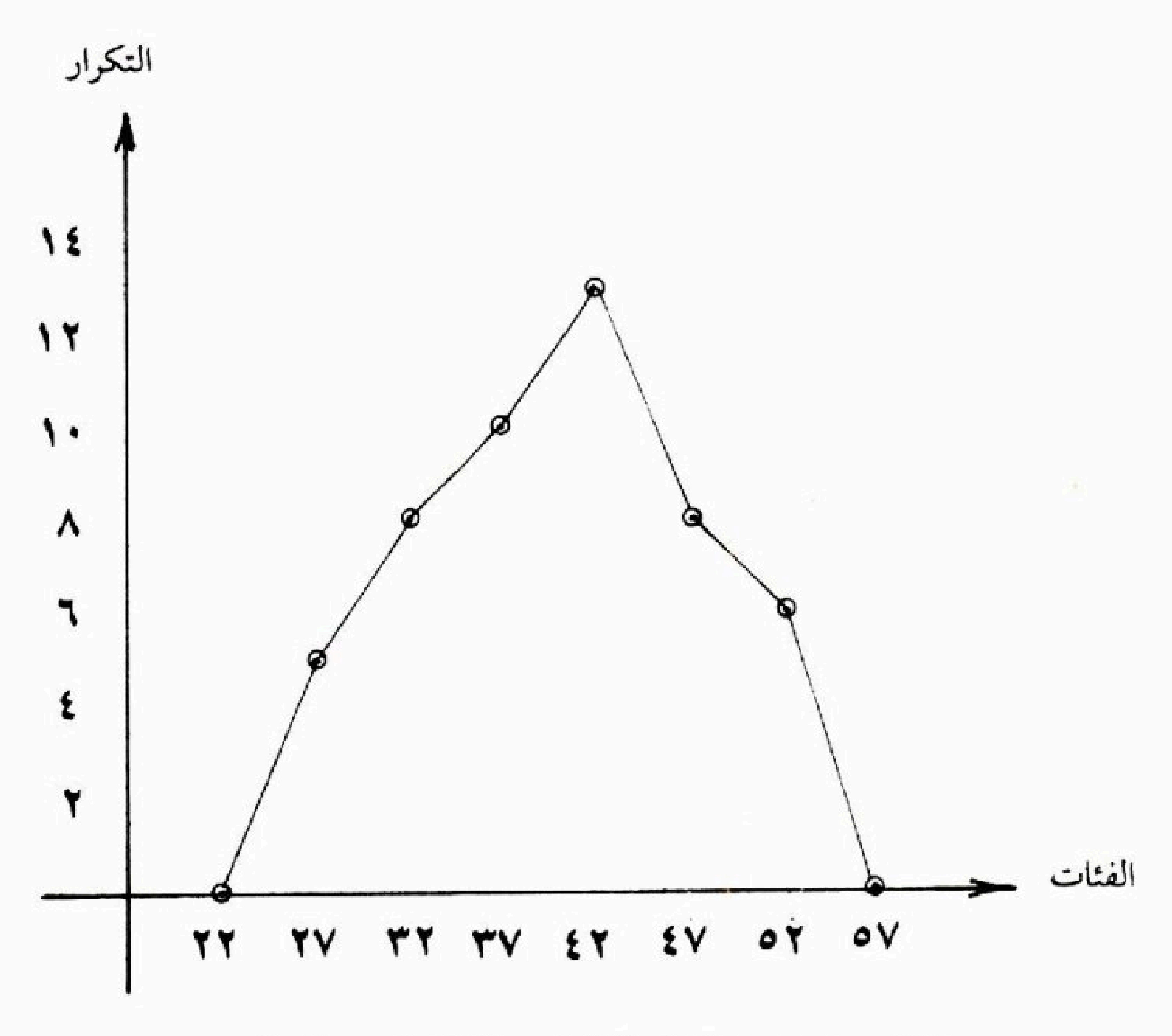
يرسم المضلع التكراري بنفس طريقة عمل المدرج التكراري، وذلك على محورين متعامدين، الأفقي يمثل الفئات بحدودها الفعلية، والرأسي يمثل التكرارات، وبدلا من رسم مستطيلات في المدرج التكراري توضع نقطة فوق مركز الفئة ارتفاعها يمثل تكرار تلك الفئة. وبعد الانتهاء من تمثيل النقط لجميع الفئات نصل بالمسطرة كل نقطتين متجاورتين فنحصل على المضلع التكراري المفتوح.

وفيما يلي نعرض المضلع التكراري باستخدام البيانات في جدول (٢ ـ ٤) لأجور العمال في مثال (٢)



شكل (٢ ـ ٣): المضلع التكراري المفتوح لأجور العمال

ولغلق المضلع التكراري شكل (٢ ـ ٣) مع المحور الأفقي الممثل لمراكز الفئات للأجور نقيس مسافة تساوي ضعف نصف الفئة الدنيا، ونضع نقطة على يسار مركز الفئة الدنيا ولتكن على المحور الأفقي، وكذلك نقيس مسافة تساوي ضعف نصف طول الفئة العليا ونضع نقطة على يمين مركز الفئة العليا على المحور الأفقي، ثم نصل بالمسطرة كلا من النقطتين اللتين على المحور الأفقي بالنقاط المجاورة لها في المضلع. وبذلك نحصل على غلق المضلع التكراري شكل (٢ ـ ٤) كما هو موضح كالتالي:



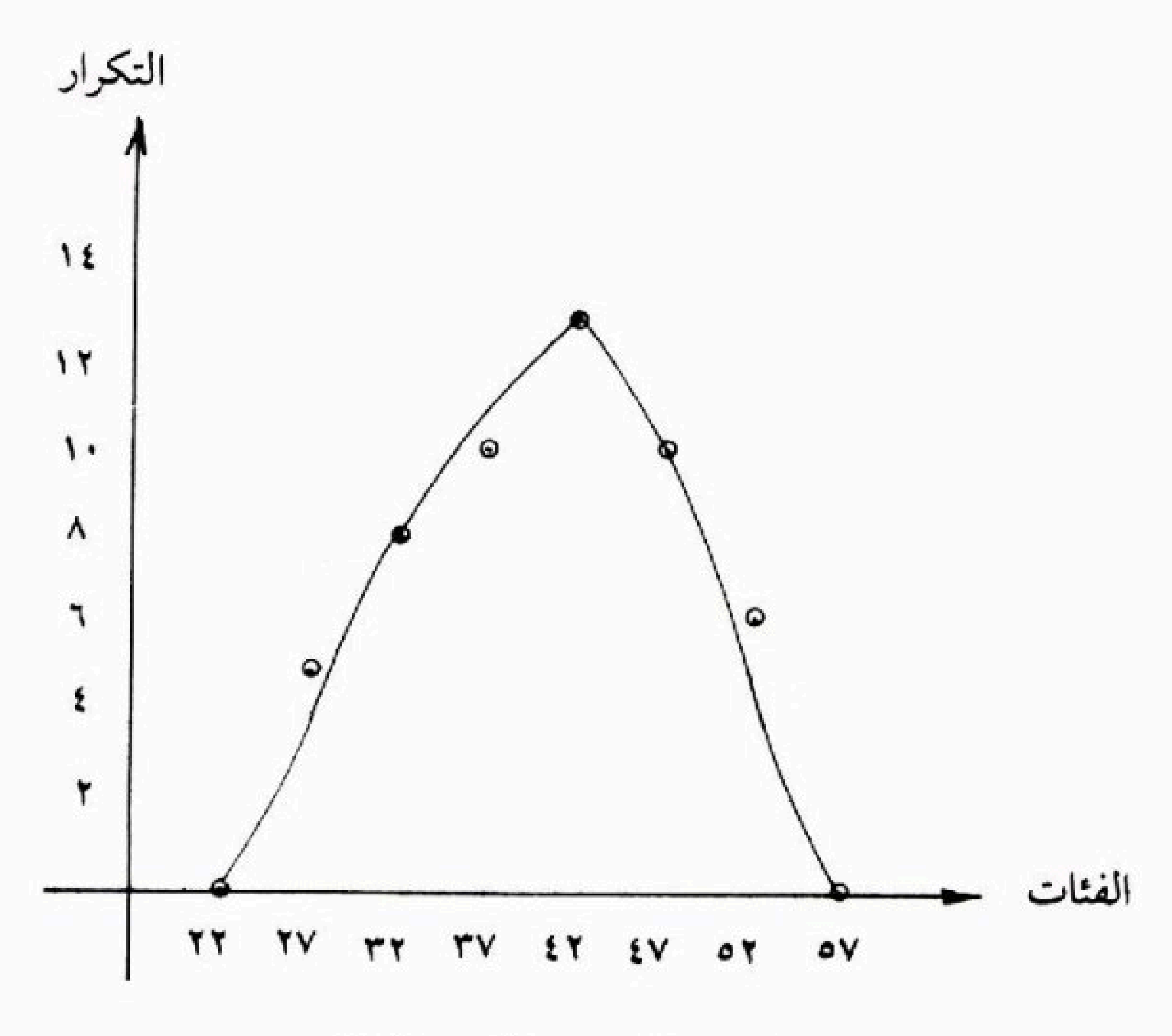
شكل (٢ ـ ٤) : المضلع التكراري المغلق لأجور العمال

(٢ ـ ٣ ـ ٣) المنحنى التكراري

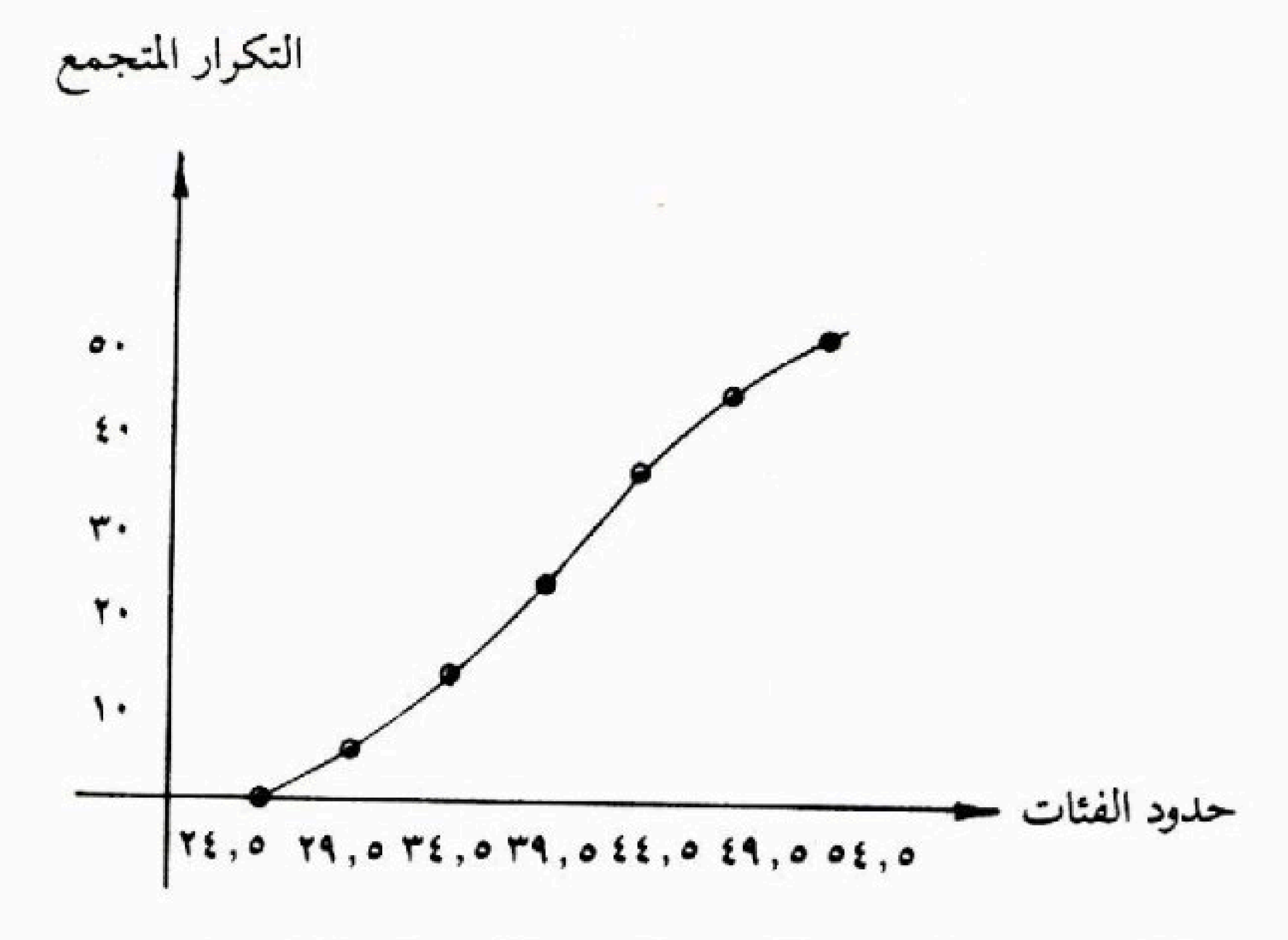
يمثل المنحنى التكراري على محورين متعامدين مثل ما تم بالنسبة للمضلع التكراري، وبدلا من توصيل النقاط بالمسطرة كما اتبع في المضلع التكراري في شكل (٢ ـ ٤) فإنه يمهد المنحنى باليد، ويراعى بأن يكون انسيابيا، حتى لو اضطررنا بعدم المرور لبعض النقاط ونوضح ذلك من شكل (٢ ـ ٥) كالتالي:

(٢ ـ ٣ ـ ٤) المنحنى المتجمع الصاعد

يرسم المنحنى المتجمع الصاعد على محورين متعامدين بحيث يكتب على المحور الأفقي الحدود الحقيقية للفئات والمحور الرأسي للتكرارات المتجمعة، وتمثل النقاط بحيث تكون النقطة الأولى هي الحد الأدنى للفئة الأولى، وارتفاعها صفر، والنقطة



شكل (٢ ـ ٥) : المنحنى التكراري لأجور العمال

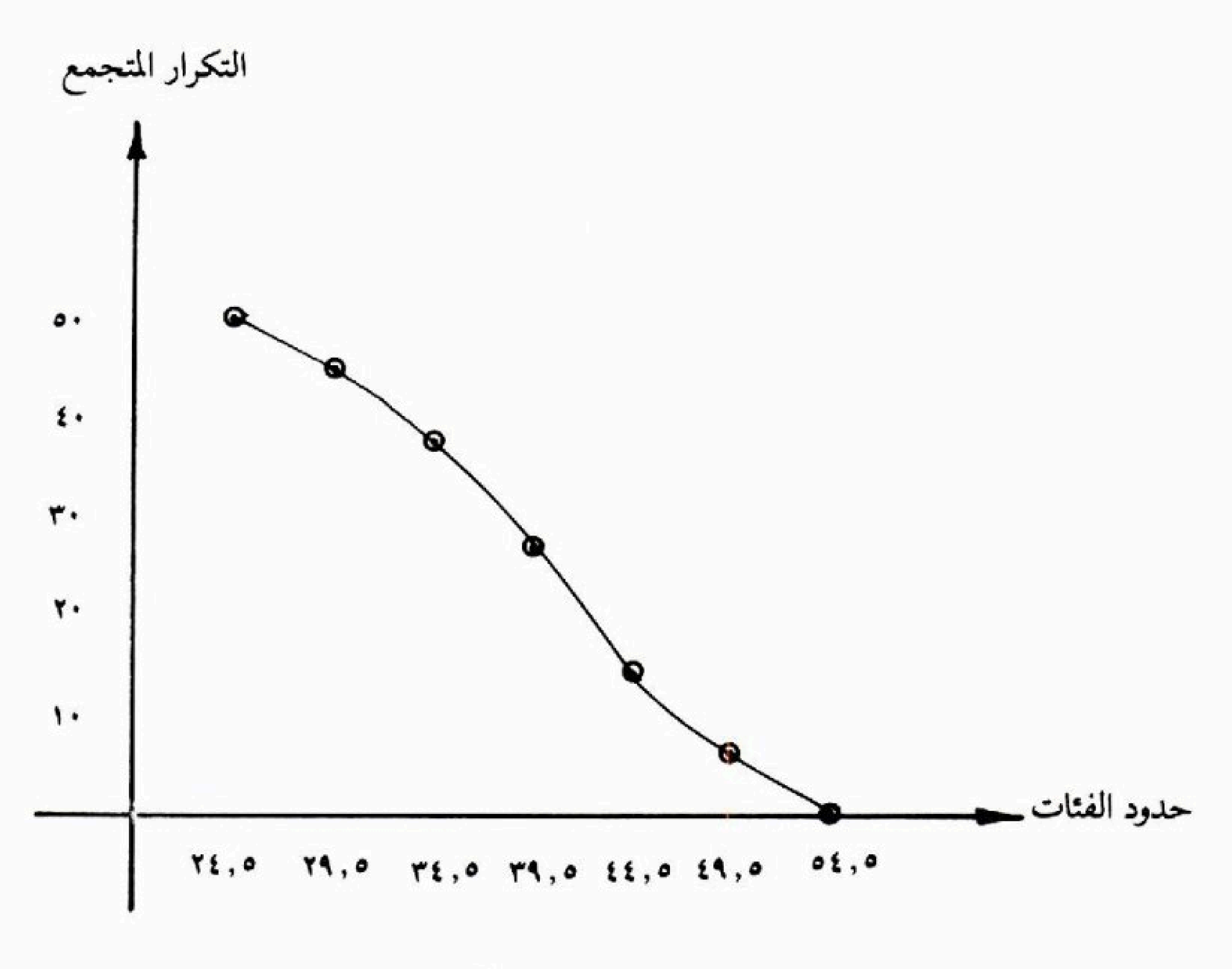


شكل (٢ ـ ٦) : المنحنى المتجمع الصاعد لأجور العمال في مثال (٢)

الثانية هي الحد الأدنى الحقيقي للفئة الثانية، وارتفاعها هو التكرار المتجمع الصاعد الأقل، أو يساوي هذا الحد، وكذلك يستكمل رسم باقي النقاط عند الحدود الدنيا الحقيقية لباقي الفئات مع التكرارات المتجمعة الصاعدة لها، ولتوضيح ذلك نستخدم جدول (٢ ـ ٧) لأجور العمال لمثال (٢) ويكون شكل (٢ ـ ٦) هو المنحنى المتجمع الصاعد.

(٢ ـ ٣ ـ ٥) المنحنى المتجمع الهابط

يرسم هذا المنحنى مثل المنحنى المتجمع الصاعد، ولكن تمثل النقاط بحيث تكون النقطة الأولى عند الحد الأدنى للفئة الأولى يقابلها مجموع التكرارات، والنقطة الثانية عند الحد الأدنى للفئة الثانية ويقابلها التكرار المتجمع الأكبر أو يساوي عند هذا الحد، وهكذا لباقي الحدود ويمثل جدول (٢ ـ ٨) السابق لفئات الأجور لمثال (٢) كالآتي:



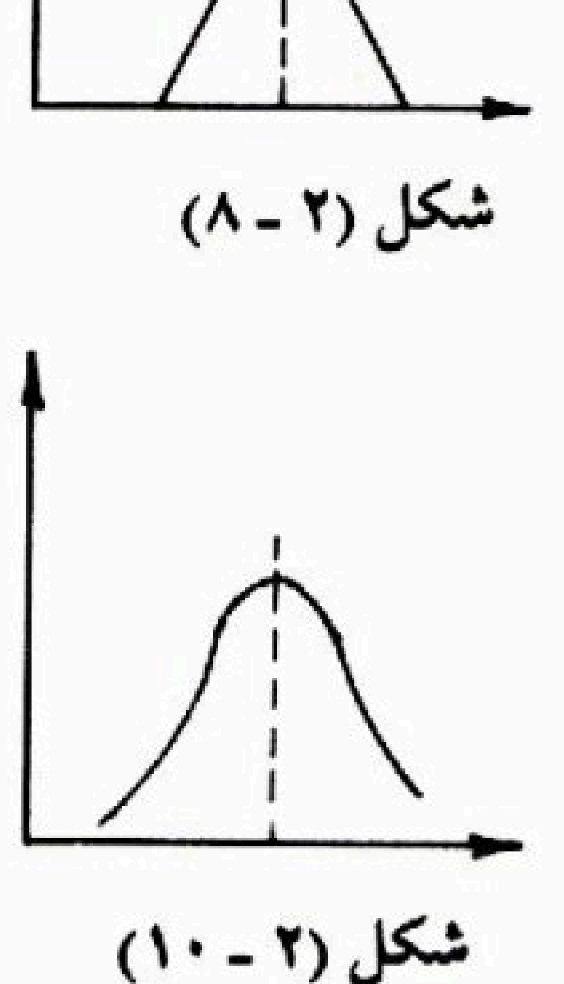
شكل (٢ ـ ٧): المنحنى المتجمع الهابط لأجور العمال مثال (٢)

وتجدر الإشارة إلى أن الأشكال البيانية السابقة التي تم تمثيلها بيانيا باستخدام المحور الرأسي لتمثيل التكرارات الفعلية أو المشاهدة، ويمكن إعادة رسمها باستخدام التكرار النسبي أو المئوي، لنحصل على المدرج التكراري النسبي أو المئوي، وكذلك المضلع التكراري النسبي أو المئوي أو المنحنى التكراري النسبي أو المئوي أو المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط النسبي أو المئوي.

(٢ ـ ٣ ـ ٦) بعض الأشكال المختلفة للمنحنيات التكرارية

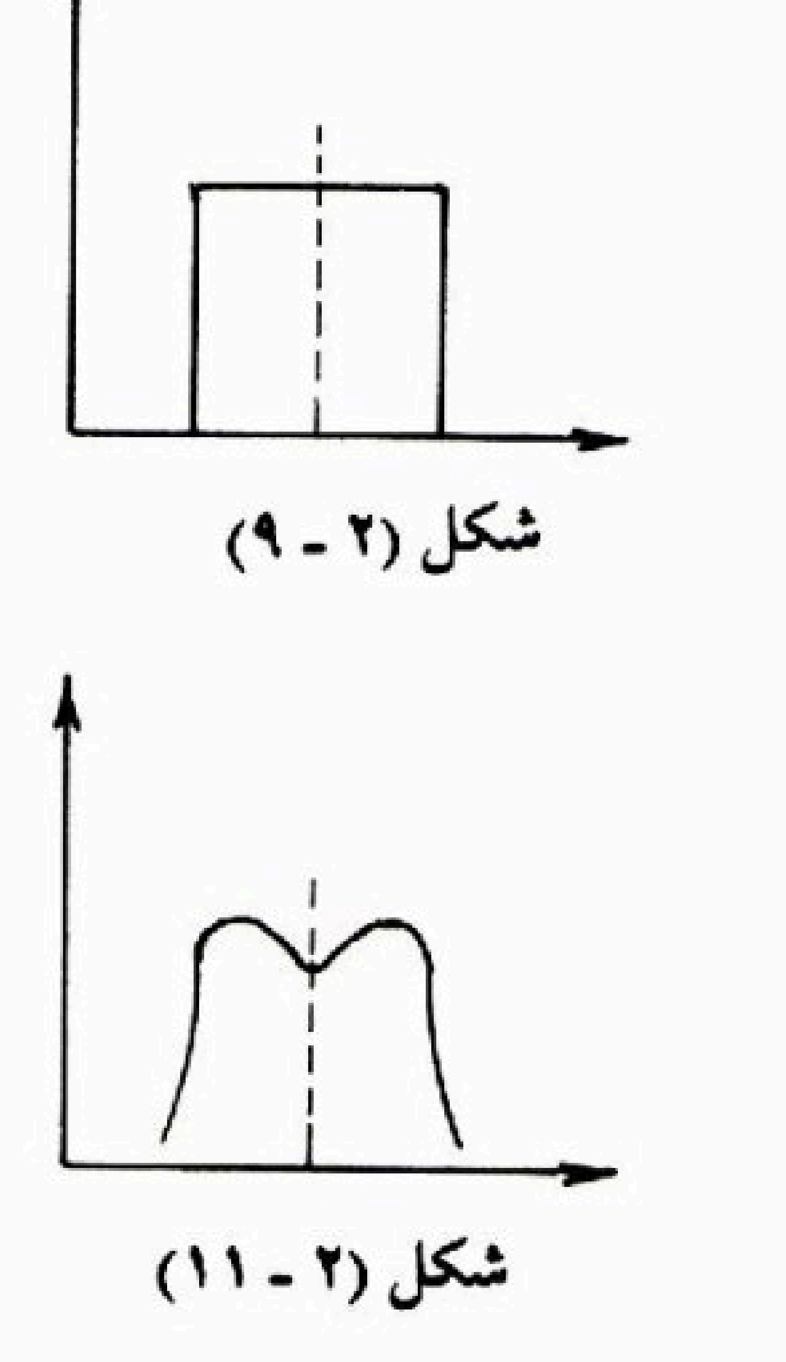
توجد في الحياة العملية كثير من المنحنيات غير المتماثلة، وقليلة من المنحنيات المتماثلة، والمنحنى المتماثل هو الذي يكون له محور تناظر يتماثل الشكل على جانبيه تماما، والمنحنى غير المتماثل هو الذي لا يوجد له محور تناظر يتماثل الشكل على جانبيه، ونستعرض فيما يلي بالرسم بعض المنحنيات المتماثلة وغير المتماثلة.

بعض المنحنيات المتماثلة:



شكل (٢ ـ ٨)

شكل (٢ ـ ١٠)

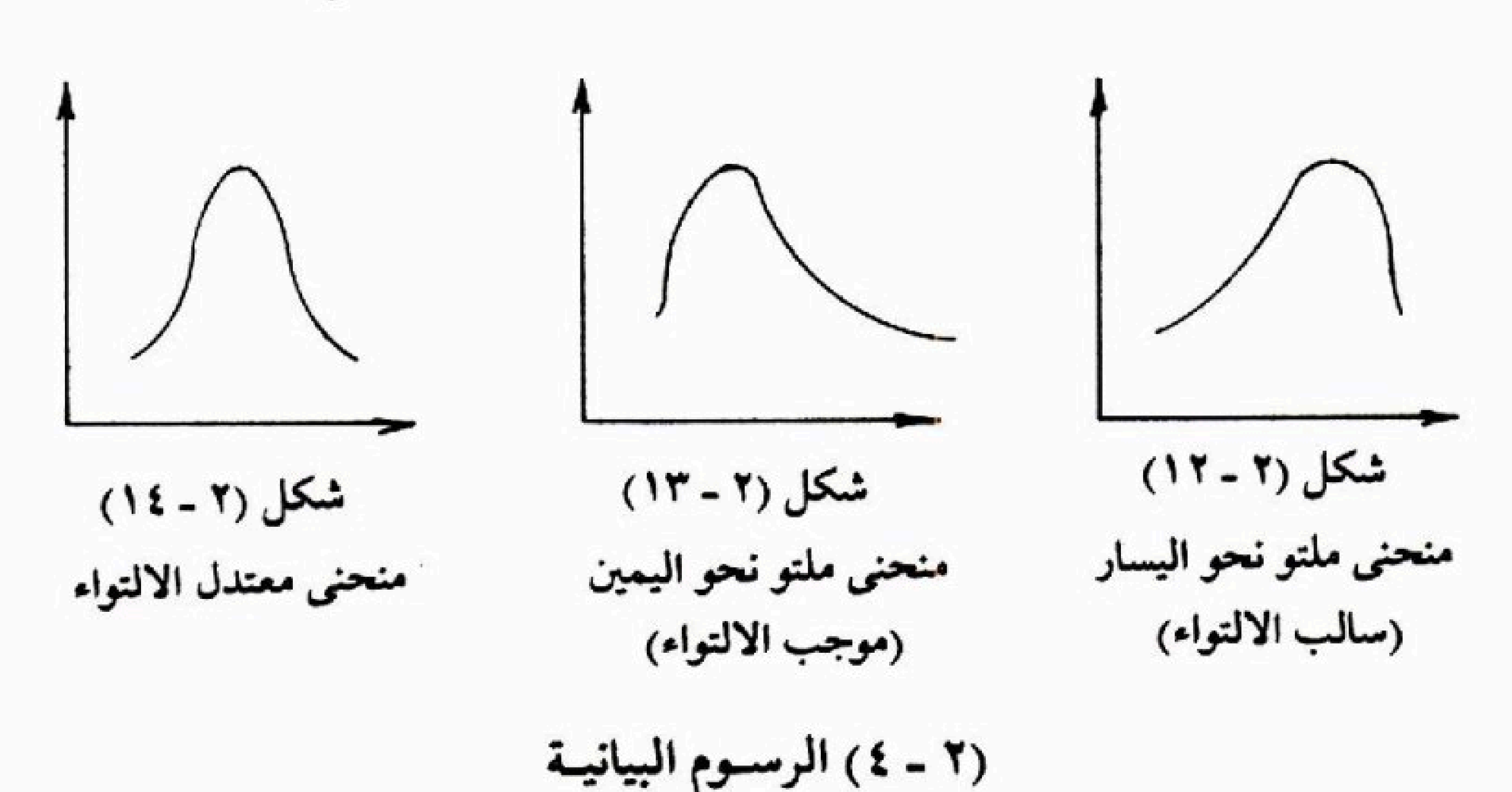


شكل (٢ ـ ٩)

شكل (٢ ـ ١١)

بعض الأشكال غير المتماثلة :

يوجد كثير من المنحنيات غير المتماثلة نستعرض بعضها فيما يلي :



شكل (٢ ـ ١٢)
منحنى ملتو نحو اليسار
(سالب الالتواء)

شكل (٢ ـ ١٣)
منحنى ملتو نحو اليمين
(موجب الالتواء)

شكل (٢ ـ ١٤)
منحنى معتدل الالتواء

(٢ ـ ٤) الرسوم البيانية

كثير من الحكومات والهيئات والمؤسسات العامة ترغب عادة في توضيح مظاهر التطور الذي تقوم به في المجالات المختلفة مثل التعليم والصناعة والزراعة والصحة . . . وذلك في صورة يمكن للشخص العادي استيعابها بسهولة ، وأفضل وسيلة لذلك الرسوم البيانية . ومن فوائد الرسوم البيانية أنها تعطي فكرة سريعة عن تطور الظاهرة محل الدراسة ، أو تغيرها بصورة عامة وذلك بصورة سهلة وشيقة ، وتجيب عن معظم الاستفسارات المطلوبة بعيدا عن الحسابات الرقمية . من أهم الطرق التي سوف نستعرضها الخط البياني والأعمدة البيانية والرسوم الدائرية ، وسوف نتناول كلا من هذه الطرق بشيء من التفصيل فيما يلي :

(٢ ـ ٤ ـ ١) الخط البياني

هو عبارة عن خط منكسر يمثل مسار البيانات ، وغالبا ما يستخدم الخط البياني في حالة المشاهدات لفترات زمنية حيث إن المحور الأفقي يمثل الزمن ، والمحور الرأسي يمثل قيم المشاهدات . والأمثلة على ذلك كثيرة منها : دراسة تطور التعليم في المملكة العربية السعودية خلال فترة زمنية مقدارها خمس سنوات ، أو تطور عدد المصانع في المملكة خلال عشر سنوات ، أو زيادة عدد القروض التي تقدمها صناديق التنمية

السعودية سنويا خلال عشر سنوات، أو خمس السنوات الماضية، ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي.

مثـال (٥)

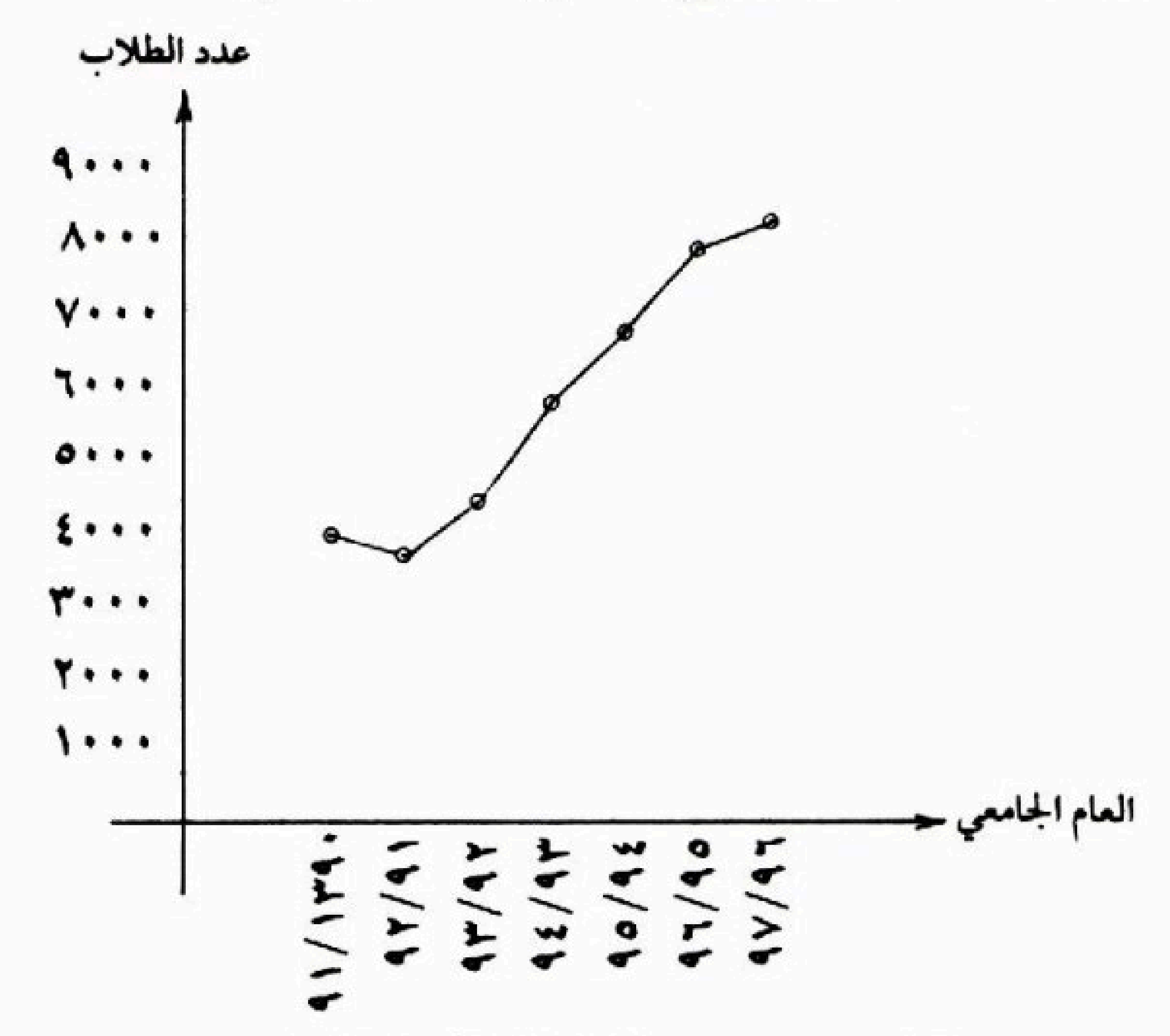
الجدول (٢ ـ ١٥) التالي يمثل عدد الطلاب الذي التحقوا بجامعة الملك سعود (جامعة الرياض سابقا) من العام الجامعي ١٣٩٠/١٣٩١هـ حتى العام الجامعي ١٣٩٦/١٣٩٧هـ.

جدول (٢ ـ ١٥): أعداد الطلاب الملتحقين بجامعة الملك سعود

العام الدراسي	٩٠/٩١	٩١/٩٢	٩٢/٩٣	٩٣/٩٤	٩٤/٩٥	٩٥/٩٦	٩٦/٩٧
عدد الطلاب	٣٩٠٧	٣٧٨٢	٤٣٦٩	٥٧٤٥	٦٧١٠	٧٨٥٠	٨١٣٩

مثِّل هذه البيانات باستخدام الخط البياني.

يمكن تمثيل البيانات كما هو موضح بشكل (٢ ـ ١٥) التالي



شكل (٢ ـ ١٥): الخط البياني لأعداد الطلاب

وإذا كان لدينـا ظاهرتان أو أكثر، وكانت قيم المشاهدات في الفترات الزمنية نفسها فإنه يمكن تمثيل كل ظاهرة منها بخط بياني بلون يختلف في كل واحدة منها عن الأخرى، أو بخط مستمر للظاهرة الأولى، وبخط منقط للظاهرة الثانية، كما يتضح من المثال التالي.

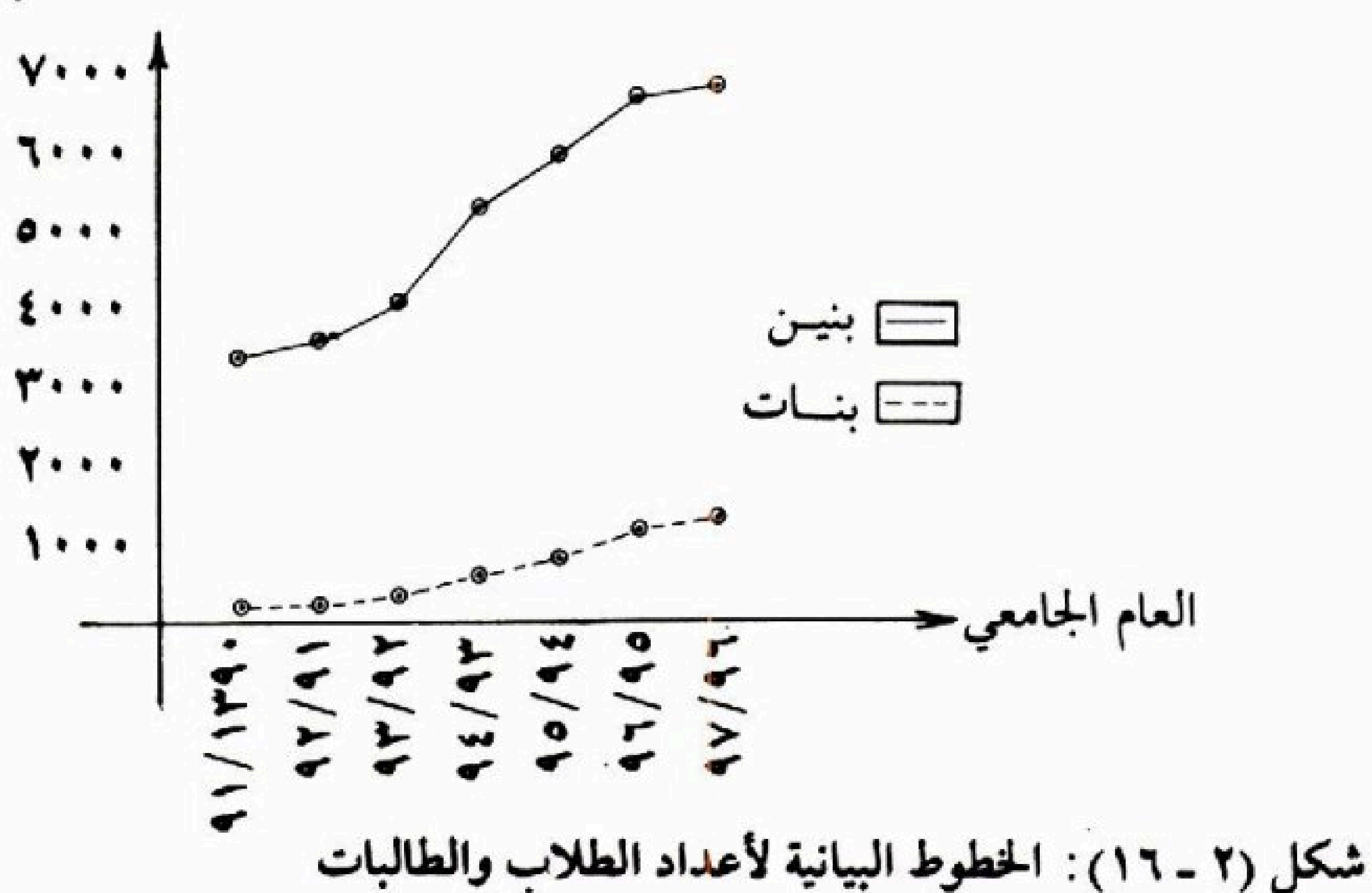
مثـال (٦)

فيما يلي جدول (٢ ـ ١٦) يمثل عدد الطلاب الملتحقين بجامعة الملك سعود (الـرياض سابقـا) خلال الفـترة من العـام الجـامعي ١٣٩٠/١٣٩١هـ وحتى عام ١٣٩٦/١٣٩٧هـ حسب الجنس مثّل هذه البيانات بواسطة الخط البياني.

جدول (٢ ـ ١٦): أعداد الطلاب والطالبات الملتحقين بجامعة الملك سعود

العام الدراسي	٩٠/٩١	٩١/٩٢	٩٢/٩٣	٩٣/٩٤	٩٤/٩٥	٩٥/٩٦	٩٦/٩٧
ذكـور	٣٣٤٨	٣٥٢٧	٤٠٩٦	٥٢٤٠	٥٨٩٢	٦٦٦٥	٦٧٤٥
إنـاث	٢٥٩	٢٥٥	٢٧٣	٥٠٥	٨١٨	١١٨٥	١٣٩٤

يمكن تمثيل البيانات كما هو موضح بشكل (٢ ـ ١٦) كالتالي:



شكل (٢ ـ ١٦): الخطوط البيانية لأعداد الطلاب والطالبات

(٢ ـ ٤ ـ ٢) الأعمـدة البيانيـة

من أفضل الطرق البيانية وأوضحها، وهي عبارة عن مستطيلات رأسية كل منها ذو سمـك مناسب ومتساو، وارتفاعاتها تمثل قيم المشاهدات للظاهرة محل الدراسة، وتكون هذه المستطيلات على أبعاد متساوية فيما بينها وسوف نعرض منها بالأمثلة كلا من الأعمدة البسيطة، والأعمدة المزدوجة (المتلاصقة)، والأعمدة المجزأة فيما يلي.

الأعمدة البيانية البسيطة

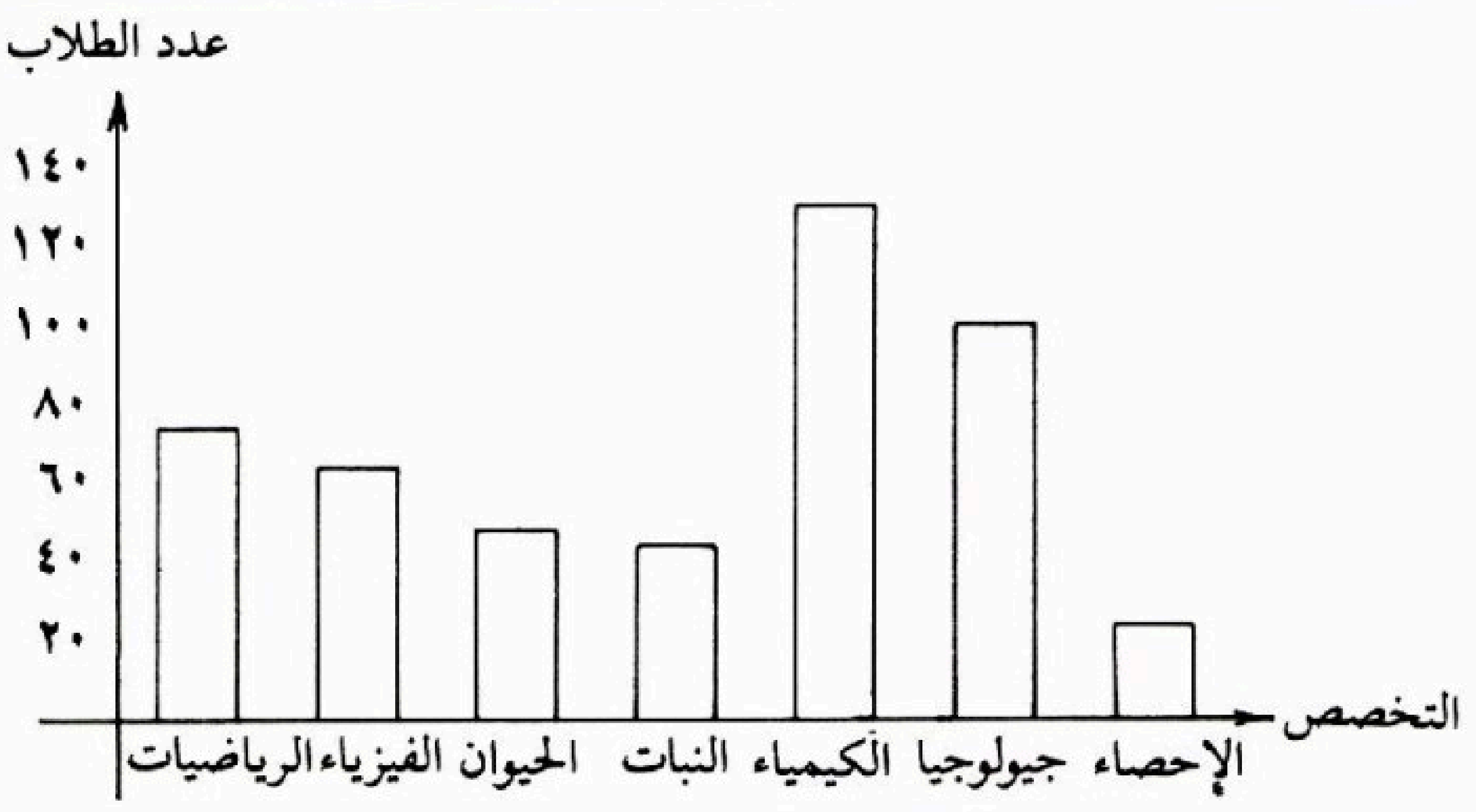
وتستخدم لتمثيل قيم المشاهدات لظاهرة واحدة محل الدراسة وقد تكون هذه المشاهدات مقيسة بالنسبة للزمن أو غير ذلك.

مثـال (٧)

جدول (٢ ـ ١٧) التالي يبين عدد الطلاب الذي التحقوا بكلية العلوم جامعة الملك سعـود (جـامعـة الـرياض سابقا) وذلك حسب التخصص في العام الجامعي ١٣٩٦/١٣٩٧هـ مثِّل هذه البيانات بواسطة الأعمدة البيانية البسيطة.

جدول (٢ ـ ١٧): توزيع الطلاب المقبولين في كلية العلوم عام ١٣٩٦/ ١٣٩٧هـ حسب التخصص

التخصص	الرياضيات	الفيزياء	الحيوان	النبات	الكيمياء	الجيولوجيا	الإحصاء
عددالطلاب	٧٧	٦٤	٤٧	٤٤	١٣٠	٩٨	٢٤



شكل (٢ ـ ١٧): الأعمدة البيانية البسيطة لأعداد الطلاب حسب التخصص في كلية العلوم

الأعمدة البيانية المزدوجة (المتلاصقة)

تستخدم الأعمدة البيانية المزدوجة إذا أردنا المقارنة بين ظاهرتين أو أكثر كالمقارنة بين عدد طلاب الجامعة، وعدد الطالبات بالجامعة أيضا، أو عدد مدارس البنين، وعدد مدارس البنات بالمملكة، أو مقارنة الإنفاق والدخل لمجموعة من الأسر. . . إلخ . وتمثل كل ظاهرة بمستطيل يلاصق مستطيل الظاهرة الثانية، ولكنه يتميز بلون مختلف، أو يظلل ويترك المستطيل الخاص بالظاهرة الثانية بدون تظليل، ونوضح ذلك بالمثال التالي .

مثال (٨)

جدول (٢ ـ ١٨) التالي يمثل توزيع طلاب كلية الآداب في جامعة الملك سعود خلال العام الجامعي ١٣٩٦/١٣٩٧هـ للتخصصات المختلفة حسب الجنس. مثِّل هذه البيانات بالأعمدة المزدوجة .

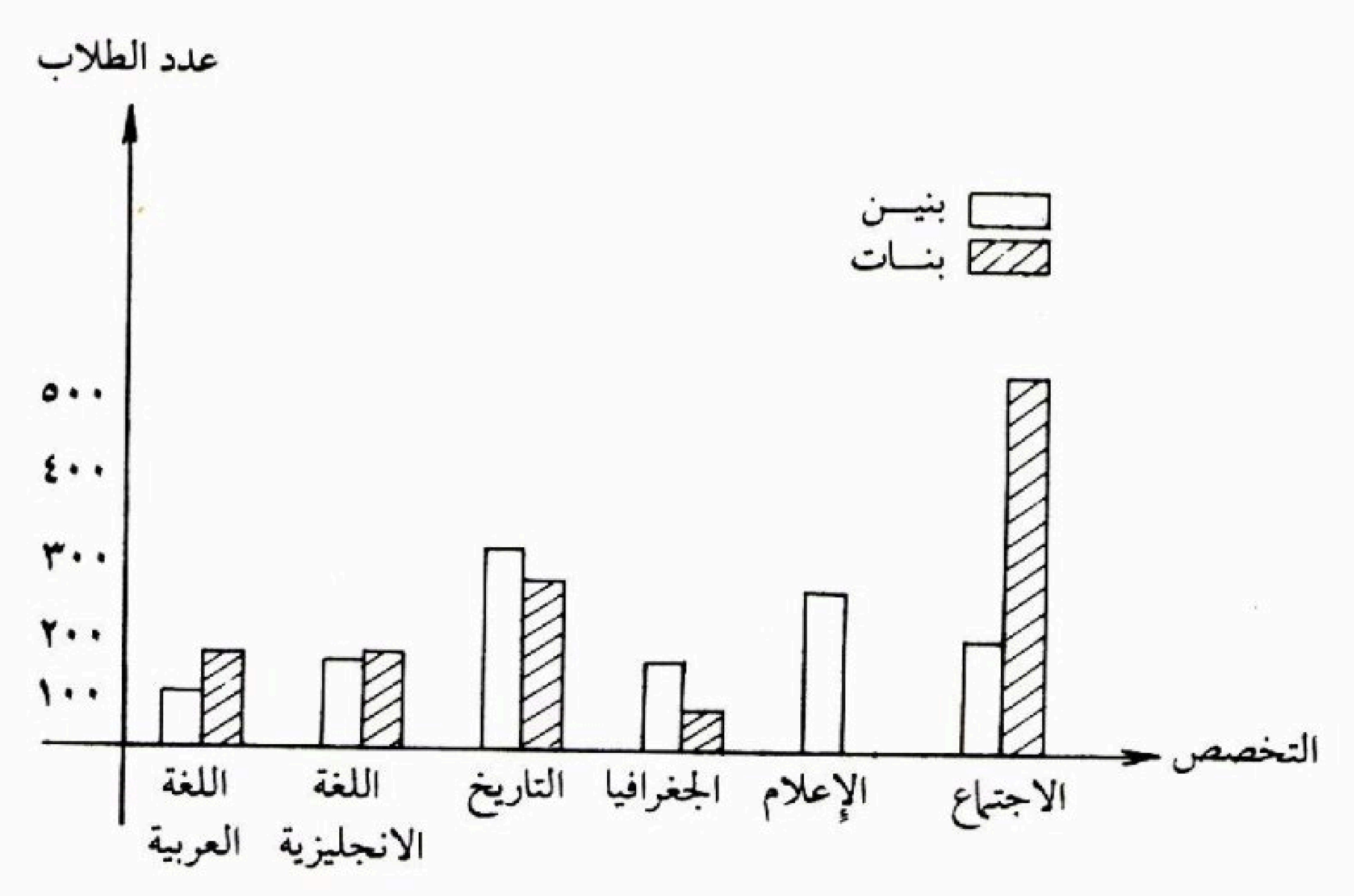
جدول (٢ ـ ١٨) : توزيع الطلاب المقبولين في كلية الآداب عام ١٣٩٦/١٣٩٧هـ حسب الجنس والتخصص

التخصص	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	التاريخ	الجغرافيا	الإعلام	الاجتماع
بنيـــن	٧٤	١١٥	٢٥٤	١٠٩	٢٠١	١٣٨
بنـــات	١٢٩	١٣٤	١٥٥	٥٧	—	٤٨٥

تُمثَّل هذه البيانات بالأعمدة المزدوجة كما هو موضح بشكل (٢ ـ ١٨) التالي

الأعمدة البيانية المجزأة

تستخدم الأعمدة البيانية المجزأة في حالة وجود أكثر من ظاهرة مثل ما تم بالنسبة للأعمـدة المـزدوجة السابقة. ولكن في هذه الحالة يرسم عمود واحد لمجموع القيم لبيانـات الـظاهـرتين المرغوب تمثيلها، ثم يقسم المستطيل بنسبة عدد البيانات لكل ظاهرة، ونوضح ذلك بالمثال التالي .



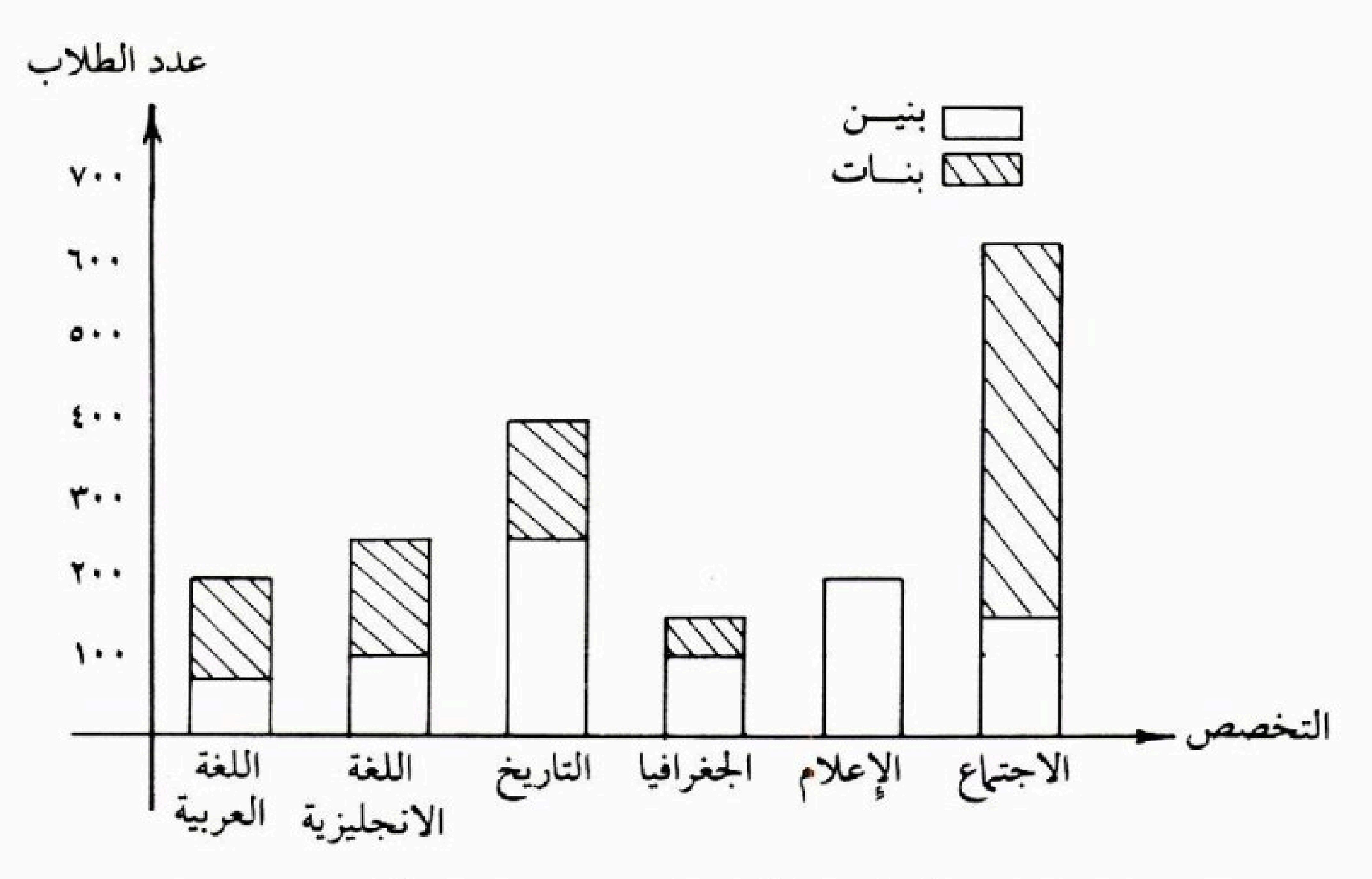
شكل (٢ ـ ١٨): الأعمدة المزدوجة لطلاب وطالبات كلية الآداب حسب التخصص

مثـال (٩)

استخدم الأعمدة البيانية المجزأة لتمثيل البيانات المعطاة في مثال (٨). يمكن وضـع الجـدول (٢ ـ ١٨) قبل التمثيل على الصورة التالية، كما هو موضح بجدول (٢ ـ ١٩).

جدول (٢ ـ ١٩): توزيع الطلاب المقبولين في كلية الآداب عام ١٣٩٦/١٣٩٧هـ حسب الجنس والتخصص

التخصص	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	التاريخ	الجغرافيا	الإعلام	الاجتماع
بنيـــن	٧٤	١١٥	٢٥٤	١٠٩	٢٠١	١٣٨
بنـــات	١٢٩	١٣٤	١٥٥	٥٧	ـ	٤٨٥
المجموع	٢٠٣	٢٤٩	٤٠٩	١٦٦	٢٠١	٦٢٣



شكل (٢ ـ ١٩): الأعمدة المجزأة لطلاب وطالبات كلية الآداب حسب التخصص.

(٢ ـ ٤ ـ ٣) الرسوم الدائرية

هي عبارة عن دائرة ذات نصف قطر مناسب تقسم إلى قطاعات مركزية لكل قطاع زاوية تتناسب مع عدد المشاهدات ويمكن حساب الزاوية المركزية من القانون التالي:

$$\text{الزاوية المركزية للقطاع تُمثل عدد مشاهدات ما} = \frac{٣٦٠}{\text{مجموع المشاهدات}} \times \text{عدد المشاهدات}$$

ونوضح ذلك بالمثال التالي

مثـال (١٠)

جدول (٢ ـ ٢٠) التـالي يمثل توزيع المبتعثين للدراسة في الخارج من جامعة الملك سعود (الرياض سابقا) حسب الدرجات العلمية المطلوبة حتى العام الدراسي ١٣٩٦/١٣٩٧هـ. مثّل هذه البيانات بالرسوم الدائرية.

جدول (٢ ـ ٢٠): توزيع مبتعثي الدراسات العليا لجامعة الملك سعودي حتى عام ٩٦/١٣٩٧هـ حسب الدرجة العلمية

الدرجة	دكتوراه	دبلوم	ماجستير	درجات أخرى
عدد المبتعثين	٣٣٤	٢	٤٧	٨

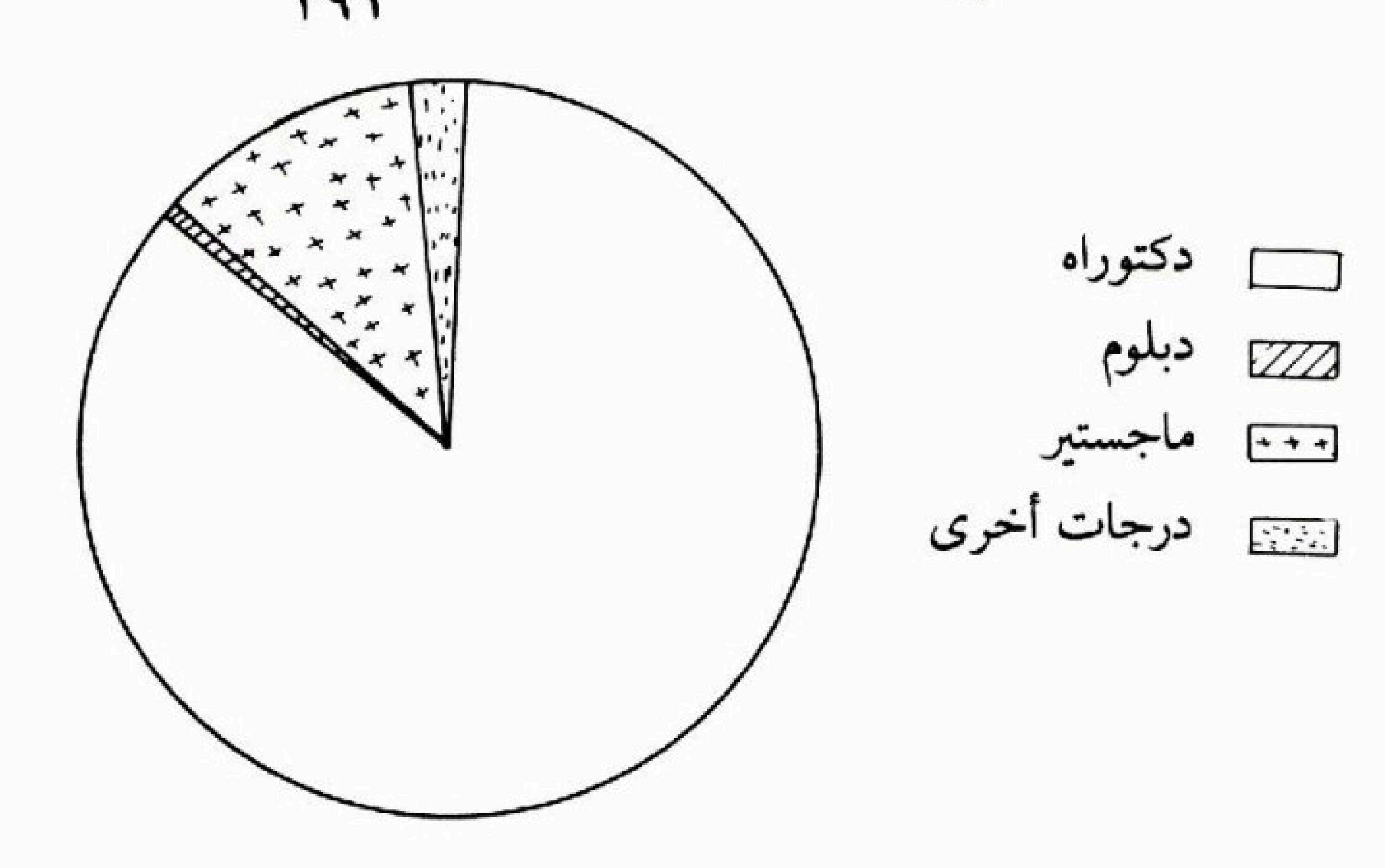
نلاحظ أن مجموع المبتعثين المراد تمثيلهم = ٣٩١ مبتعثا، ولأن الزاوية الدائرية تساوي ٣٦٠ درجة فإنه يمكن تحديد الزاوية المناظرة للمبتعثين لكل درجة كما يلي:

الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل الدكتوراه $= \frac{٣٦٠}{٣٩١} \times ٣٣٤ = ٣٠٨^\circ$

الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل الدبلوم $= \frac{٣٦٠}{٣٩١} \times ٢ = ٢^\circ$

الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل الماجستير $= \frac{٣٦٠}{٣٩١} \times ٤٧ = ٤٣^\circ$

الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل درجات أخرى $= \frac{٣٦٠}{٣٩١} \times ٨ = ٧^\circ$



شكل (٢ ـ ٢٠): الرسم الدائري للمبتعثين بجامعة الملك سعود للدراسة في الخارج

ويمكن حل المثال السابق بطريقة أخرى كالتالي:

١ ـ نوجد النسبة المئوية لكل مشاهدة من العلاقة التالية:

$$\text{النسبة المئوية} = \frac{\text{المشاهدة}}{\text{مجموع المشاهدات}} \times ١٠٠$$

٢ ـ نحسب الزاوية المركزية من العلاقة التالية:

الزاوية المركزية = النسبة المئوية × ٣,٦°

ويكتب جدول (٢ ـ ٢٠) لحساب الزوايا كالتالي:

جدول (٢ ـ ٢١): توزيع المبتعثين للدراسات العليا بجامعة الملك سعود حتى عام ٩٦/١٣٩٧هـ حسب الدرجة العلمية وزاوية القطاع المناظرة لكل درجة علمية

الدرجة	عدد المبتعثين	النسبة المئوية	الزاوية المركزية
دكتوراه	٣٣٤	٨٥,٤٢٢	٣٠٨
دبلوم	٢	٠,٥١٢	٢
ماجستير	٤٧	١٢,٠٢٠	٤٣
درجات أخرى	٨	٢,٤٦٠	٧
المجموع	٣٩١	١٠٠	٣٦٠

(٢ ـ ٥) تمارين

١ ـ فيما يلي بيان بأعداد الطلاب البنين والبنات الملتحقين بجامعة الملك سعود (الرياض سابقا) خلال الفترة من العام الجامعي ١٣٩٠/١٣٩١هـ حتى العام الجامعي ١٣٩٦/١٣٩٧هـ (المصدر الكتاب الإحصائي للجامعة في عشرين عاما ـ إدارة الدراسات والتنظيم ـ جامعة الملك سعود / الرياض سابقا).

أعداد الطلاب الملتحقين بجامعة الملك سعود

العام الدراسي	٩٠/ ٩١	٩١/ ٩٢	٩٢/ ٩٣	٩٣/ ٩٤	٩٤/ ٩٥	٩٥/ ٩٦	٩٦/ ٩٧
عدد الطلاب	٣٦٠٧	٣٧٨٢	٤٣٦٩	٤٧٦٩	٥٧٤٥	٧٨٥٠	٨١٣٩

مثِّل هذه البيانات باستخدام

ا ـ الخط البياني ب ـ الأعمدة البيانية جـ ـ الرسوم الدائرية

٢ ـ الجدول التالي يوضح أعداد الطلاب بكلية الآداب لجامعة الملك سعود (الرياض سابقا) من العام الجامعي ١٣٩٠ / ١٣٩١هـ حتى عام ١٣٩٦ / ١٣٩٧هـ حسب الجنس [المصدر ـ الكتاب الإحصائي للجامعة في عشرين عام ـ إدارة الدراسات والتنظيم ـ جامعة الملك سعود (الرياض سابقا)].

أعداد الطلاب الملتحقين بكلية الآداب حسب الجنس

العام الدراسي	٩٠/ ٩١	٩١/ ٩٢	٩٢/ ٩٣	٩٣/ ٩٤	٩٤/ ٩٥	٩٥/ ٩٦	٩٦/ ٩٧
بنين	٨٩٦	٧٥٥	٦٢١	٧٢٩	٧٥٠	٩٧٢	٨٩١
بنات	٢٢٢	٢١٦	٢٠٤	٤٠٢	٦٢٣	٨٥١	٩٦٠

مثل هذه البيانات باستخدام

أ ـ الخطوط البيانية ب ـ الأعمدة البيانية المزدوجة (المتلاصقة)

جـ ـ الأعمدة البيانية المجزأة.

٣ ـ الجدول التالي يمثل خريجي كليات جامعة الملك سعود (الرياض سابقا) حسب الجنسية للعام الدراسي ١٣٩٦ / ١٣٩٧هـ.

توزيع الخريجين من جامعة الملك سعود عام ١٣٩٦/ ١٣٩٧هـ حسب الكلية والجنسية

الكليـة	الآداب		العلـوم		العلوم الإدارية		الصيدلـة	
	سعودي	غير سعودي	سعودي	غير سعودي	سعودي	غير سعودي	سعودي	غير سعودي
عددالطلاب	١٣٤	٤٤	٤٨	٨	١٢٧	١٦	٣٦	٨

الكليـة	الزراعـة		الهندسـة		التربيـة		الطـب	
	سعودي	غير سعودي	سعودي	غير سعودي	سعودي	غير سعودي	سعودي	غير سعودي
عددالطلاب	٨٣	٩	٢٦	٢٢	٢٥١	١٠	٢٣	-

مثّل هذه البيانات بطريقتين مختلفتين.

٤ ـ عند دراسة الحالة الاجتماعية لعينة تتكون من ٤٠ شخصا من الموظفين في إحدى المؤسسات كانت لدينا النتائج كالتالي:

أعزب ـ أعزب ـ متزوج ـ أعزب ـ أعزب ـ أعزب ـ متزوج ـ متزوج ـ أرمل ـ مطلق ـ أعزب ـ متزوج ـ مطلق ـ متزوج ـ متزوج ـ أعزب ـ متزوج ـ متزوج ـ أعزب ـ مطلق ـ متزوج ـ متزوج ـ أرمل ـ متزوج ـ أعزب ـ متزوج ـ متزوج ـ أعزب ـ أعزب ـ متزوج ـ متزوج ـ أعزب ـ مطلق ـ متزوج ـ أرمل ـ متزوج ـ أعزب ـ متزوج ـ مطلق ـ أعزب.

ا ـ أوجد التوزيع التكراري للحالة الاجتماعية للعمال.

ب ـ مثل هذه البيانات بيانيا بطريقة مناسبة.

٥ ـ اوجد الحدود الحقيقية، وطول الفئة، ومركز الفئة لكل من الفئات التالية:

(٥ ـ ٧)، (١٩ ـ ٢٥)، (صفر ـ ٢)، (٣,٧ ـ ٤,٩)، (١,٧٥ ـ ١,٩٣) و(٢,٢٧٥ ـ ٣,٣٧١).

٦ - فيما يلي درجات ٤٠ طالبا من طلبة مقرر ١٢٢ «أحص» للإحصاء التطبيقي لعام ١٤٠١/١٤٠٢هـ.

٤٠	٨٣	٨٦	٧٩	٦٣	٧٠	٨٤	٩٢	٤٦	٦٨
٧٠	٨٧	٨٢	٩٨	٧٧	٧٤	٧٧	٧٧	٥٢	٩٤
٦٧	٧٨	٨٧	٩٢	٨٨	٦٦	٧٦	٧٧	٨١	٧٦
٦٠	٧٨	٨١	٨١	٧٥	٦١	٧٠	٨١	٨٢	٧٩

اوجد جدول توزيع درجات الطلاب باستخدام أطوال الفئات التالية:

أ - طول فئة يساوي خمسة　　　ب - طول فئة يساوي ٣

جـ - طول الفئة يساوي ١٠　　　د - طول فئة يساوي ٢٠

٧ - من البيانات في تمرين (٦) اوجد باستخدام طول الفئة ١٠ مايلي:

ا - الجدول التكراري ومنه ارسم المدرج التكراري والمضلع التكراري.

ب - الجدول المتجمع الصاعد ومنه ارسم المنحنى المتجمع الصاعد.

جـ - الجدول المتجمع الهابط ومنه ارسم المنحنى المتجمع الهابط.

د - المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع الهابط معا.

٨ - اوجد ا، ب، جـ في تمرين (٧) باستخدام التكرار النسبي والمئوي.

٩ - سجلت أطوال ٤٠ ورقة من أوراق نبات الغار إلى أقرب ملليمتر:

١٤٩	١٤٤	١٥٠	١٣٨	١٥٢	١٣٦	١٤٠	١٤٦
١٥٤	١٦٣	١٣٨	١٦٨	١٤٠	١٣٥	١٤٢	١٤٦
١٤٥	١٥٠	١٣٥	١٦١	١٥٧	١٢٥	١٣٢	١٦٤
١٤٤	١٤٨	١٤٧	١٥٨	١٦٥	١١٩	١٧٦	١٢٦
١٣٥	١٥٣	١٤٧	١٧٣	١٢٩	١٥٦	١٤٢	١٤٥

ا - كون توزيعا تكراريا مناسبا.

ب - ارسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري لهذا التوزيع.

١٠- فيما يلي درجات أعمال السنة لمجموعة من الطلاب.

١٥	٢	٢	٩	١	١٨	٤	٦	١١	٢

٧	٣	٥	٣	٣	١٧	١١	١٢	١٦	٨
٧	٥	٩	٤	١٦	١٦	١٦	٥	٩	١١
١٨	٢٢	٥	٥	١٥	١٥	٤	٤	١٠	٤
١	١٣	٦	٢	٧	٧	٨	٩	١٠	٥

اوجـــد:

ا - جدول توزيع تكراري لدرجات الطلاب.

ب - الجدول المتجمع الصاعد النسبي ومنه ارسم المنحنى المتجمع الصاعد النسبي.

١١- في دراسة عن معامل الذكاء في عينة مكونة من ٥٦ شخصا في أحد المجتمعات كانت النتائج كما يلي:

١١٠	١٠٨	١١٢	١٠٧	١٠٧	١٠٥	١٠١	١٢٥
٢٠٩	١٢٦	١٠٨	٩٥	١١٩	١٠٧	٩٩	٩٦
١١٤	١١٧	١١٦	٩٣	٩٧	١٠٤	١٠٩	٨٢
١٠٠	١٠٥	١٠٣	٩٢	١١٢	١١٠	١٢٠	٩٠
٨٦	١١٥	١٠٦	٩٧	١١٦	١٠٦	١١٨	١٢٠
٨٥	١٢٣	١١٦	١١٩	١٢٤	١٠٩	١٠٢	٨٣
١٠٢	١١٣	٩٧	١١٢	١١٨	١٠٣	٨٩	٨٤

أ - ضع هذه البيانات على شكل توزيع تكراري بعشر فئات.

ب - اوجد التوزيعات التكرارية النسبية والمئوية والمتجمعة الصاعدة.

جـ - ارسم المدرج التكراري والمضلع التكراري لهذا التوزيع.

د - ارسم المنحنى التكـراري النسبي والمنحنى التكـراري المتجمع الصاعد النسبي.

١٢- البيانات التالية تمثل الوسيلة التي وصل بها ٤٢ وافدا إلى مدينة جدة:

سفينة	سفينة	طائرة	سيارة	سفينة	سيارة
سفينة	حافلة	سيارة	طائرة	حافلة	طائرة
سيارة	سفينة	طائرة	طائرة	حافلة	طائرة

طائرة	سيارة	طائرة	سيارة	سفينة	طائرة
طائرة	طائرة	طائرة	سفينة	طائرة	طائرة
طائرة	حافلة	طائرة	سفينة	سيارة	سيارة
سفينة	حافلة	سفينة	طائرة	سفينة	سيارة

ا - ضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

ب - مثل البيانات بطريقة الأعمدة البيانية.

جـ - اوجد التوزيع التكراري النسبي والمئوي لهذه البيانات.

د - مثل التوزيع التكراري السابق (فقرة ا) بطريقة الرسوم الدائرية.

١٣- أخذت عينة من مزرعة دواجن، وكانت أوزان الدجاج مقربة لأقرب مئة جرام كما يلي:

١٢٠٠، ١٠٠٠، ٨٠٠، ١٣٠٠، ١٤٠٠، ٨٠٠، ٦٠٠، ١٠٠٠،
١٠٠٠، ٦٠٠، ١٢٠٠، ١٢٠٠، ١٢٠٠، ٨٠٠، ١٥٠٠، ٩٠٠،
٧٠٠، ١٢٠٠، ١١٠٠، ١٤٠٠، ١١٠٠، ٩٠٠، ١١٠٠، ١٥٠٠،
١٠٠٠، ٩٠٠، ١١٠٠، ٨٠٠، ١٠٠٠، ٩٠٠، ١٠٠٠، ١٣٠٠،
١٥٠٠، ١١٠٠، ١٣٠٠، ١٤٠٠، ٦٠٠، ١٢٠٠، ١٢٠٠

ا - اوجد الجدول التكراري لهذه الأوزان بحيث تكون الفئات كالتالي:

(٦٠٠ - ٧٠٠)، (٨٠٠ - ٩٠٠)، (١٠٠٠ - ١١٠٠)،
(١٢٠٠ - ١٣٠٠) و (١٤٠٠ - ١٥٠٠).

ب - اوجد الجدول المتجمع الصاعد، ورسم المنحنى المتجمع الصاعد.

جـ - احسب التكرار النسبي والتكرار المئوي.

١٤- الأعـداد التالية تمثل مراكز الفئات للتوزيع التكراري للعمليات الجراحية التي تجري يوميا بمستشفى ما:

٤٣، ٢٩، ٢٤، ١٩، ١٤، ٩، ٤

ا - اوجد حدود الفئات لهذه المراكز.

ب - أوجد طول الفئة لهذا التوزيع.

الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)

(٣ ـ ١) مقدمــــة

سبق أن استعـرضنـا طرق تنـظيم البيانات الإحصائية وتلخيصها في جداول تكرارية، وقمنا بتمثيل هذه الجداول التكرارية بيانيا. ومع أن الطرق كانت مفيدة جدا في توضيح شكل التوزيعات التكرارية للبيانات الإحصائية وطبيعتها بصفة عامة، إلا أنـه لا يمكن استخـدامهـا لتـزويدنا بمقاييس عددية محددة، للمقارنة بين أشكال التـوزيعـات المختلفـة. وقـد دعت الحاجة إلى مثل هذه المقاييس لدراسة ما يسمى مقاييس النزعة المركزية (أو المتوسطات). وهذه المقاييس عبارة عن قيم مثلى تقترب منها معـظم البيانات الإحصائية، أو تتركز حولها، أو تتوزع بالقرب منها. ولحساب هذه القيم أو المقاييس التي تعبر عن مختلف البيانات، وتساعد على المقارنة بين مدى نزعتها نحو مراكز معينة. سنتعرض بشيء من التفصيل إلى أهم هذه المقاييس، وهي الوسط الحسابي (المتوسط)، والوسيط، والمنوال، والوسط الهندسي، والوسط التوافقي بالإضافة إلى بعض مقاييس النزعة المركزية الأقل شيوعا مثل العشير والمئين. وسوف نتناول في هذا الفصـل كل مقياس على حدة موضحين طريقة حسابه وأهم مميزاته وعيوبه مع التمثيل لبعض استخداماته.

(٣ ـ ٢) الوسط الحسابي (المتوسط)

يعتبر الوسط الحسابي من أهم وأبسط مقاييس النزعة المركزية، لأنه يدخل في كثير من عمليات التحليل الإحصائي، مثل المقارنة بين المجموعات المختلفة وغيرها.

ويمكن تعريف الوسط الحسابي بأنه القيمة التي لو أعطيت لجميع المفردات لكان مجموعها يساوي مجموع القيم الأصلية للمفردات ويمكن حساب الوسط الحسابي بطريقتين تبعا لطبيعة البيانات المدروسة، وذلك في الحالتين التاليتين:

أ) البيانات غير المبوبة ب) البيانات المبوبة

(٣ ـ ٢ ـ ١) الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة

يعرف الوسط الحسابي في حالة البيانات غير المبوبة بأنه مجموع «مجـ» للمشاهدات مقسوما على عددها «ن» أي أنه إذا كان لدينا المشاهدات أو القراءات

$$س_١ ، س_٢ ، \dots\dots\dots ، س_ن$$

فإن الوسط الحسابي الذي سوف يرمز له بالرمز $\bar{س}$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \dots + س_ن}{ن} = \frac{مجـ\ س}{ن} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (١)$$

مثال (١)

عند دراسة الأجور اليومية لمجموعتين من العمال غير المؤهلين في مؤسستين كان الأجر اليومي بالريال السعودي كالآتي:

أجور عمال المؤسسة الأولى س:

٣٠، ٤٠، ٤٥، ٤٠، ٣٥، ٣٠، ٣٠، ٤٠

أجور عمال المؤسسة الثانية ص:

١٥، ٣٠، ٢٥، ٤٠، ٣٠، ٤٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لأجور العمال لكل مؤسسة.

لإيجاد الوسط الحسابي فإننا نستخدم العلاقة (١) السابقة لنجد أن:

$$\bar{س} = \frac{٣٠ + ٤٠ + ٤٥ + ٤٠ + ٣٥ + ٣٠ + ٣٠ + ٤٠}{٨}$$

$$= \frac{٢٩٠}{٨} = ٣٦,٢٥ \text{ ريالا}$$

$$\bar{ص} = \frac{١٥ + ٣٠ + ٢٥ + ٤٠ + ٣٠ + ٤٠}{٦}$$

$$= \frac{١٨٠}{٦} = ٣٠ \text{ ريالا}$$

نلاحظ أنه عند إضافة مقدار ثابت أو طرحه أ مثلا إلى كل قراءة من البيانات المعطاة، فإن قيمة الوسط الحسابي للقراءات الجديدة يكون أكبر أو أصغر من الوسط الحسابي للقراءات الأصلية، بمقدار هذا الثابت على التوالي. وعادة ما يسمى هذا المقدار الثابت الوسط الفرضي، ويمكن توضيح ذلك رياضيا كما يلي:

نفرض أن القراءات الأصلية هي:

$س_١، س_٢، .... س_ن$

وبإضافة أو طرح وسط فرضي ا من هذه القيم تكون القيمة الجديدة للقراءات هي:

$ح_١، ح_٢، ....، ح_ن$

حيث

$ح_١ = س_١ \pm ا$ ، $ح_٢ = س_٢ \pm ا$ ، .....، $ح_ن = س_ن \pm ا$

فيكون

$\bar{س} = \bar{ح} \pm ا$ .... (٢)

مثال (٢)

احسب متوسط أجور العمال للمؤسسة الأولى مثال (١) باستخدام وسط فرضي ا = ٣٠. بطرح ا = ٣٠ من جميع القيم الأصلية فتكون القيم الجديدة لأجور العمال في المؤسسة الأولى كالتالي:

٠، ١٠، ١٥، ١٠، ٥، ٠، ٠، ١٠

$$\bar{ح} = \frac{٠ + ١٠ + ١٥ + ١٠ + ٥ + ٠ + ٠ + ١٠}{٨}$$

= ٦,٢٥ ريالا

وبذلك يكون

$\bar{س} = \bar{ح} + ا = ٦,٢٥ + ٣٠ = ٣٦,٢٥$ ريـــالا

وهي نفس النتيجة السابقة في مثال (١)

(٣ ـ ٢ ـ ٢) الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

إذا كان لدينا جدول يمثل توزيعا تكراريا لبيانات ما بحيث إن مراكز فئاته هي :

$س_١ ، س_٢ ، . . . . ، س_م$

والتكرارات المناظرة لهذه الفئات هي :

$ك_١ ، ك_٢ ، . . . . ، ك_م$

(حيث إن م عدد الفئات) فإننا في هذه الحالة يعرَّف الوسط الحسابي $\bar{س}$ على إنه مجموع حاصل ضرب مراكز كل فئة في التكرار المناظر لها مقسوما على مجموع تكرار الفئات. ويمكن أن نعبر عن ذلك رياضيا بالصيغة التالية :

$$\bar{س} = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + ... + ك_م س_م}{ك_١ + ك_٢ + ... + ك_م}$$

$$= \frac{مجـ ك س}{مجـ ك}$$

$$= \frac{مجـ ك س}{ن}$$

حيث ن = مجـ ك

= مجموع التكرارات

مثـال (٣)

احسب الوسط الحسابي للأجر اليومي لمجموعة من العمال المعطاة في مثال (٢) في الفصل الثاني السابق والذي تكون بياناته كما يلي :

جدول التوزيع التكراري للأجر اليومي لمجموعة من العمال

فئات الأجور	٢٥ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٤	٣٥ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٤	٤٥ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٤
التكرار (عدد العمال)	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

ولتبسيط عملية الحساب يمكن عمل جدول على الصورة التالية:

فئات الأجور	مراكز الفئات (س)	التكرار (ك)	ك س
٢٥ ـ ٢٩	٢٧	٥	١٣٥
٣٠ ـ ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦
٣٥ ـ ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠
٤٠ ـ ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦
٤٥ ـ ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦
٥٠ ـ ٥٤	٥٢	٦	٣١٢
المجمـوع	ـ	٥٠	١٩٩٥

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{١٩٩٥}{٥٠} = ٣٩,٩ \text{ ريـال}$$

ويمكن حل المثال السابق بطريقة أخرى، وذلك باستخدام الوسط الفرضي، وليكن ا، وعـادة ما يختـار قيمة الثابت ا مساويا لمركز الفئة التي يقابلها أكبر تكرار. ويكون في هذا المثال ا = **٤٢** حيث أكبر تكرار ك = **١٣** وبذلك يصبح جدول تبسيط الحسابات كما يلي:

فئات الأجور	س	ك	ح = س - ٤٢	ك ح
٢٥ـ ٢٩	٢٧	٥	- ١٥	- ٧٥
٣٠ـ ٣٤	٣٢	٨	- ١٠	- ٨٠
٣٥ـ ٣٩	٣٧	١٠	- ٥	- ٥٠
٤٠ـ ٤٤	٤٢	١٣	٠	٠
٤٥ـ ٤٩	٤٧	٨	٥	٤٠
٥٠ـ ٥٤	٥٢	٦	١٠	٦٠
المجمــوع	—	٥٠	—	- ١٠٥

$$\bar{ح} = \frac{مجـ ك ح}{مجـ ك}$$

$$= \frac{-١٠٥}{٥٠} = -٢,١$$

وحيث إن $\bar{س} = \bar{ح} + أ$

$\therefore \bar{س} = -٢,١ + ٤٢ = ٣٩,٩$ ريال

نلاحظ أن قيمة الوسط الحسابي $\bar{س}$ باستخدام الطريقة المباشرة هو نفسه قيمة الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي.

والملاحظ كذلك أنه إذا قسمنا جميع الانحرافات (ح) على مقدار ثابت فإن الوسط الحسابي للانحرافات ($\bar{ح}$) هو نفسه الوسط الحسابي للقيم الجديدة مضروبا في هذا المقدار الثابت. وعادة ما يكون هذا المقدار الثابت عبارة عن طول الفئة «ل» وذلك في حالة الفئات المنتظمة.

الآن يمكن حل المثال السابق، وذلك باستخدام الوسط الفرضي ا وبالقسمة على طول الفئة ل. تسمى مثل هذه الطريقة أحيانا بالطريقة المختصرة، ويكون حل المثال السابق كما يلي:

فئات الأجور	س	ك	ح = س - ٤٢	$\bar{\text{ح}} = \frac{\text{ح}}{٥}$	ك ح̄
٢٥ ـ ٢٩	٢٧	٥	-١٥	-٣	-١٥
٣٠ ـ ٣٤	٣٢	٨	-١٠	-٢	-١٦
٣٥ ـ ٣٩	٣٧	١٠	-٥	-١	-١٠
٤٠ ـ ٤٤	٤٢	١٣	٠	٠	٠
٤٥ ـ ٤٩	٤٧	٨	٥	١	٨
٥٠ ـ ٥٤	٥٢	٦	١٠	٢	١٢
المجموع	—	٥٠	—	—	-٢١

$$\bar{\bar{\text{ح}}} = \frac{\text{مجـ ك ح̄}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{-٢١}{٥٠} = -٠,٤٢$$

$$\because \bar{\text{س}} = \text{ل}\,\bar{\bar{\text{ح}}} + \text{ا}$$

$$\bar{\text{س}} = ٥\,(-٠,٤٢) + ٤٢$$

$$= -٢,١ + ٤٢$$

$$= ٣٩,٩$$

والوسط الحسابي الناتج باستخدام الطريقة المختصرة هو نفسه الوسط الحسابي المعتاد

(٣ ـ ٢ ـ ٣) مميزات الوسط الحسابي

١ ـ يأخذ جميع القيم في الاعتبار.

٢ ـ يستخدم في معظم التحليلات الإحصائية لسهولة التعامل معه .
٣ ـ لا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات .

(٣ ـ ٢ ـ ٤) عيوب الوسط الحسابي

١ ـ يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة) للبيانات .
٢ ـ يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة .
٣ ـ لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية .
٤ ـ لا يساوي في الغالب أيًّا من القيم الداخلة في حسابه ، فقد يحتوي على جزء كسري لبيانات مكونة من أعداد صحيحة ، وذلك في حالة البيانات المنفصلة ، مثل عدد المواليد في مجتمع ما وعدد السفن في ميناء ما . . . الخ .

(٣ ـ ٢ ـ ٥) الوسط الحسابي المرجح

عند حساب قيمة الوسط الحسابي أعطينا جميع القراءات نفس الأهمية ، ونفس الوزن ، وإن كان من الصعب تبرير ذلك في بعض تطبيقات الحياة العملية . وذلك لأن بعض القيم لها أهمية أكبر من الأخرى ، فمثلا عند ، إيجاد متوسط درجات طالب في المواد المختلفة له فليس من المعقول مساواة درجة مادة تدرس في ساعتين بمادة تدرس في أربع ساعات كل أسبوع أو ثلاث ساعات لذلك كان لا بد من إعطاء أوزان لدرجات المواد المختلفة حسب الساعات الأسبوعية . ويسمى حساب الوسط الحسابي في هذه الحالة بالوسط الحسابي المرجح ، ويرمز له بالرمز $\bar{س}_م$. ويعرف بأنه مجموع حاصل ضرب القراءات في الأوزان المناظرة لها مقسوما على مجموع أوزان القراءات . ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا بالصيغة التالية :

إذا كان لدينا مجموعة القراءات

$$س_1 ، س_2 ، . . . . ، س_ن$$

ولتكن الأوزان المناظرة لها هي :

$$و_1 ، و_2 ، . . . . ، و_ن$$

فإن الوسط الحسابي المرجح يعطى بالعلاقة

$$\bar{س}_{م} = \frac{و_١ س_١ + و_٢ س_٢ + \ldots + و_ن س_ن}{و_١ + و_٢ + \ldots\ldots + و_ن}$$

$$= \frac{مجـ و س}{مجـ و}$$

مثال (٤)

إذا كانت درجات أحد الطلاب في أربع مواد هي

٤٠ ، ٧٠ ، ٦٦ ، ٨٥

وكانت الساعات الدراسية الأسبوعية لهذه المواد بالترتيب هي كالتالي :

٣ ، ٢ ، ٤ ، ٣

والمطلوب إيجاد قيمة الوسط المرجح لدرجات هذا الطالب .

$$\because \bar{س}_{م} = \frac{مجـ و س}{مجـ و}$$

$$\therefore \bar{س}_{م} = \frac{٤٠ \times ٣ + ٧٠ \times ٢ + ٦٦ \times ٤ + ٨٥ \times ٣}{٣ + ٢ + ٤ + ٣}$$

$$= \frac{٧٧٩}{١٢} = ٦٤,٩٢ \text{ درجة}$$

مثال (٥)

إذا كانت تقديرات أحد طلاب جامعة الملك سعود في أحد الفصول الدراسية هي :

أ ، د ، جـ ، هـ ، ب

وكانت الساعات الدراسي المعتمدة لهذه المواد على الترتيب هي :

٢ ، ٤ ، ٣ ، ٣ ، ٢

والمطلوب إيجاد المعدل الفصلي لهذا الطالب .

الحـــل

من المعروف أن حساب الساعات المعتمدة في جامعة الملك سعود يأخذ نظام النقاط التالي: ا = ٥، ب = ٤، جـ = ٣، د = ٢، هـ = ١

فيكون المعدل الفصلي

$$\bar{س}_م = \frac{٥ \times ٢ + ٢ \times ٤ + ٣ \times ٣ + ١ \times ٣ + ٤ \times ٢}{٢ + ٤ + ٣ + ٣ + ٢}$$

$$= \frac{٣٨}{١٤} = ٢,٧١$$

(٣ - ٣) الوسيـــط

يعرف الوسيط للبيانات الإحصائية بأنه القيمة العددية التي تقسم تلك البيانات إلى مجموعتين متساويتين بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا، وسوف نتناول طريقة حساب الوسيط في كل من الحالتين:

أ) البيانات غير المبوبة ب) البيانات المبوبة

(٣ - ٣ - ١) الوسيط للبيانات غير المبوبة

لإيجاد القيمة العددية للوسيط نفرض أن عدد البيانات أو القراءات يساوي ن، ولحساب قيمة الوسيط لا بد من التمييز بين حالتين، وهما عندما تكون «ن» عددًا صحيحًا فرديًا، أو عندما تكون ن عددًا صحيحًا زوجيًا

أولا: في حالة كون «ن» عددًا فرديًا

نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا مثلا، ويكون قيمة الوسيط فيه القراءة التي رتبتها $\frac{ن + ١}{٢}$

مثال (٦)

إذا كان الإنفاق الأسبوعي لعينة من الأسر عددها ٩ بمئات الريالات كما يلي

١ ، ٤ ، ٢ ، ٧ ، ٣ ، ١٠ ، ١٣ ، ٨ ، ٤

ونود إيجاد الوسيط لهذه القراءات.

لإيجاد الوسيط نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا ونحصل على:

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، [٤] ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ١٣

نلاحظ أن عدد القراءات (ن) = ٩ أسر أي «فردي»

أي أن رتبة الوسط = $\frac{ن + ١}{٢}$ = $\frac{٩ + ١}{٢}$ = ٥

ومن ذلك نجد أن قيمة الوسيط هي القراءة رقم ٥، وتساوي ٤ أي أن وسيط الإنفاق الأسبوعي للأسر = ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ ريالا.

ثانيا: في حالة كون «ن» عددًا زوجيًا:

نقوم بترتيب البيانات تصاعديا كما في الحالة السابقة. فيكون الوسيط بعد ذلك عبارة عن متوسط القراءتين اللتين رتبتاهما

$\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١

مثال (٧)

إذا كان إنتاج مجموعة من العمال في أحد المصانع بالقطعة يوميا هو:

٢٠ ، ٢٥ ، ٢١ ، ٢٩ ، ٣٥ ، ٢١ ، ٤٠

والمطلوب إيجاد الوسيط للإنتاج اليومي.

نرتب البيانات تصاعديا كالتالي:

٢٠ ، ٢١ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠

ن (عدد القراءات) = ٨ عمال

ويلاحظ أن عدد القراءات ن عدد زوجي وبذلك نحسب الرتبتين

$$\frac{ن}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

$$\frac{ن}{٢} + ١ = ٤ + ١$$

$$= ٥$$

وبالتالي فإن قيمة الوسيط هي متوسط القراءتين الرابعة والخامسة أي أن

$$\text{الوسيط} = \frac{٢٥ + ٢٩}{٢}$$

$$= \frac{٥٤}{٢}$$

$$= ٢٧ \text{ قطعة}$$

(٣ - ٣ - ٢) الوسيط في حالة البيانات المبوبة

أما في حالة البيانات المبوبة فيمكن إيجاد الوسيط بطريقة الحساب أو بالطريقة البيانية، وسوف نتناول كل طريقة على حدة.

أولاً: الطريقة الحسابية لإيجاد الوسيط

لحساب الوسيط بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

١ - نكوّن الجدول المتجمع الصاعد وذلك باستخدام الحدود الحقيقية للفئات.

٢ - نوجد رتبة الوسيط وهي $\frac{ن}{٢}$ سواء كانت ن فردية أم زوجية حيث إن «ن» في هذه الحالة هي عبارة عن مجموع القراءات.

٣ - نحدد مكان الوسيط بعد معرفة مكان $\frac{ن}{٢}$ بين التكرارات المتجمعة في الجدول، ونضع خطًا أفقيًا مثل (←) يمر هذا الخط داخل الفئة الوسيطية. وتكون بذلك بداية الفئة «ا» فوق الخط أما نهاية الفئة الوسيطية فستكون تحت الخط مباشرة. أما بالنسبة للتكرارات فنرمز للتكرار المتجمع السابق للفئة الوسيطية أي فوق الخط بالرمز «$ك_١$» ونرمز للتكرار المتجمع اللاحق للفئة الوسيطية أي تحت الخط بالرمز «$ك_٢$». بعد ذلك يمكن إيجاد طول الفئة الوسيطية وليكن «ل».

٤ ـ يمكن حساب قيمة الوسيط بإجراء تناسب بين الأبعاد والتكرارات كما يلي :

$$\frac{\text{الوسيط} - ا}{ل} = \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{١}}{ك_{٢} - ك_{١}}$$

ومن ذلك نحصل على

$$\text{الوسيط} = ا + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{١}}{ك_{٢} - ك_{١}} \,.\, ل$$

مثال (٨)

احسب الوسيط لأجور العمال في مثال (٣)

لإيجاد ذلك نكوّن أولا الجدول المتجمع الصاعد للبيانات كما يلي :

$$ن = ٥ + ٨ + ١٠ + ١٣ + ٨ + ٦ = ٥٠$$

$$\frac{ن}{٢} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$$

أي أن تكرار الوسيط يساوي ٢٥ ، ويقع بين التكرارين المتجمعين الصاعدين ٢٣ ، ٣٦ ونضع خطا أفقيا كما هو موضح بالجدول ، وعليه يكون

$ا = ٣٩,٥$

$ك_{١} = ٢٣$

$ك_{٢} = ٣٦$

$ل = ٤٤,٥ - ٣٩,٥ = ٥$

الجدول المتجمع الصاعد لأجور العمال

حـــدود الفئـــات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤,٥	٠
أقل من ٢٩,٥	٥
أقل من ٣٤,٥	١٣
أقل من ٣٩,٥ ا	٢٣ ك١
أقل من ٤٤,٥	٣٦ ك٢
أقل من ٤٩,٥	٤٤
أقل من ٥٤,٥	٥٠

ومن القانون السابق

$$\text{الوسيط} = ا + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{١}}{ك_{٢} - ك_{١}} \, ل$$

$$= ٣٩,٥ + \frac{٢٥ - ٢٣}{٣٦ - ٢٣} \times ٥$$

$$= ٣٩,٥ + \frac{١٠}{١٣}$$

$$= ٣٩,٥ + ٠,٧٧$$

$$= ٤٠,٢٧ \text{ ريالا}$$

ثانيا: الطريقة البيانية لإيجاد الوسيط

يمكن إيجاد الوسيط بيانيا برسم المنحنى المتجمع الصاعد، أو برسم المنحنى المتجمع الهابط (النازل)، أو برسمهما معا في رسم واحد، ويمكن تحديد قيمة الوسيط في كل حالة من الحالات الثلاث كما يلي:

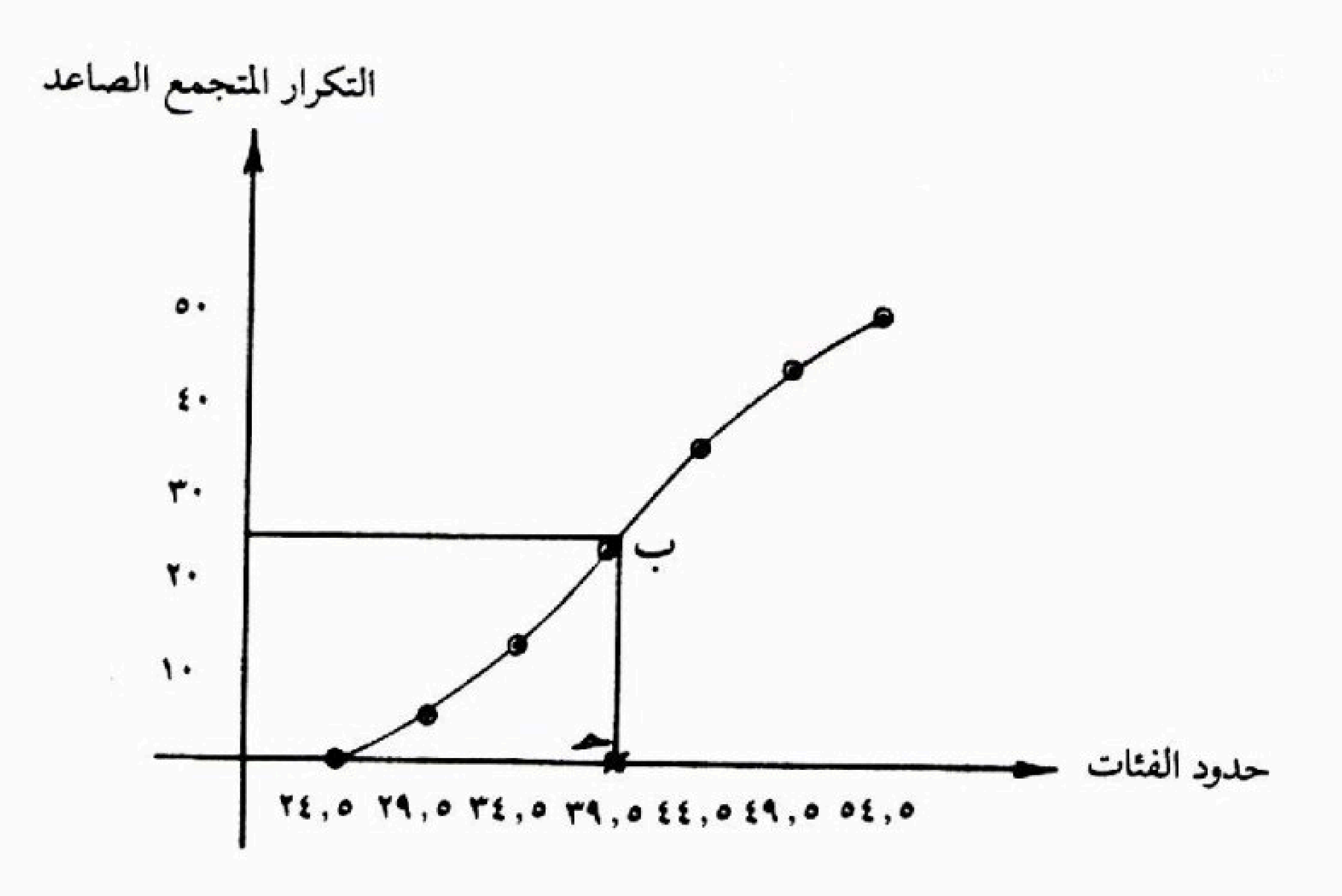
١) **الوسيط من المنحنى المتجمع الصاعد**: نرسم المنحنى المتجمع الصاعد من الجـدول المتجمع الصاعد كما سبق شرحه، ونحدد بعد ذلك مكان «$\frac{ن}{٢}$» على المحول الرأسي الذي يمثل التكرارات المتجمعة، ويقابل المنحنى المتجمع الصاعد في نقطة، ولتكن «ب» ثم نسقط من ب عمودا رأسيا يقابل محور الفئات في نقطة، ولتكن جـ. فتكون القيمة التي تقع عليها «جـ» على محور الفئات هي الوسيط التي تقسم البيانات إلى قسمين متساويين كما سنوضح في المثال التالي.

مثال (٩)

لنفرض أن المطلوب إيجاد الوسيط بيانيا للأجر اليومي للعمال المعطاة بياناته في مثال (٨)، وذلك باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد.

الحـــل

نرسم أولا المنحنى المتجمع الصاعد كما يلي:



شكل (٣ - ١): المنحنى المتجمع الصاعد لأجور العمال اليومية

نحدد قيمة $\frac{ن}{٢}$ وفي هذه الحالة

$$\frac{ن}{٢} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$$

ومن ثم نحدد النقطة **٢٥** على محور التكرار المتجمع الصاعد ونرسم منها خطًا مستقيمًا يوازي محور الفئات، ليلتقي بالمنحنى المتجمع الصاعد في نقطة ب مثلا. نسقط العمود كما أوضحنا سابقا من ب على محور الفئات، ومن الشكل السابق نجد أن:
قيمة الوسيط عند النقطة جـ = **٤٠** ريالا تقريبا.

٢) **الوسيط من المنحنى المتجمع الهابط**: نرسم المنحنى المتجمع الهابط من الجدول المتجمع الهابط كما سبق شرحه، ونتبع الخطوات السابقة نفسها في رسم المنحنى المتجمع الصاعد، وكذلك إيجاد قيمة الوسيط من الرسم، ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (١٠)

أوجد الوسيط بيانيا باستخدام المنحنى المتجمع الهابط من بيانات مثال (٨) التي تمثل الأجر اليومي للعمال.

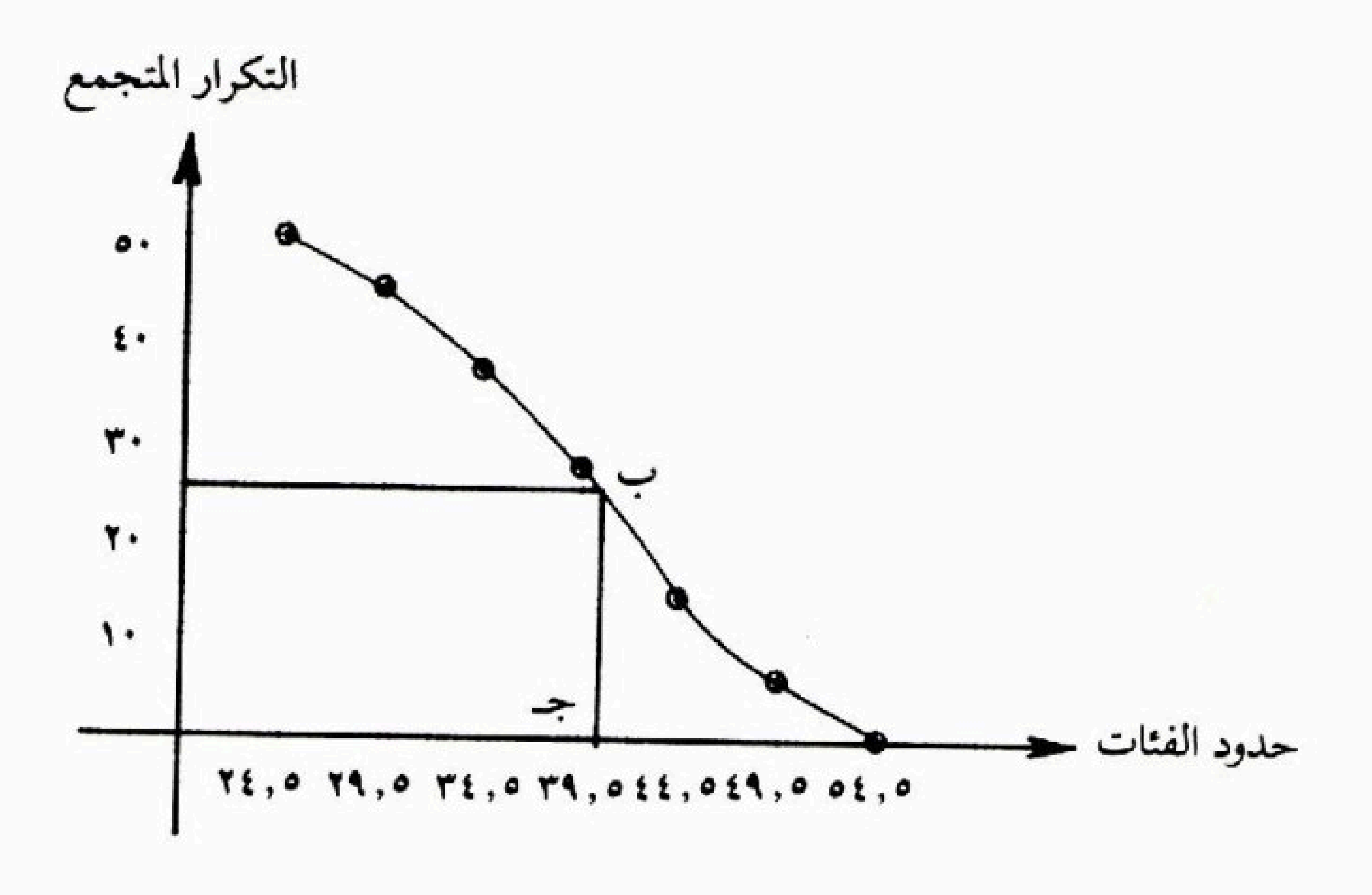
الحـــل

نكوّن أولا الجدول المتجمع الهابط كما يلي:

الجدول المتجمع الهابط لأجور العمال

حدود الفئات	التكرار المتجمع الهابط
٢٤,٥ فأكثر	٥٠
٢٩,٥ فأكثر	٤٥
٣٤,٥ فأكثر	٣٧
٣٩,٥ فأكثر	٢٧
٤٤,٥ فأكثر	١٤
٤٩,٥ فأكثر	٦
٥٤,٥ فأكثر	صفر

ثم نرسم المنحنى المتجمع الهابط كما يلي:



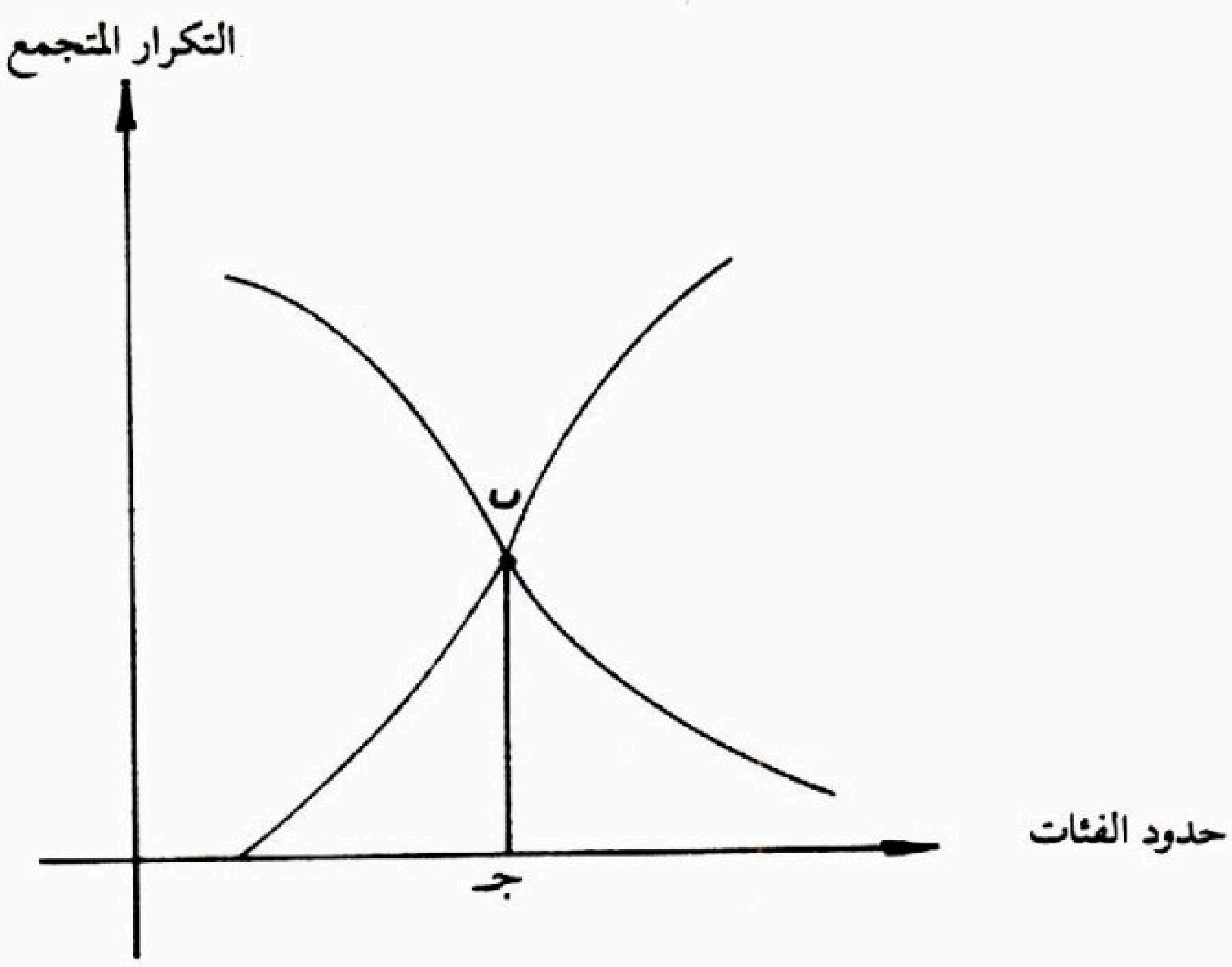
شكل (٣ ـ ٢): المنحنى المتجمع الهابط لأجور العمال

وبالمثل يمكن تحديد النقطة $\frac{ن}{٢}$ على محور التكرار المتجمع الهابط، وكذلك النقطة «ب» على المنحنى، ومن ذلك نجد أن النقطة «جـ» الواقعة على محور الفئات التي تساوي تقريبا قيمة الوسيط بالطريقة البيانية هي ٤٠ ريالا.

٣) **إيجاد الوسيط بيانيا باستخدام تقاطع المنحنى المتجمع الصاعد، والمتجمع الهابط معا:** نرسم أولا كلا من المنحنى المتجمع الصاعد، والمنحنى المتجمع الهابط على نفس المحورين، ومن نقطة تقاطع المنحنى ولتكن «ب» نسقط عمودًا رأسيًا على محور الفئات، فيلتقي معه في نقطة «جـ» التي تعطينا القيمة البيانية للوسيط، كما هو موضح بالشكل (٣ ـ ٣) التالي.

مثال (١١)

أوجد الوسيط بيانيا باستخدام كلٍّ من المنحنى المتجمع الصاعد، والمنحنى المتجمع الهابط لأجور العمال اليومية من بيانات مثال (٨). باستخدام جدولي التكرار



شكل (٣ ـ ٣): تقاطع المنحنين الصاعد والهابط

المتجمع الصاعد، والتكرار المتجمع الهابط كما في مثال (٩)، ومثال (١٠) نجد أن الشكل المناظر لهما على نفس المحورين هو شكل (٣ ـ ٤).

ومن ذلك نجد أن قيمة الوسيط من الرسم تساوي ٤٠ ريالا تقريبا.

(٣ ـ ٣ ـ ٣) مميزات الوسيط

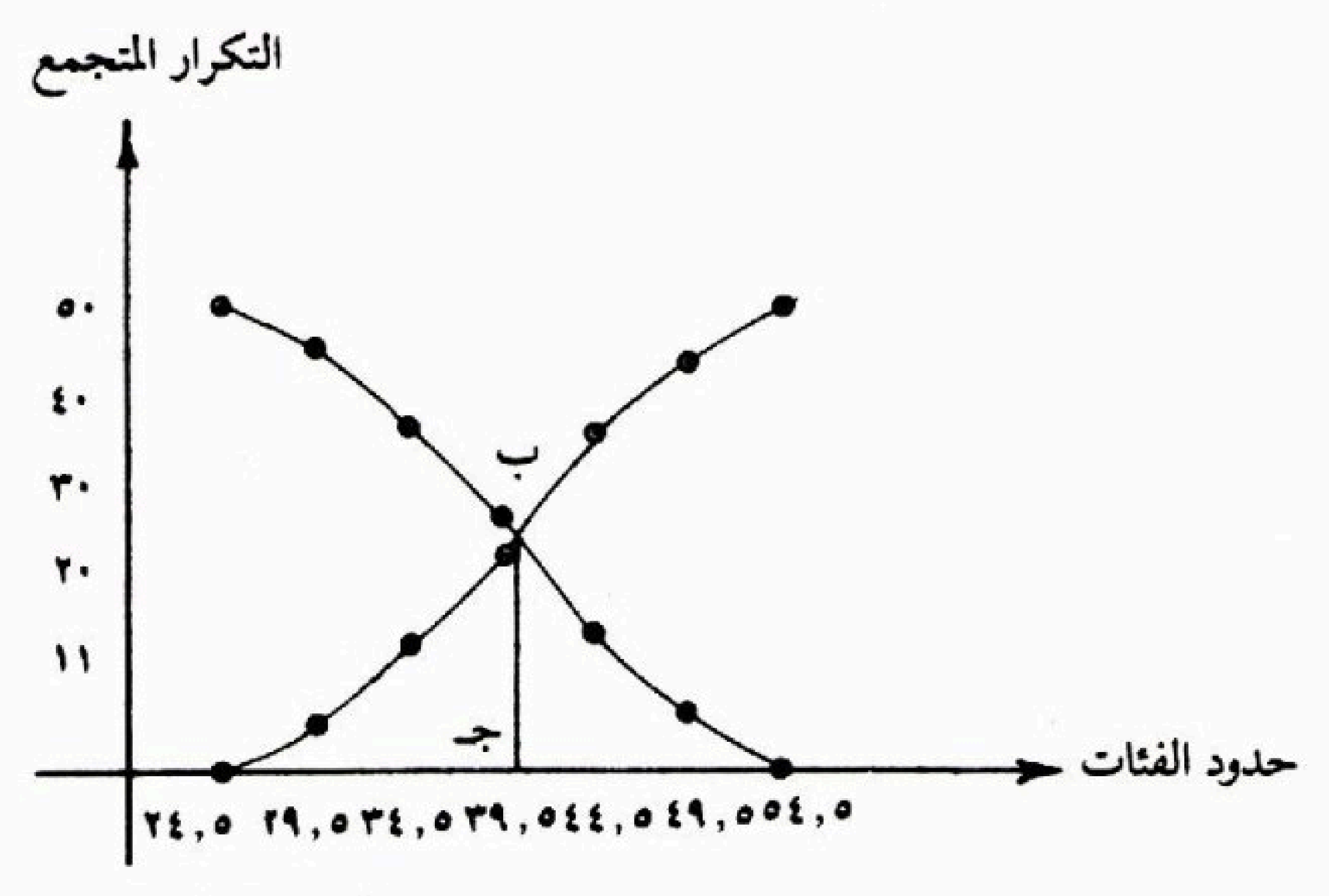
١ ـ لا يتـأثر بالقيم الشاذة، وذلك لأنه من المتوسطات الموضعية أي أنه يتأثر بمواضع القراءات.

٢ ـ يمكن إيجـاد الـوسيط في حالة البيانات الوصفية التي لها صفة الترتيب، والتوزيعات التكرارية المفتوحة للبيانات الكمية.

(٣ ـ ٣ ـ ٤) عيوب الوسيط

١ ـ لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.

٢ ـ لا يسهل التعامل معه في التحاليل الإحصائية.



شكل (٣ - ٤) : تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط لأجور العمال اليومية

ويمكن الإشارة إلى أن الوسيط أكبر من الوسط الحسابي في حالة البيانات الملتوية جهة اليسار وأقل من الوسط الحسابي في حالة البيانات الملتوية جهة اليمين ويساوي الوسط في حالة البيانات المتماثلة، ومن مميزات الوسيط كذلك أن مجموع الإنحرافات المطلقة عن الوسيط أقل ما يمكن مقارنة بأي نقطة أخرى كما سنرى فيما بعد.

(٣ - ٤) المنـــوال

يعرف المنوال بأنه القيمة التي يكون لها أكبر تكرار في عينة من البيانات الإحصائية. وإذا كانت لدينا عينة من البيانات ووجدنا فيها قراءة واحدة تتكرر أكثر من غيرها فإن هذه القراءة تكون المنوال، ويقال لهذه البيانات: إنها **وحيدة المنوال**. وإذا وجدنا في عينة من البيانات قراءتين لهما تكراران متساويان وأكبر من باقي التكرارات يقال لهذه البيانات: إنها **ثنائية المنوال**. وإذا كان لعينة من البيانات أكثر من قراءتين لهما نفس عدد التكرارات وأكبر من باقي التكرارات فإن هذه البيانات يقال لها: **متعددة المناويل**. أما إذا كان لا يوجد في البيانات قيمة تتكرر أكثر من غيرها فإنه يقال في هذه الحالة: إن البيانات **عديمة المنوال**، أو لا يوجد لها منوال.

وفي حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية) نجد أن القيم تذوب في داخل الفئات، ومن هنا فلا توجد قراءات أو قيم منوالية، ولكن يكون لدينا فئات منوالية.

وتعرَّف الفئة المنوالية في الجداول التكرارية بأنها الفئة التي يناظرها أكبر تكرار. وقد يكون لعينة من البيانات «ملخصة في توزيع تكراري» فئة منوالية واحدة أو أكثر من فئة منوالية أو لا يوجد لها أي فئة منوالية (يحدث ذلك في حالة تساوي التكرارات في جميع الفئات). ونحسب المنوال عادة في حالة الفئات المتساوية الطول أو المنتظمة، وفي حالة عدم انتظام أطوال الفئات فإنه يجب أولا أن نعدل التكرارات، لأنه ربما يكون أكبر تكرار قبل التعديل ليس بأكبر تكرار بعد التعديل. ونقوم بتعديل التكرارات كما سبق شرحه، وذلك بقسمة التكرار على طول الفئة المناظرة له. وسوف نوضح فيما يلي وباستخدام الأمثلة طرق حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة والبيانات المبوبة.

(٣ - ٤ - ١) المنوال في حالة البيانات غير المبوبة

مثال (١٢)

احسب المنوال لأعمار عينة من الطلاب في المرحلة الابتدائية وكانت كالتالي:

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ٨ ، ٦

نلاحظ في عينة القراءات السابقة أن القيمة ٦ تتكرر ٤ مرات، وأكثر من غيرها من القيم، وبذلك يكون المنوال كالتالي:

المنـوال = ٦ سنوات

مثال (١٣)

أوجد المنوال لأعمار عينة من الطلاب في المرحلة الابتدائية

وكانت: ٧ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ٨

نلاحظ في عينة القراءات السابقة أن القيمتين ٦ ، ٧ متساويتا التكرار حيث يتكرر كل منها ثلاث مرات، وأكثر من غيرهما، وعليه فإنه يوجد لهذه العينة من الأعمار منوالان هما ٦ ، ٧ سنوات.

مثال (١٤)

أوجد المنوال لعينة من الطلاب أعمارهم بالسنوات هي :

٥ ، ٦ ، ٩ ، ١٠ ، ١٤ ، ١١ ، ١٢

لا يوجد في هذه البيانات قراءة مكررة أكثر من غيرها، ولذلك فإنه لا يوجد لها منوال، أي أن العينة عديمة المنوال.

(٣ ـ ٤ ـ ٢) المنوال في حالة البيانات المبوبة

في هذه الحالة يمكن إيجاد المنوال حسابيا أو بيانيا، وسوف نتناول شرح كل طريقة على حده.

أ) المنوال حسابيا

توجد عدة طرق لحساب المنوال، وأبسطها أن يكون المنوال مركز الفئة المنوالية، وهي طريقة تقريبية. وتكون هذه الطريقة دقيقة إذا كان التكرار السابق للتكرار المنوالي مساويا للتكرار اللاحق للتكرار المنوالي ونعتبر إمكان حدوث ذلك من الناحية العملية قليلا جدا. ونذكر طريقة أخرى تعتبر من أفضل الطرق وهي ما تسمى طريقة بيرسون للفروق ويمكن تلخيصها كما يلي :

١ ـ نحدد الفئة المنوالية التي يناظرها أكبر تكرار، ونرمز لتكرارها بالرمز ك .

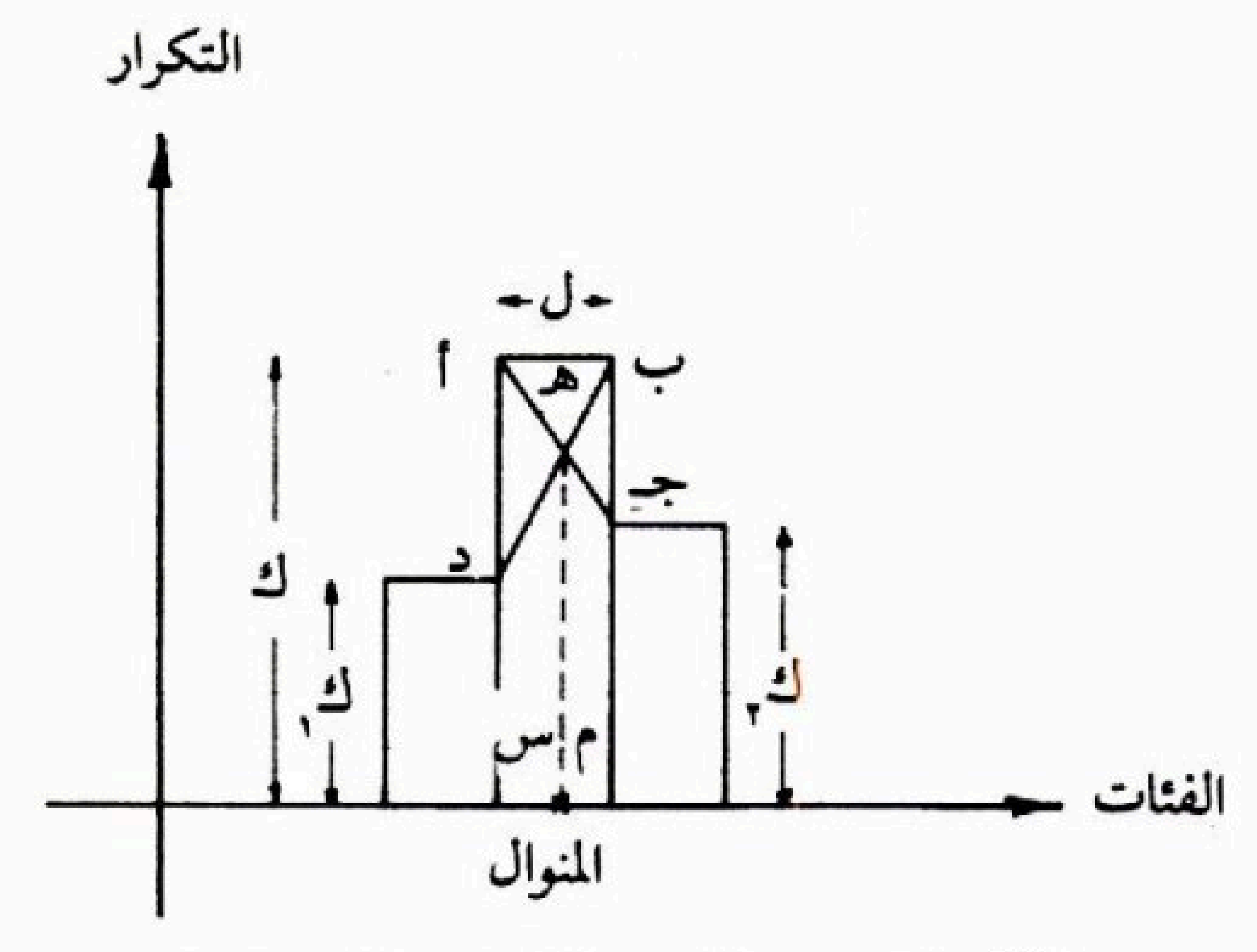
٢ ـ نوجد بداية الفئة المنوالية وليكن أ (باستخدام الحدود الحقيقية أو الفعلية للفئات).

٣ ـ نوجد التكرار السابق للتكرار المنوالي، وليكن $ك_{١}$ و التكرار اللاحق للتكرار المنوالي $ك_{٢}$، ونحسب طول الفئة المنوالية وليكن ل، ونطبق العلاقة التالية :

$$\text{المنوال} = أ + \frac{ك - ك_{١}}{٢ك - ك_{١} - ك_{٢}} \times ل$$

يمكن استنتاج علاقة حساب المنوال السابقة كما يلي :

١ ـ نرسم المدرج التكراري للفئة المنوالية واللفئتين السابقة واللاحقة لها كمايلي :



شكل (٣ ـ ٥): المدرج التكراري للفئة المنوالية

٢ ـ من تشابه المثلثين أ ب جـ، ر ب هـ نجد أن:

$$\frac{\text{ب ر}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ر هـ}}{\text{ا جـ}}$$

ومن تشابه المثلثين أ ب د، أ ر هـ نجد أن:

$$\frac{\text{ا ر}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ر هـ}}{\text{ب د}}$$

بقسمة العلاقة الثانية على العلاقة الأولى نحصل على:

$$\frac{\text{ا ر}}{\text{ب ر}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ب د}}$$

أي أن:

$$\frac{\text{س}}{\text{ل} - \text{س}} = \frac{\text{ك} - \text{ك}_{١}}{\text{ك} - \text{ك}_{٢}}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\text{س} = \frac{\text{ك} - \text{ك}_{١}}{٢\text{ك} - \text{ك}_{١} - \text{ك}_{٢}} \ \text{ل}$$

ويحسب المنوال عن النقطة م من العلاقة.

المنوال = ا + س

وهي نفس العلاقة التي سبق ذكرها.

مثال (١٥)

أوجد المنوال للأجر اليومي لعينة من العمال حسب البيانات الواردة في مثال (٣) والموضحة بالجدول التالي:

جدول التوزيع التكراري للأجور لمجموعة من العمال

فئات الأجور	٢٥ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٤	٣٥ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٤	٤٥ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٤
التكرار (عدد العمال)	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

نلاحظ من الجدول السابق أن الفئات منتظمة الأطوال وعليه فإنها لا تحتاج إلى تعديل التكرارات لها. وتكون الفئة المنوالية بالحدود الفعلية هي (٣٩,٥ ـ ٤٤,٥)، والتكرار المنوالي ك = ١٣، وعليه فإن ا = ٣٩,٥ ريالا، ل = ٥، $ك_١$ = ١٠، $ك_٢$ = ٨

وبذلك يكون:

$$\text{المنوال} = \text{ا} + \frac{\text{ك} - \text{ك}_١}{٢\text{ك} - \text{ك}_١ - \text{ك}_٢}\ \text{ل}$$

$$= ٣٩,٥ + \frac{١٣ - ١٠}{٢ \times ١٣ - ١٠ - ٨} \times ٥$$

$$= ٣٩,٥ + \frac{١٥}{٨}$$

$$= ٣٩,٥ + ١,٨٨$$

$$= ٤١,٣٨ \ \text{ريالا}$$

مثال (١٦):

أوجد المنوال للإنفاق الشهري بمئات الريالات لمجموعة من الأسر كما هو موضح بالجدول التالي:

الجدول التكراري للإنفاق لمجموعة من الأسر

فئات الانفاق	٧ ـ ٩	١٠ ـ ١٢	١٣ ـ ١٨	١٩ ـ ٢٢	٢٣ ـ ٢٥
التكـــرار	٤	٩	١٢	١٠	٥

نلاحظ أن الفئات في الجدول التكراري غير متساوية الطول. ولهذا فإنه يلزم تعديل التكرارات حتى نستطيع تحديد الفئة المنوالية، وهي التي يناظرها أكبر تكرار بعد التعديل كما يلي:

فئات الإنفاق	التكرار (ك)	طول الفئة (ل)	التكرار المعدل $\frac{ك}{ل}$
٧ ـ ٩	٤	٣	١,٣٣
١٠ ـ ١٢	٩	٣	٣
١٣ ـ ١٨	١٢	٦	٢
١٩ ـ ٢٢	١٠	٤	٢,٥
٢٣ ـ ٢٥	٥	٣	١,٦٧

نلاحظ من الجدول التكراري المعدل أن الفئة المنوالية هي (٩,٥ ـ ١٢,٥) والتي يقابلها أكبر تكرار معدل وهو ٣، وعليه فيمكن حساب المنوال حيث يكون ا = ٩,٥، ك = ٣، $ك_١$ = ١,٣٣، $ك_٢$ = ٢، ل = ٣

$$\text{المنوال} = ا + \frac{ك - ك_١}{٢ك - ك_١ - ك_٢} \times ل$$

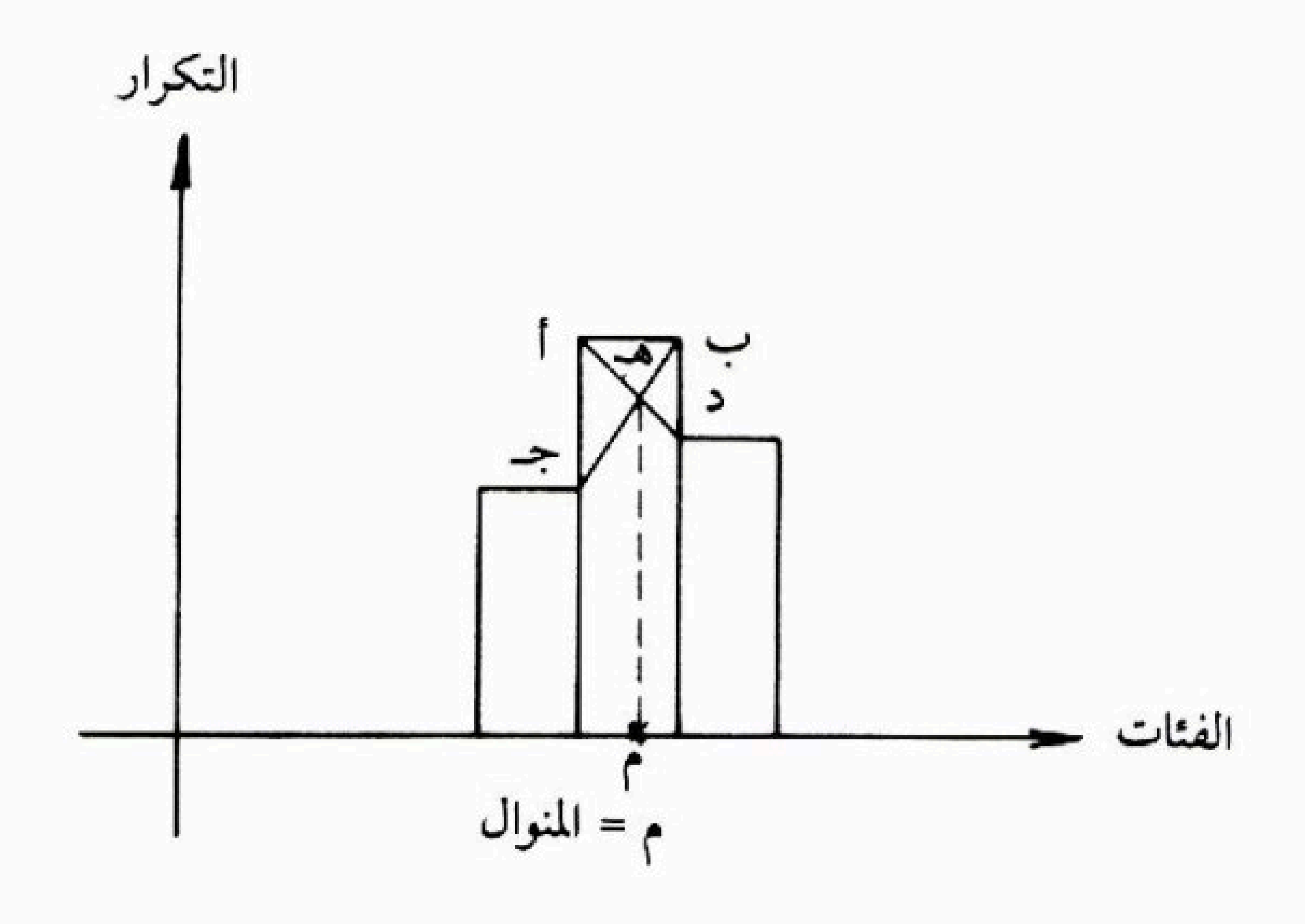
$$= ٩,٥ + \frac{٣ - ١,٣٣}{٦ - ١,٣٣ - ٢} \times ٣$$

$$= ٩,٥ + \frac{٥,٠١}{٢,٦٧} = ١١,٣٨ \text{ بمئات الريالات}$$

أي أن المنوال = ١١,٣٨ × ١٠٠ = ١١٣٨ ريالا

ب) المنوال بيانيـا

يمكن حسـاب المنـوال بيانيا، وذلـك برسم المـدرج التكـراري من الجـدول التكراري مباشرة، وذلك في حالة الفئات المتساوية الطول (المنتظمة)، وأحيانا يكتفي برسم ثلاثة مستطيلات من المدرج التكراري، وهي المستطيل الممثل للفئة المنوالية، والمستطيلان السابق واللاحق له، ونصل أ د، ب جـ كما هو موضح بشكل (٣ ـ ٦) فنحصل على نقطة التقاطع، ولتكن هـ. نسقط عمودًا رأسيًا من نقطة هـ على محور الفئات ليلتقي معه في نقطة م التي تساوي قيمتها من محور الفئات قيمة المنوال.



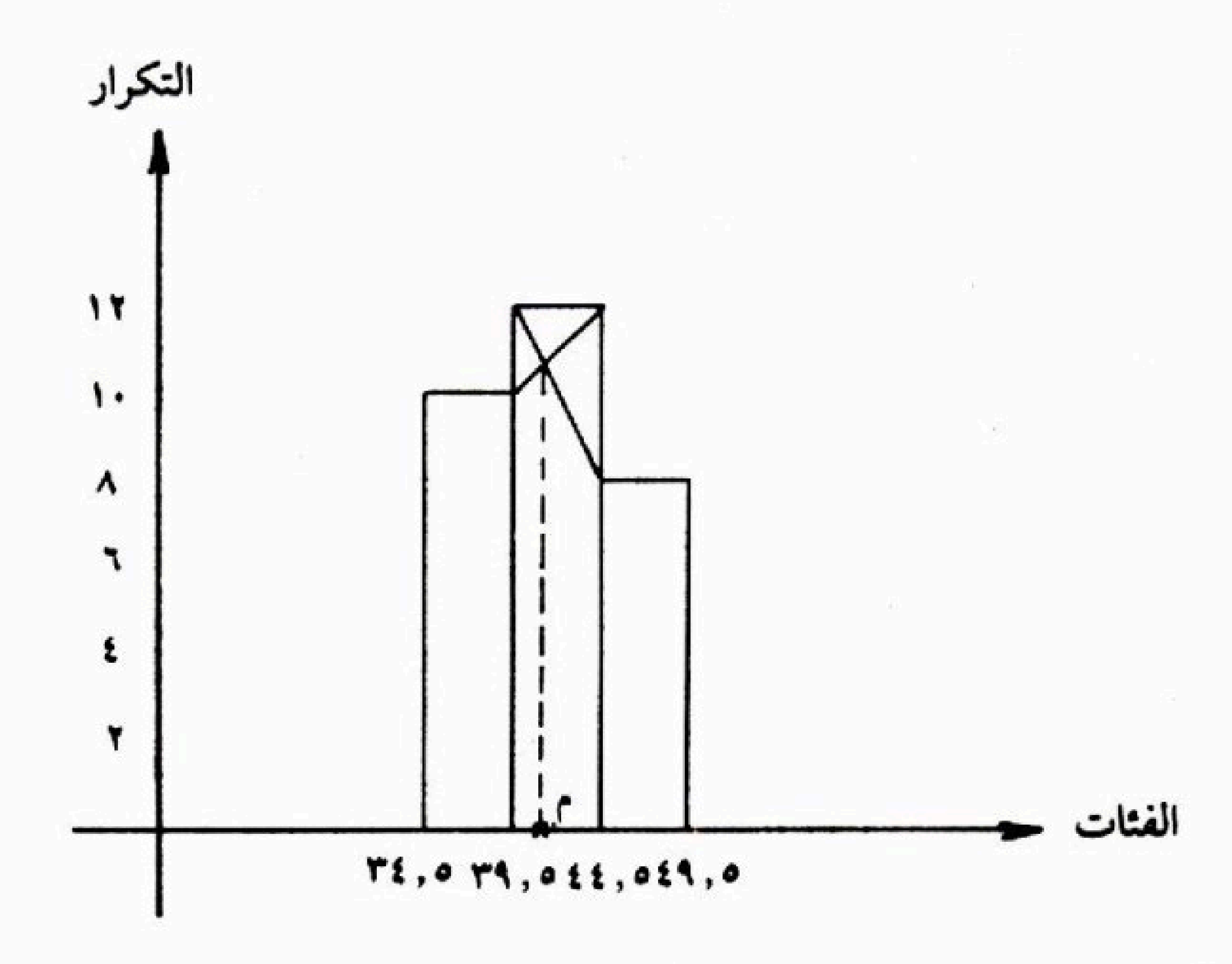
شكل (٣ ـ ٦): المدرج التكراري للفئة المنوالية

أمـا في حالـة الفئـات غير المنتظمة أي غير المتساوية الطول نوجد المنوال من المدرج التكراري المعدل، ويمكن الاكتفاء بثلاثة مستطيلات، وذلك باتباع الخطوات السابقة نفسها في حالة الفئات المنتظمة، وسوف نوضح ذلك بالأمثلة التالية.

مثال (١٧)

أوجد المنوال بيانيا للأجر اليومي لعينة العمال حسب البيانات المعطاة في مثال (١٥).

نرسم المستطيل للفئة (٣٩,٥ - ٤٤,٥) والمستطيل السابق واللاحق له كما يلي:



شكل (٣ - ٧): المدرج التكراري للفئة المنوالية لأجور العمال

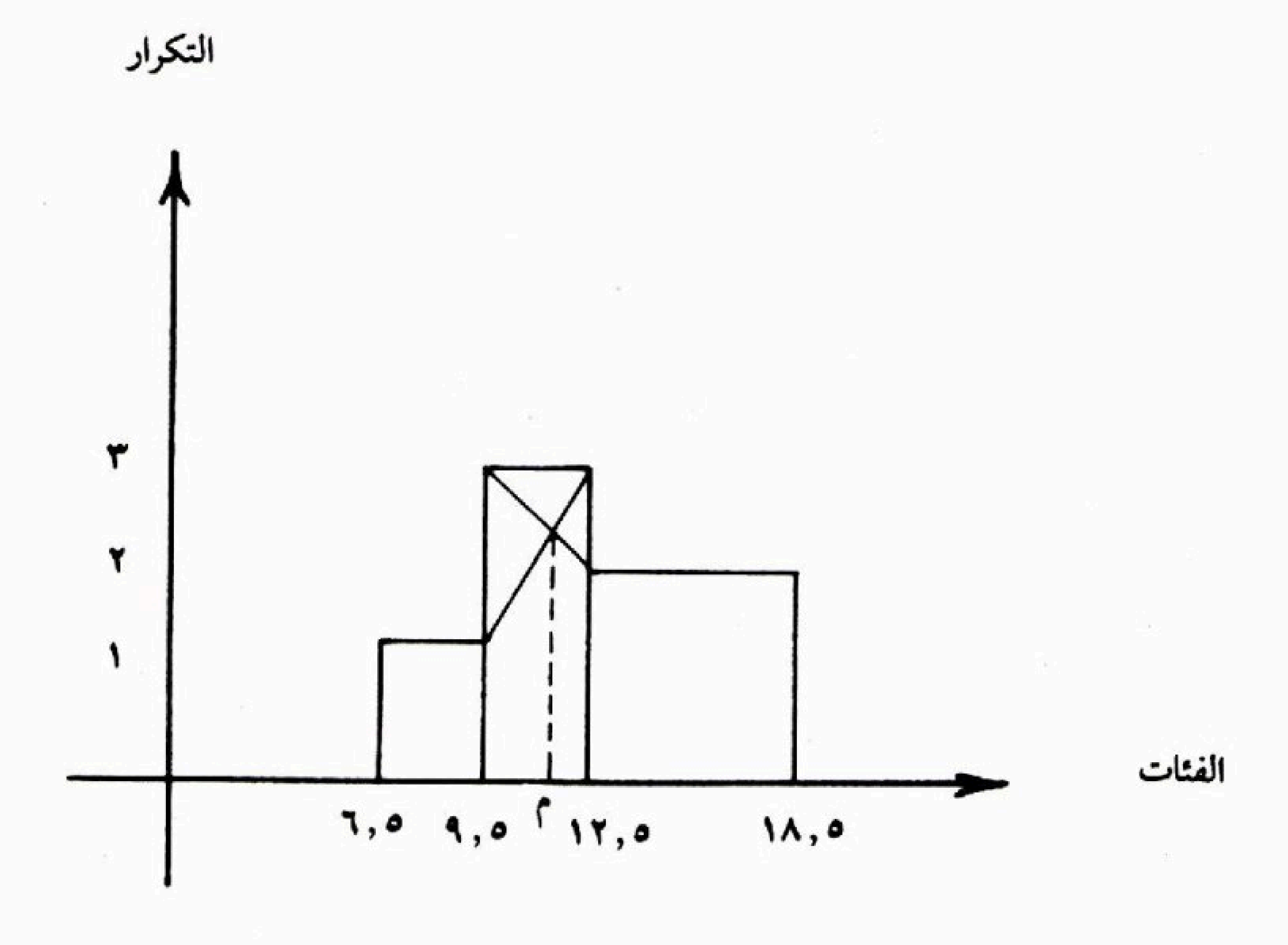
نصل النقاط حسب ما وضحنا سابقا، ومن ثم نسقط عمودا من نقطة التقاطع على محور الفئات فنجد قيمة المنوال كالتالي:

المنـــوال = ٤١ تقريبا

مثال (١٨):

أوجد المنوال بيانيا للإنفاق الشهري لعينة الأسر المعطاة حسب بيانات مثال (١٦).

نرسم أولا المستطيل المنوالي على الفئة المنوالية (٥,٩ ـ ٥,١٢) التي يناظرها أكبر تكرار معدل، وهو يساوي ٣، وكذلك المستطيل السابق واللاحق له كما يلي:



شكل (٣ ـ ٨): المدرج التكراري المعدل للفئة المنوالية

المنوال عند نقطة م = ١١,١ بمئات الريالات.

أي أن المنوال = ١١,١ × ١٠٠ = ١١١٠ ريالات.

(٣ ـ ٤ ـ ٣) مميزات المنوال

١ ـ لا يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).

٢ ـ يمكن حسابه للبيانات الوصفية، وكذلك في حالة الجداول التكرارية المفتوحة للبيانات الكمية.

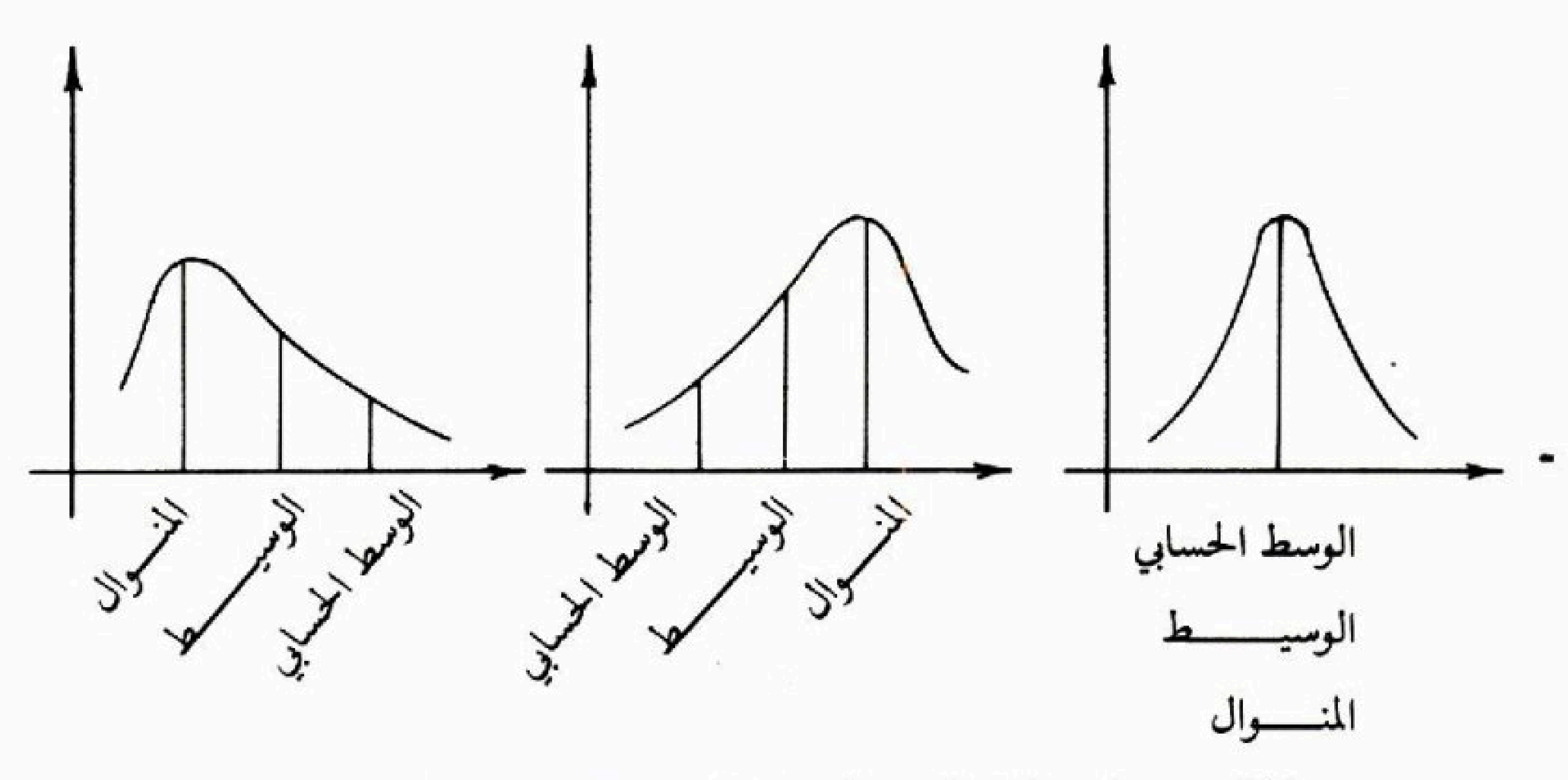
(٣ ـ ٤ ـ ٤) عيوب المنوال

١ ـ لا يأخذ في الاعتبار جميع القيم في الحساب.

٢ ـ قد تكون لعينة البيانات أكثر من قيمة منوالية، وبذلك يكون المنوال متعدد القيم، وبذلك يصعب التعامل معه في التحليل الإحصائي.

(٣ ـ ٥) العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

يلاحظ أنه في حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة الوحيدة المنوال نجد أن المقاييس الثلاثة تكون متطابقة، أي متساوية القيمة. ولكن في حالة عدم التماثل، أي عند وجود التواء نحو اليمين أو نحو اليسار تختلف قيم المقاييس الثلاثة عن بعضها. ويكون الوسط الحسابي أكبر المقاييس السابقة في حالة الالتواء نحو اليمين، يليه الوسيط، ثم المنوال، وهو أصغر المقاييس الثلاثة في هذه الحالة، كما سنوضح ذلك في شكل (٣ ـ ٩). وإذا كان الالتواء نحو اليسار نجد أن الوسط الحسابي أصغرها، ويليه الوسيط ثم المنوال أكبر المقاييس الثلاثة في هذه الحالة.



شكل (٣ ـ ٩): العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال بيانيا

أما في حالة الالتواء البسيط نحو اليمين أو اليسار توجد علاقة تجريبية بين المقاييس الثلاثة كما يلي:

$$\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط} = \left(\frac{\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال}}{٣}\right)$$

وهذه العلاقة غير صحيحة في حالة الإلتواء الكبير.

(٣ - ٦) الوسط الهندسي والتوافقي

(٣ - ٦ - ١) الوسط الهندسي

لقد لاحظنا فيما سبق أن الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة، أي القيم الكبيرة جدا، أو القيم الصغيرة جدا مقارنة ببقية القراءات، ولذا دعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس تكون أقل تأثرا بالقيم الشاذة، وخاصة المتطرفة نحو الكبر. ومن هذه المقاييس الوسط الهندسي الذي يعطي قيما أدق من الوسط الحسابي في دراسة بعض الظواهر التي تزيد مفرداتها بمعدلات ثابتة مثل ظاهرة النمو السكاني، ونمو الكائنات الحية الأخرى، أو ظاهرة النمو الاقتصادي وغيرها. ومن المعروف أنه إذا كان لدينا قراءتان ا، ب فإن وسطهما الهندسي يعرف بالمقدار $\sqrt{ا \times ب}$ أما وسطهما الحسابي فهو المقدار $\frac{ا + ب}{٢}$، وبوجه عام فإنه إذا كان لدينا القراءات ولتكن:

$س_١$، $س_٢$، .... $س_ن$

فإن الوسط الهندسي لهذه القراءات يعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{الوسط الهندسي } \bar{هـ} = \sqrt[ن]{س_١ \times س_٢ \times .... \times س_ن}$$

وفي حالة البيانات المبوبة إذا كانت لدينا التكرارات

$ك_١$، $ك_٢$، ....، $ك_م$

ولها مراكز فئات:

$س_١$، $س_٢$، ....، $س_م$ على الترتيب

فإن الوسط الهندسي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{الوسط الهندسي } \bar{هـ} = \sqrt[ن]{س_١^{ك_١} \times س_٢^{ك_٢} \times .... \times س_م^{ك_م}}$$

حيث إنَّ ن = مجـ ك .

مثال (١٩)

أوجد الوسط الهندسي لأعمار عينة مكونة من ٧ طلاب في المرحلة الابتدائية وهي ٣، ٥، ٦، ٦، ٧، ١٠، ١٢

الحـــل

الوسط الهندسي $\bar{ه} = \sqrt[٧]{٣ \times ٥ \times ٦ \times ٦ \times ٧ \times ١٠ \times ١٢}$

وعادة تستخدم اللوغاريتمات لتسهيل عملية الحساب، ولذلك

لو $\bar{ه} = \frac{١}{٧}$ (لو ٣ + لو ٥ + ٢ لو ٦ + لو ٧ + لو ١٠ + لو ١٢)

وباستخدام جدول للوغاريتمات (٧) في نهاية الكتاب نجد أن

لو $\bar{ه} = \frac{١}{٧}$ (٠,٤٧٧١ + ٠,٦٩٩٠ + ١,٥٥٦٣ + ٠,٨٤٥١ + ١,٠٠٠٠ + ١,٠٧٩٢)

∴ لو $\bar{ه}$ = ٠,٨٠٨١

وبالكشف في جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات يمكن إيجاد الوسط الهندسي أي أنَّ

$\bar{ه}$ = ٦,٤٣ سنوات

عند حساب الوسط الحسابي $\bar{س}$ يكون:

$\bar{س} = \frac{٣ + ٥ + ٦ + ٦ + ٧ + ١٠ + ١٢}{٧}$ = ٧ سنوات

أي أن الوسط الهندسي أصغر من الوسط الحسابي.

(٣ ـ ٦ ـ ٢) الوسط التوافقي

يعتبر الوسط التوافقي من المقاييس التي تحد من تأثير القيم المتطرفة وخاصة في حالة التطرف نحو الكبر. ويلاحظ أن تأثير الوسط التوافقي أكبر من تأثير الوسط الهندسي في الحد من القيم المتطرفة نحو الكبر، لأن قيمته لنفس البيانات تكون أصغر من قيمة الوسط الهندسي.

ويعرَّف الوسط التوافقي ونرمز له بالرمز $\bar{ت}$ في حالة البيانات غير المبوبة كما يلي:

إذا كانت لدينا القراءات:

$س_1 ، س_2 ، .... ، س_ن$

فإن:

$$\frac{1}{\bar{ت}} = \frac{1}{ن} \left(\frac{1}{س_1} + \frac{1}{س_2} + \cdots + \frac{1}{س_ن} \right)$$

$$= \frac{1}{ن} \left(مجـ \frac{1}{س} \right)$$

أما في حالة البيانات المبوبة فإنه إذا كانت لدينا التكرارات التالية:

$ك_1 ، ك_2 ، .... ، ك_م$.

ولها مراكز الفئات التالية:

$س_1 ، س_2 ، .... ، س_م$ على الترتيب.

فإن الوسط التوافقي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{1}{\bar{ت}} = \frac{1}{ن} \left(\frac{ك_1}{س_1} + \frac{ك_2}{س_2} + \cdots + \frac{ك_م}{س_م} \right)$$

$$= \frac{1}{ن} \left(مجـ \frac{ك}{س} \right)$$

حيث إن $ن = مجـ ك$.

مثال (٢٠)

احسب الوسط التوافقي $\bar{ت}$ لمجموعة أعمار الطلاب المعطاة حسب بيانات مثال (١٩).

من تعريف الوسط التوافقي

$$\frac{1}{\bar{ت}} = \frac{1}{ن} \left(\frac{1}{س_1} + \frac{1}{س_2} + \cdots + \frac{1}{س_ن} \right)$$

باستخدام البيانات الإحصائية المعطاة، ولذلك نجد أن :

$$\frac{1}{\bar{ت}} = \frac{١}{٧} \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٧} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٢} \right)$$

$$\frac{١}{\bar{ت}} = \frac{٥٠١}{٢٩٤٠}$$

وبالتالي يمكن إيجاد الوسط بصورة مباشرة أي أن

$$\bar{ت} = \frac{٢٩٤٠}{٥٠١} = ٥,٨٧ \text{ سنوات}$$

ومما سبق نجد أن الوسط الحسابي $\bar{س}$ = ٧ سنوات

والوسط الهندسي للبيانات نفسها = ٦,٤٣ سنوات

والوسط التوافقي للبيانات نفسها = ٥,٨٧ سنوات (وهو أقل المتوسطات الثلاثة في المقدار).

(٣ - ٧) تمارين

١ - اذكر مميزات المتوسطات التالية :

ا - الوسط الحسابي.

ب - الوسيط.

جـ - المنوال.

د - الوسط الهندسي.

هـ - الوسط التوافقي.

٢ - إذا كانت القيم ٦، ٧، ٩، ١٠ للمتغير س. فاحسب التالي :

مج س، $(\text{مج س})^2$، مج (س - ٨)، مج $(\text{س} - ٨)^2$، $\frac{١}{٤}$ مج س،

$\frac{١}{٣} \left(\text{مج س}^2 - \frac{(\text{مج س})^2}{٤}\right)$

٣ ـ الجدول التالي يعطي قيما للمتغيرين س، ص

س	٤	٥	٨	٤	٩
ص	-٢	٣	٥	٢	٧

ا ـ احســب

مج س، مج ص، مج س^{٢}، مج ص^{٢}، مج س ص.

ب ـ أي العلاقات التالية صحيح وأيها غير صحيح (استخدم القيم السابقة في الإثبات)

١) مج ٥ س = ٥ مج س

٢) مج (س + ص) = مج س + مج ص

٣) مج (س + ص)^{٢} = مج س^{٢} + مج ص^{٢}

٤) مج س^{٢} = مج س . مج س

٤ ـ البيانات التالية تمثل أوزان لمجموعة من الأطفال بالكيلوجرام بعد سنة من الولادة
٧، ٨، ٧، ٧، ٩، ١٠، ٩، ٩، ٩، ١٠

احســب

ا) متوسط أوزان الأطفال.

ب) الوسيــط للأوزان.

جـ) المنـوال للأوزان.

د) احسب الوسط الهندسي للأوزان.

٥ ـ أربـع عينات من الطلبة كل عينة مكونة من ١٢، ١٥، ١٣، ١٨ طالبا وكان متـوسط أطوال العينات هو ١,٧٢ من المتر، ١,٥ من المتر، ١,٤٧ من المتر، ١,٦١ من المتر على الترتيب.

ا) اوجد متوسط أطوال الطلاب في العينات الأربعة مجتمعة.

ب) أوجد الوسيط لأطوال العينات الأربعة مجتمعة.

جـ) أوجد المنوال لأطوال العينات الأربعة مجتمعة.

٦ - من المعلوم أن الامتحان النهائي لأي مقرر له وزن يعادل ثلاثة أمثال امتحان الأعمال الفصلية، فإذا كانت درجات طالب في الامتحان النهائي لمادة ما هي ٧١ وفي امتحاني الأعمال الفصلية هما ٥٧، ٨١. فاحسب متوسط درجات هذا الطالب في هذه المادة.

٧ - من المعلوم أن تقديرات النجاح أو الرسوب في المواد الدراسية بالجامعة هي ا، ب، جـ، د، هـ ذات نقاط ٥، ٤، ٣، ٢، ١ على الترتيب والجدول الآتي يمثل عدد الساعات الدراسية التي اجتازها والتقديرات التي حصل عليها طالب ما في كلية العلوم.

جدول التوزيع التكراري للتقديرات

عدد الساعات	التقدير
١٥	ا
٣٦	ب
٢٥	جـ
٢٠	د
٦	هـ

احسب المعدل التراكمي لهذا الطالب.

٨ - يوجد مقياس من مقاييس النزعة المركزية يتأثر أكثر من غيره في الالتواء في التوزيعات التكرارية المختلفة. اذكر هذا المقياس واشرح السبب.

٩ ـ الجدول الآتي يبين توزيع أطوال ٤٠ من أوراق نبات الغار بالملليمتر

جدول التوزيع التكراري لأطوال أوراق نبات الغار

الطول بالملليمتر	التكـــرار
١١٨ ـ ١٢٦	٣
١٢٧ ـ ١٣٥	٥
١٣٦ ـ ١٤٤	٩
١٤٥ ـ ١٥٣	١٢
١٥٤ ـ ١٦٢	٥
١٦٣ ـ ١٧١	٤
١٧٢ ـ ١٨٠	٢

أوجد المقادير التالية :

ا) الوسط الحسابي لأطوال أوراق نبات الغار.

ب) الوسيط لأطوال أوراق نبات الغار حسابيا وبيانيا .

جـ) المنوال لأطوال أوراق نبات الغار حسابيا وبيانيا .

د) احسب الوسط الهندسي والوسط التوافقي .

١٠ـ الجدول الآتي يمثل الدخل بمئات الريالات لعدد من الأسر

جدول التوزيع التكراري للدخل لمجموعة من الأسر

فئات الدخل	٢٠ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٩	٦٠ فأكثر
عدد الأسر	٧	١٢	١٥	١٠	٦

احسب ما يلي :

ا) الوسيط لدخل الأسر.

ب) المنوال لدخل الأسر.

جـ) هل يمكن حساب الوسط الحسابي للدخل؟ ولماذا؟

١١ـ أوجد المنوال للتقديرات الآتية لمجموعة من الطلاب

أ، ب، ب، جـ، د، جـ، د، ب، د

د، د، هـ، د، هـ، جـ، جـ، د

١٢ـ الجدول التالي يمثل أوزان عينة من طلاب جامعة الملك سعود مقربة لأقرب كيلوجرام.

جدول التوزيع التكراري لأوزان عينة من طلاب جامعة الملك سعود

مراكز الفئات للوزن	٤٢	٤٧	٥٢	٥٧	٦٢	٦٧
عـــدد الطـــلاب	٣	١٠	١٩	١٢	٤	٢

ا) اوجد الوسط الحسابي للأوزان.

ب) اوجد الوسيط حسابيا وبيانيا.

جـ) اوجد المنوال حسابيا وبيانيا.

د) اوجد الوسط الهندسي والوسط التوافقي للأوزان.

١٣ ـ ا) قارن بين مجموعة البيانات التالية من حيث تمركزها

المجموعة الأولى: ٢٥ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ٢٥ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ٢٦ ، ٢٤ ، ٢٥

المجموعة الثانية: ٢٢ ، ٢٩ ، ٢٨ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٢٦

ب) المتوسط الحسابي لمجموعة من البيانات يتأثر بالقيم المتطرفة ـ ناقش هذه الظاهرة مع ذكر أمثلة على ذلك.

جـ) هل تعتبر الوسيط أفضل من المتوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية للبيانات السابقة؟ اذكر السبب.

١٤ ـ إذا كانت مجـ س^{٢} = ١٠٠ و مجـ س (س − ١) = ٨٠ لعينة مكونة من خمس وحدات، أوجد الوسط الحسابي لهذه العينة.

١٥ ـ ا) اثبت أن:

مجـ (س - $\bar{س}$) = صفر

ب) إذا كان ا وسطا فرضيا وكانت ح = س - ا.

عندئذ فاثبت أن:

$$\bar{س} = ا + \frac{مجـ ح}{ن}$$

١٦ـ يحتوي الجدول التالي على تلخيص وسائل الوصول لستين شخصا إلى إحدى المدن بالمملكة.

جدول التوزيع التكراري لوسائل النقل

وسيلة النقل	حافلة	سفينة	طائرة	سيارة	وسائل أخرى
عدد الوافدين	١٣	١٢	٢٥	٧	٣

اوجد مقياسًا مناسبًا للنزعة المركزية وحدد قيمته.

١٧ـ الحمولة القصوى لأحد المصاعد كانت ٢٠٠٠ كجم، قرر ما إذا كانت الحمولات التالية أكبر من طاقة المصعد؟

ا) إذا صعد ٢٣ شخصًا، وزن كل منهم ٧٥ كجم؟

ب) إذا صعد ١٥ شخصا وزن كل منهم ٧٣ كجم و ٩ آخرون، وزن كل منهم ٩٥ كجم.

١٨ـ إذا كانت أسعار أربعة أنواع من الفاكهة ٢٠، ٢٧، ٤٢، ٣٧ ريالا على التوالي للصندوق الواحد. إذا باع أحد التجار ٥٠ صندوقا من النوع الأول، ١٥٦ صندوقا من النوع الثاني، ٢٨٦ صندوقا من النوع الثالث، و ٩ صناديق من النوع الرابع. فأوجد متوسط سعر البيع للصندوق الواحد.

١٩ـ الجدول التالي يبين متوسط دخل العمال في إحدى المؤسسات الصناعية، وذلك حسب مهنة كل منهم.

جدول التوزيع التكراري لمتوسط الدخل الأسبوعي للعمال حسب المهنة

المهنــــة	عدد العمال	متوسط الدخل الأسبوعي للعامل بالريال السعودي
عمال التصنيع	٩٨٨٠٠	٩٠٠
عمال المناجم	٢٣٥٠٠	١٢٠٠
عمال التشييد	٣٩٣٠٠	٨٠٠

أوجد متوسط الدخل الأسبوعي لـ ١٦١٦٠٠ عامل يعملون بهذه المؤسسة.

الفصل الرابع

مقاييس التشتت

(٤ ـ ١) مقدمة

سبق أن تكلمنا عن طرق تلخيص البيانات الإحصائية وعرضها بصورها المختلفة. وتناولنا بعد ذلك طريقة حساب مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)، لإيجاد قيم عددية محددة تصف هذه البيانات بأشكالها المختلفة، ولكن هذه المقاييس تكون غير كافية، وذلك لأنها لا توضح مقدار التفاوت بين مفردات المشاهدات للظاهرة محل الدراسة، كما يتضح من المثال التالي.

مثال (١)

عند دراسة الأجر اليومي لمجموعتين من العمال الزراعيين بالريال في منطقتين مختلفتين كل منهما يتكون من عشرة عمال كانت البيانات كما يلي:

المجموعة الأولى: ٤٣، ٤٠، ٤٠، ٤٥، ٤٤، ٤٢، ٤١، ٤٢، ٤٦، ٤٧

المجموعة الثانية: ٣٠، ٣٥، ٤٢، ٤٨، ٣٩، ٥٠، ٦٠، ٤٢، ٣١، ٦١

بحساب الوسط الحسابي للعينة الأولى نجده يساوي ٤٣ ريالا، كما وجدنا أن الوسط الحسابي للعينة الثانية يساوي ٤٣ ريالا أيضا. نلاحظ من ذلك أن الوسطين الحسابيين لكل من العينتين متساويان، ولكن قيم الأجور للمجموعة الأولى متقاربة ومحصورة بين ٤٠، ٤٧ ريالا، أو يمكن القول: إن أجور العمال في المجموعة الأولى متقاربة أو متجانسة. أما في العينة الثانية فإن قيم الأجور تكون محصورة بين ٣٠، ٦١ ريالا، أي أنها متفاوتة وغير متجانسة أي متباعدة بخلاف المجموعة الأولى رغم تساويهما في الوسط

الحسابي في المثال السابق. نلاحظ أن مثل هذه الخصائص لمقاييس النزعة المركزية يجعلها غير كافية لوصف البيانات من حيث تشتت المفردات للمجموعة بعضها عن بعض. لذلك دعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس أخرى عددية لقياس مقدار هذا التفاوت بين المفردات. وهذه المقاييس هي ما تسمى مقاييس التشتت، وسوف نتعرض في هذا الفصل إلى دراسة كيفية حساب بعض خصائص أهم مقاييس التشتت، وعلى الأخص المدى ونصف المدى الربيعي، والإنحراف المتوسط، والتباين والانحرف المعياري، ومعامل الاختلاف. كذلك سنتناول بعض المقاييس الأخرى التي لها علاقة بمقاييس التشتت مثل مقاييس الالتواء، ومقاييس التفرطح في آخر هذا الفصل. وسنحاول تبسيط عرضنا باستخدام الأمثلة لكل مقياس على حدة.

(٤ ـ ٢) المـــدى

يعرّف المدى للبيانات غير المبوبة بأنه الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة لعينة من البيانات أو هو الفرق بين القراءة العظمى والقراءة الصغرى أي أن

المدى = أكبر قراءة ـ أصغر قراءة . . . . (١)

مثال (٢):

أوجد المدى للأجور اليومية بالريال لعينة من العمال مكونة من عشرة عمال في إحدى المؤسسات وكانت: **٦٥، ٥٥، ٧٧، ٨٩، ٩٠، ٩٩، ٨٠، ٦٠، ٨٨، ٧٠**

نلاحظ أن أقل أجر يومي = **٥٥** ريالاً

وأن أكبر أجر يومي = **٩٩** ريالاً

فيكون المدى = **٩٩ – ٥٥** = **٤٤** ريالاً

أما في حالة البيانات المبوبة فيوجد أكثر من تعريف للمدى نذكر منها التعريفين التاليين:

التعريف الأول:

المدى عبارة عن الفرق بين مركز الفئة العليا ومركز الفئة الدنيا أي أن

المدى = مركز الفئة العليا - مركز الفئة الدنيا .... (٢)

التعريف الثاني:
المدى عبارة عن الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا والحد الأدنى للفئة الدنيا.

أي أن

المدى = الحد الأعلى للفئة العليا - الحد الأدنى للفئة الدنيا ... (٣)

مثال (٣):
أوجد المدى للأجر اليومي لعينة مكونة من ٥٠ عاملا، وهي مبينة بالجدول التالي:

جدول التوزيع التكراري للأجور اليومية لمجموعة من العمال

فئات الأجور	٢٥ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٤	٣٥ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٤	٤٥ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٤
عدد العمال	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

نلاحظ من الجدول التكراري السابق أن
مركز الفئة الدنيا = ٢٧، ومركز الفئة العليا = ٥٢ ريالا
الحد الأعلى للفئة العليا = ٥٤,٥، والحد الأدنى للفئة الدنيا = ٢٤,٥ ريالا
المدى باستخدام التعريف الأول = ٥٢ - ٢٧ = ٢٥ ريالاً
المدى باستخدام التعريف الثاني = ٥٤,٥ - ٢٤,٥ = ٣٠ ريالاً

(٤ ـ ٢ ـ ١) مزايا المدى
١) يعطي فكرة سريعة عن طبيعة البيانات الإحصائية.
٢) مقياس سهل الحساب ويستخدم عادة في مراقبة جودة الإنتاج والأحوال الجوية.

(٤ ـ ٢ ـ ٢) عيوب المدى

١) يعتمد فقد على القراءتين المتطرفتين وأحيانا تكون قيم هاتين القراءتين شاذة لذلك فإن المدى مقياس تقريبي لا يعتمد عليه.

٢) يصعب حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة، أو في حالة البيانات الوصفية.

(٤ ـ ٣) نصف المدى الربيعي

لاحظنا مما سبق أن من أهم خصائص المدى غير المرغوب فيها تأثره بالقيم الشاذة. لذا فمن الواجب إيجاد مقياس أو مقاييس أخرى تستبعد هذه القيم الشاذة من الطرفين، ومن أهم هذه المقاييس نصف المدى الربيعي، ويمكن حسابه بترتيب البيانات تصاعديا، وتقسيم البيانات إلى أربعة أقسام يستبعد منها ربع القيم الصغرى من ناحية، وكذلك ربع القيم الكبرى من الناحية الأخرى.

بعد ذلك فإننا نسمي القيمة (النقطة) التي تكون دونها ربع القراءات الربيع الأدنى ويرمز لها بالرمز $ر_١$. أما القيمة (النقطة) التي تحدد ثلاثة أرباع القراءات فتسمى الربيع الأعلى، ويرمز لها بالرمز $ر_٣$ والفرق بينهما هو ما يسمى المدى الربيعي. أما نصف المدى بين الربيع الثالث والربيع الأول فيسمى نصف المدى الربيعي، ويرمز له بالرمز (ر) أي أن:

$$ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

ويعتبر نصف المدى الربيعي مقياسا يستبعد القيم المتطرفة من الجانبين الأعلى والأدنى.

ويلاحظ أن القيمة (النقطة) التي تكون دونها نصف القراءات (وتسمى بالربيع الثاني) وهي القراءة التي تقسم البيانات إلى نصفين ويرمز له بالرمز $ر_٢$ وسبقت الإشارة إليها في الفصل السابق على أنها الوسيط عند دراسة مقاييس النزعة المركزية.

وسوف نتناول طريقة حساب نصف المدى الربيعي في حالة البيانات غير المبوبة، والبيانات المبوبة كالتالي.

(٤ ـ ٣ ـ ١) نصف المدى الربيعي في حالة البيانات غير المبوبة

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات $س_١$، $س_٢$، . . . . ، $س_ن$ فإنه لإيجاد نصف المدى الربيعي لها نتبع الخطوات التالية:

١ ـ نرتب البيانات، وليكن عددها «ن» ترتيبا تصاعديا مثلاً.

٢ ـ نوجد رتبة الربيع الأدنى $ر_١$ (أو الأول) وهي $\frac{ن}{٤}$ في حالة ما إذا كانت ن تقبل القسمة على ٤ وبذلك تكون قيمة $ر_١$ هي القراءة التي رتبتها $\frac{ن}{٤}$. أما إذا كانت «ن» لا تقبل القسمة على ٤ فتكون قيمة الربيع الأدنى $ر_١$ هي متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسري $\frac{ن}{٤}$.

٣ ـ نحسب الربيع الأعلى (أو الثالث) $ر_٣$ وهي القراءة التي رتبتها $\frac{٣ن}{٤}$ في حالة كون ن تقبل القسمة على ٤. أما فيما عدا ذلك فقيمة الربيع الأعلى هي متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسري $\frac{٣ن}{٤}$ أي إذا كانت ن لا تقبل القسمة على ٤.

٤ ـ نحسب نصف المدى الربيعي ر بتطبيق العلاقة (٤) ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٤)

أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار عينة مكونة من ٨ موظفين في أحد الأقسام الإدارية بجامعة الملك سعود، حيث كانت البيانات هي:

٤٠، ٤٥، ٣٠، ٢٥، ٢٧، ٢٠، ٢١، ٣٥

نرتب البيانات تصاعديا كالتالي:

٢٠، (٢١)، ٢٥، ٢٧، ٣٠، (٣٥)، ٤٠، ٤٥

ن = ٨، رتبة $ر_١$ = $\frac{٨}{٤}$ = ٢

أي أن الربيع الأدنى هو القراءة الثانية من جهة اليمين وهي:

$ر_١$ = ٢١ سنــة

رتبة الربيع الأعلى $\frac{٣ ن}{٤} = \frac{٣ ن}{٤} = ٦$ أي أن $ر_{٣}$ هـو الحـد السادس مـن جهـة اليمين، وقيمته هي :

$ر_{٣}$ = ٣٥ سنــة

أما نصف المدى الربيعي فيكون :

$$ر = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢} = \frac{٣٥ - ٢١}{٢} = \frac{١٤}{٢} = ٧ \text{ سنوات}$$

مثال (٥)

أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار مفردات العينة المكونة من ١٠ موظفين حيث إن البيانات كالتالي :

٢٢ ، ٤١ ، ٤٥ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٢٠ ، ٣٢ ، ٣٩

الحــل

نرتب البيانات تصاعديا فتكون :

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٥ ، ٣٩ ، ٤١ ، ٤٥

ن = ١٠ ، ورتبة $ر_{١} = \frac{ن}{٤} = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥$

وبذلك تكون قيمة الربيع الأدنى $ر_{١} = \frac{٢٢ + ٢٢}{٢} = ٢٢$ سنــة

ورتبة $ر_{٣} = \frac{٣ ن}{٤} = \frac{٣ \times ١٠}{٤} = \frac{٣٠}{٤} = ٧,٥$ سنـة

أي قيمة الربيع الأعلى هي متوسط الحدين السابع والثامن، أي قيمة الربيع الأعلى $ر_{٣}$ هي :

$$ر_{٣} = \frac{٣٥ + ٣٩}{٢} = \frac{٧٤}{٢} = ٣٧ \text{ سنـة}$$

وعليه فإن قيمة نصف المدى الربيعي ر هي :

$$ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢} = \frac{٣٧ - ٢٢}{٢} = ٧,٥ \text{ سنة}$$

(٤ ـ ٣ ـ ٢) نصف المدى الربيعي في حالة البيانات المبوبة

وتحسب «ر» في هذه الحالة بطريقتين، أولهما حسابية أما الطريقة الثانية فبيانية :

أولاً : نصف المدى الربيعي حسابيا :

يتم حساب كل من الربيع الأدنى ($ر_١$) والربيع الأعلى ($ر_٣$) من البيانات المبوبة بعد تكوين الجدول المتجمع الصاعد. وبطريقة مشابهة تماما لحساب الوسيط في الفصل السابق مع استبدال $\frac{ن}{٢}$ بالقيمة $\frac{ن}{٤}$ في حالة حساب الربيع الأدنى ($ر_١$)، أو استبداله بالرتبة $\frac{٣ن}{٤}$ في حالة حساب الربيع الأعلى ($ر_٣$). وعليه فإنه يمكن كتابة قيم $ر_١$، $ر_٣$ بالعلاقتين التاليتين :

$$ر_١ = ا + \frac{\frac{ن}{٤} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \, ل$$

حيث ا = بداية فئة الربيع الأدنى.

$ك_١$ = التكرار المتجمع الصاعد السابق لتكرار $ر_١$.

$ك_٢$ = التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لتكرار $ر_١$.

ل = طول الفئة للربيع الأدنى.

$$ر_٣ = \bar{ا} + \frac{\frac{٣ن}{٤} - \bar{ك}_١}{\bar{ك}_٢ - \bar{ك}_١} \, \bar{ل}$$

حيث إن $\bar{ا}$ = بداية فئة الربيع الأعلى.

$\bar{ك}_١$ = التكرار المتجمع الصاعد السابق لتكرار $ر_٣$.

$\bar{ك}_٢$ = التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لتكرار $ر_٣$.

$\bar{ل}$ = طول الفئة للربيع الأعلى.

وسوف نوضح طريقة الحساب من المثال التالي.

مثال (٦)

أوجد نصف المدى الربيعي ر للأجور اليومية بالريال للعمال حسب البيانات المعطاة في مثال (٣) من الفصل الثاني.

نكون أولاً الجدول المتجمع الصاعد كما يلي:

الجدول المتجمع الصاعد للأجور اليومية لمجموعة من العمال

الفئـــــات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤,٥	صفر
أقل من ٢٩,٥ ا	٥ $ك_١$
أقل من ٣٤,٥	١٣ $ك_٢$
أقل من ٣٩,٥	٢٣
أقل من ٤٤,٥ ا	٣٦ $ك_١$
أقل من ٤٩,٥	٤٤ $ك_٢$
أقل من ٥٤,٥	٥٠

نوجد رتبة الربيع الأدنى $\frac{ن}{٤} = \frac{٥٠}{٤} = ١٢,٥$

ونضع خطًا أفقيًا بين التكرارين الصاعدين ٥، ١٣ الواقعة بينهما القيمة ١٢,٥ كما هو موضح بالجدول، فيكون من الجدول السابق

$ا = ٢٩,٥$ ، $ك_١ = ٥$ ، $ك_٢ = ١٣$ ، $ل = ٥$

أي أن

$$ر_١ = ا + \frac{\frac{ن}{٤} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \; ل = ٢٩,٥ + \frac{١٢,٥ - ٥}{١٣ - ٥} \times ٥$$

$$= ٢٩,٥ + \frac{(٧,٥٠)}{٨} \times ٥ = ٢٩,٥٠ + ٤,٦٩ = ٣٤,١٩ \text{ ريالا}$$

كذلك نجد أن :

$$\text{رتبة الربيع الأعلى } ر_٣ = \frac{٣\,ن}{٤} = \frac{٣ \times ٥٠}{٤} = \frac{١٥٠}{٤} = ٣٧,٥$$

وبذلك نضع خطًا أفقيًا بين التكرارين الصاعدين ٣٦، ٤٤ اللذين تقع بينهما القيمة ٣٧,٥ كما هو موضح بالجدول السابق فتكون :

$$ر_٣ = أ + \frac{\frac{٣\,ن}{٤} - ك_١}{ك_٢ - ك_١}\;ل$$

$$= ٤٤,٥ + \frac{٣٧,٥ - ٣٦}{٤٤ - ٣٦} \times ٥$$

$$= ٤٥,٤٤ \text{ ريـــالا}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي } ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$$

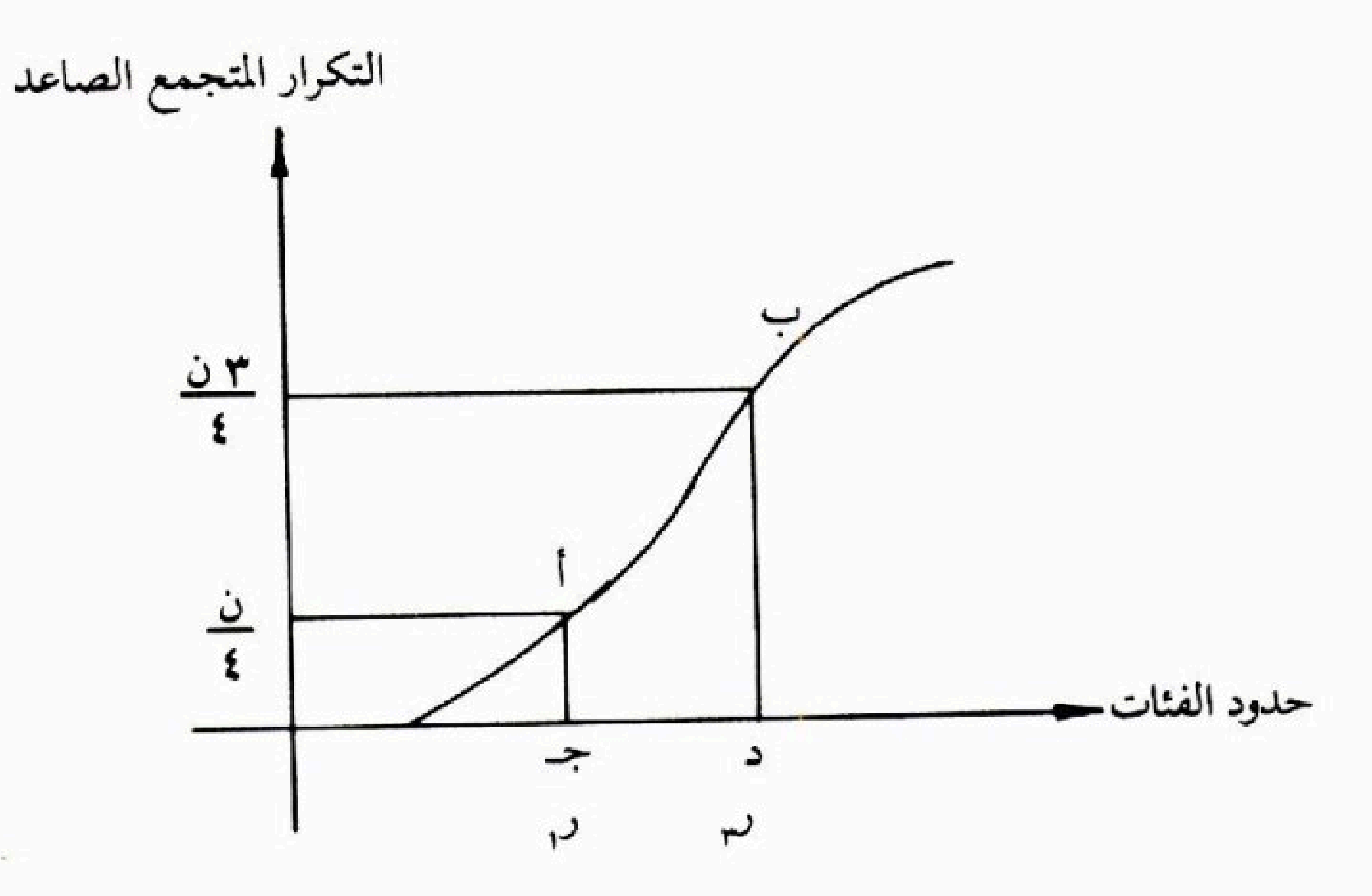
$$= \frac{٤٥,٤٤ - ٣٤,١٩}{٢}$$

$$= ٥,٦٣ \text{ ريالات}$$

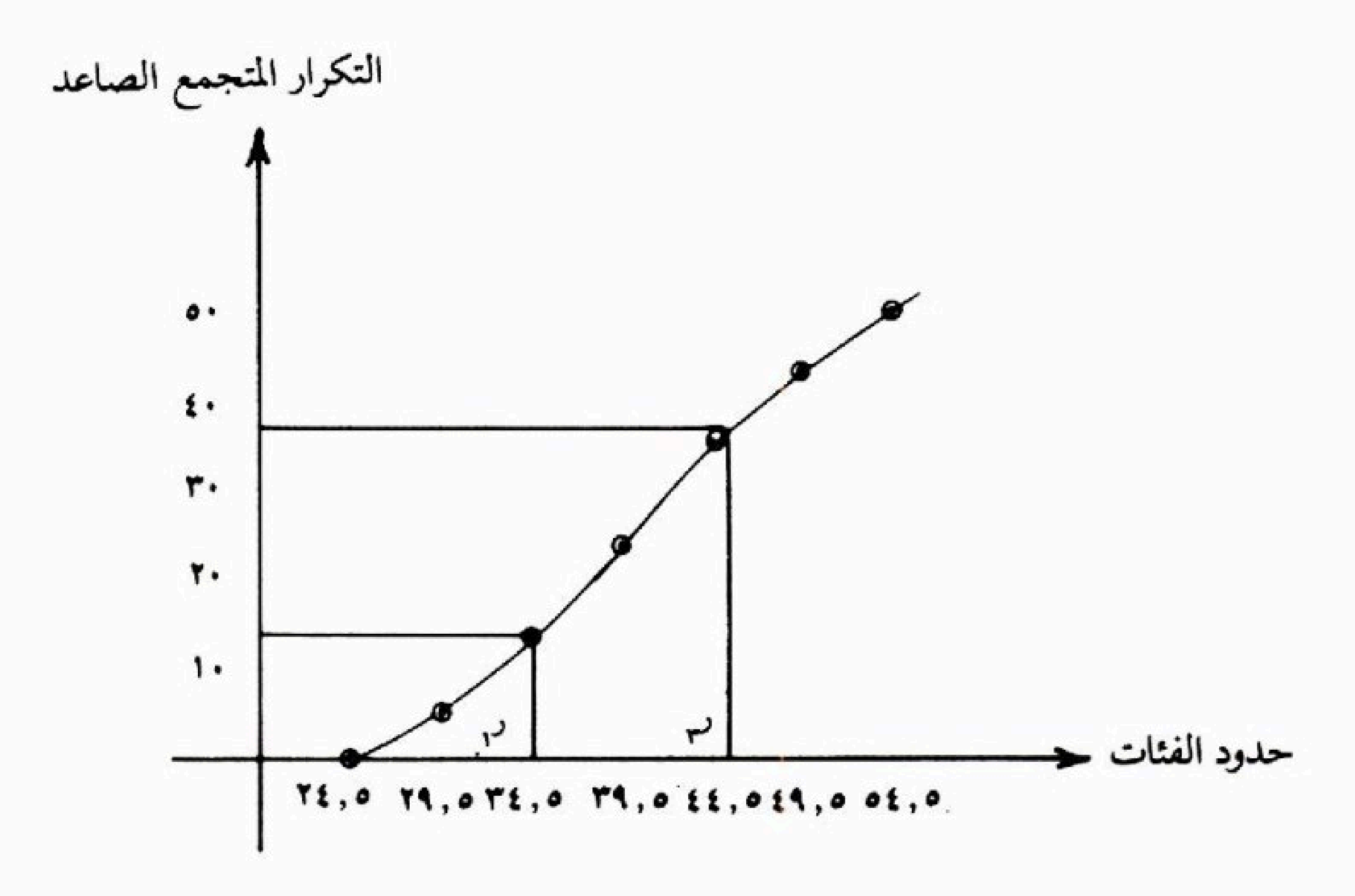
ولحساب قيمة نصف المدى الربيعي (ر) بالطريقة البيانية نرسم المنحنى المتجمع الصاعد من الجدول المتجمع الصاعد السابق. ثم نحدد على محور التكرارات المتجمعة كلا من القيمتين $\frac{ن}{٤}$ ، $\frac{٣\,ن}{٤}$ ، ومنهما نرسم مستقيمين أفقيين متوازيين لمحور الفئات فيقابلان المنحنى الصاعد في النقطتين أ، ب على الترتيب، نسقط عمودين رأسيين على محور الفئات فيقابلانه في النقطتين جـ، د وهما قيمة كل من الربيع الأدنى $ر_١$ ، والربيع الأعلى $ر_٣$ على الترتيب. ونطبق العلاقة (٤)، لنحصل على قيمة نصف المدى الربيعي (ر)، كما هو موضح بالشكل (٤ ـ ١).

مثال (٧) :

أوجد نصف المدى الربيعي بيانيا للأجور اليومية للعمال في مثال (٣) السابق. من الجدول المتجمع الصاعد في مثال (٦) نرسم المنحنى المتجمع الصاعد كما في شكل (٤-٢).



شكل (٤ ـ ١): تحديد الربيعين الأول والثالث بيانيًا



شكل (٤ ـ ٢): تحديد الربيعين الأول والثالث لأجور العمال بيانيًا

نلاحظ من الرسم أن:

($ر_١$) هي قيمة جـ من الرسم = ٣٤,٥ تقريبا

($ر_٣$) هي قيمة د من الرسم = ٤٥,٥ تقريبا

ومن ذلك نجد أن نصف المدى الربيعي ر = $\frac{\text{قراءة (د) - قراءة (جـ)}}{٢}$

$= \frac{٤٥,٥ - ٣٤,٥}{٢}$

= ٥,٥ ريـالا

(٤ ـ ٣ ـ ٣) مزايا نصف المدى الربيعي

١ ـ لا يتأثر بالقيم الشاذة المتطرفة.

٢ ـ يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

(٤ ـ ٣ ـ ٤) عيوب نصف المدى الربيعي

١ ـ لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.

٢ ـ لا يسهل التعامل معه في التحليل الإحصائي.

(٤ ـ ٤) الانحـراف المتوسـط

قبل تعريف الانحراف المتوسط، وتوضيح كيفية حسابه نحتاج إلى استخدام مفهـوم القيمة المطلقة لأي رقم هي قيمته العددية بإشارة موجبة فقط أي أن القيمة المـطلقة للعدد - ٥ هي ٥ وتكتب على الصورة | - ٥| = ٥ وعموما القيمة المطلقة للقراءة ـ س هي س أي | ـ س| = س.

وكذلك المقدار س - ص فإن قيمته المطلقة هي | س - ص | وهكذا.

والآن نستطيع تعريف الانحراف المتوسط في حالة البيانات المبوبة وغير المبوبة.

(٤ ـ ٤ ـ ١) الانحراف المتوسط للبيانات غير المبوبة

يعرَّف الانحراف المتوسط في حالة البيانات غير المبوبة بأنه مجموع الانحرافات المطلقة للقراءات عن وسطها الحسابي مقسوما على عددها. والانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات يحدد مدى تباعد (أو تشتت) مختلف القراءات عن متوسطها باستبعاد الإشارة السالبة كل مرة. مع ملاحظة أن مجموع انحرافات (تباعد) جميع القراءات عن متوسطها يساوي صفرًا.

ولتكن لدينا القراءات

$$س_{١} ، س_{٢} ، \ldots\ldots ، س_{ن}$$

ذات متوسط حسابي $\bar{س}$

فإن انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي $\bar{س}$ هي :

$$(س_{١} - \bar{س})، (س_{٢} - \bar{س})، \ldots\ldots ، (س_{ن} - \bar{س})$$

وتكون الانحرافات المطلقة هي القيم المطلقة لانحرافات القراءات أي أن :

$$|س_{١} - \bar{س}| ، |س_{٢} - \bar{س}| ، \ldots\ldots\ldots ، |س_{ن} - \bar{س}|$$

وعلى ذلك يكون الانحراف المتوسط الذي يعرّف كذلك على أنه الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة، وبالتالي فإن :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{|س_{١} - \bar{س}| + |س_{٢} - \bar{س}| + \ldots + |س_{ن} - \bar{س}|}{ن}$$

$$= \frac{مجـ |س - \bar{س}|}{ن} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٧)$$

مثـــال (٨) :

أوجد الانحراف المتوسط لأعمار عينة مكونة من ٨ موظفين في مثال (٤).

نحسب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

أي أن :

$$\bar{س} = \frac{١}{٨} (٤٠ + ٤٥ + ٣٠ + ٢٥ + ٢٧ + ٢٠ + ٢١ + ٣٥)$$

$$= \frac{١}{٨} (٢٤٣) = ٣٠,٣٧٥ \text{ ريـالا}$$

ومن ذلك يكون :

الانحراف المتوسط

$$= \frac{١}{٨} (|٤٠ - ٣٠,٣٧٥| + |٤٥ - ٣٠,٣٧٥| + \cdots + |٣٥ - ٣٠,٣٧٥|)$$

$$= \frac{١}{٨} (٩,٦٢٥ + ١٤,٦٢٥ + ٠,٣٧٥ + ٥,٣٧٥ + ٣,٣٧٥ + ١٠,٣٧٥ + ٩,٣٧٥ + ٤,٦٢٥)$$

$$= \frac{٥٧,٧٥٠}{٨} = ٧,٢١٨٧٥ \text{ ريالا}$$

(٤ ـ ٤ ـ ٢) الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة

إذا كانت لدينا التكرارات

$ك_١$ ، $ك_٢$، . . . . ، ك لمجموعة عددها م من الفئات التي مراكزها على الترتيب هي :

$س_١$، $س_٢$، . . . . ، $س_م$

فإنه يمكن تعريف الانحراف المتوسط كالتالي :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{ك_١|س_١ - \bar{س}| + ك_٢|س_٢ - \bar{س}| + \cdots + ك_م|س_م - \bar{س}|}{ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_ن}$$

$$= \frac{مج\ ك|س - \bar{س}|}{مج\ ك}$$

$$= \frac{مج\ ك|س - \bar{س}|}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

حيث إن ن = مج ك .

مثـال (٩):

احسب الإنحراف المتوسط لأجور العمال في مثال (٣) السابق.

الحـل

ولإيجاد ذلك يجب أن نكوّن الجدول التالي وذلك لتبسيط الحسابات.

جدول التوزيع التكراري للأجور لمجموعة من العمال

الفئـات	مراكز الفئات س	ك	ك س	س - $\bar{س}$	|س - $\bar{س}$|	ك|س - $\bar{س}$|
٢٥ - ٢٩	٢٧	٥	١٣٥	١٢,٩-	١٢,٩	٦٤,٥
٣٠ - ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦	٧,٩-	٧,٩	٦٣,٢
٣٥ - ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠	٢,٩-	٢,٩	٢٩,٠٠
٤٠ - ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٢,١	٢٧,٣
٤٥ - ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٧,١	٥٦,٨
٥٠ - ٥٤	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٢,١	٧٢,٦
المجموع		٥٠	١٩٩٥			٣١٣,٤

وبذلك يكون الوسط الحسابي هو:

$$\bar{س} = \frac{مج\ ك\ س}{ن} = \frac{١٩٩٥}{٥٠} = ٣٩,٩٠ \text{ ريالا}$$

$$\therefore \text{الانحراف المتوسط} = \frac{مج\ ك|س - \bar{س}|}{ن} = \frac{٣١٣,٤}{٥٠} = ٦,٢٧ \text{ ريـالا}$$

(٤ - ٤ - ٣) مميزات الانحراف المتوسط

١ - يأخذ جميع القيم في الاعتبار.

(٤ ـ ٤ ـ ٤) عيوب الانحراف المتوسط

١ ـ مقياس صعب الحساب وخاصة عندما يكون المتوسط عددًا كسريًا.

٢ ـ يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

(٤ ـ ٥) التباين والانحراف المعياري

يعتبر التباين والانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت المستخدمة في كثير من المسائل الإحصائية. يعرَّف التباين لمجموعة من القراءات عددها «ن» مثلا بأنه متوسط مربعات انحرافات تلك القراءات عن وسطها الحسابي، ويرمز له بالرمز (تبا) وتقرأ (تباين) أي إنه إذا كانت لدينا القراءات من مجتمع

$س_١$، $س_٢$، . . . . . .، $س_ن$

فإن الوسط الحسابي $\bar{س}$ يكون

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

ومربع الانحرافات عن $\bar{س}$ هي:

$$(س_١ - \bar{س})^٢ ،\ (س_٢ - \bar{س})^٢ ،\ . . . . ،\ (س_ن - \bar{س})^٢$$

وبذلك يكون التباين (تبا) كالتالي:

$$تبا = \frac{١}{ن}\ [(س_١ - \bar{س})^٢ + (س_٢ - \bar{س})^٢ + ... + (س_ن - \bar{س})^٢]$$

$$= \frac{١}{ن}\ مجـ\ (س - \bar{س})^٢$$

وتتلخص فكرة حسابه في حساب الانحرافات عن أحد مقاييس الموضع، ويستعمل الوسط الحسابي وحده لهذا الغرض. ومركزه بين مقاييس التشتت كمركز الوسط الحسابي بين مقاييس النزعة المركزية. أما الجذر التربيعي للتباين فهو ما يسمى الانحراف المعياري، ويرمز له بالرمز (نحر)، ويعتبر الانحراف المعياري من أهم وأدق وأفضل مقاييس التشتت، وذلك لسهولة حسابه، وسهولة التعامل معه في التحليل الإحصائي. ومن المعلوم عند دراسة أي ظاهرة من الظواهر في الحياة العملية أنّ المشاهدات تكون مأخوذة بالعينة، وهنا يفضل حساب التباين من العلاقة التالية:

$$تبا = \frac{١}{ن - ١} مج (س - \bar{س})^٢ \quad .... (٩)$$

حيث إن «ن» عدد مفردات العينة. . ومن الجذر التربيعي للتباين نحصل على الانحراف المعياري أي أن

$$نحر = \sqrt{\frac{١}{(ن - ١)} مج (س - \bar{س})^٢} \quad .... (١٠)$$

والجذر التربيعي يعطينا قياسًا للتشتت بنفس وحدات المتغير س.
وسوف نتناول طريقة حساب التباين والانحراف المعياري في كل من البيانات غير المبوبة، والبيانات المبوبة كالتالي.

(٤ ـ ٥ ـ ١) التباين والانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة

إذا كانت لدينا القراءات التالية $س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$
فإن التباين يعطي بالعلاقة (٩) والانحراف المعياري بالعلاقة (١٠)، وسوف نوضح طريقة الحساب في المثال التالي.

مثال (١٠)

أوجد التباين والانحراف المعياري لأعمار عينة من الموظفين بياناتها في مثال (٤) السابق كالتالي:

٤٠، ٤٥، ٣٠، ٢٥، ٢٧، ٢٠، ٢١، ٣٥

نكوّن الجدول التالي:

س	(س – س)	(س – س)^٢
٤٠	٩,٦٣	٩٢,٥٤
٤٥	١٤,٦٣	٢١٣,٧٤
٣٠	-٠,٣٨	٠,١٤
٢٥	-٥,٣٨	٢٨,٩٤

س	(س - $\bar{س}$)	$(س - \bar{س})^2$
٢٧	-٣,٣٨	١١,٤٣
٢٠	-١٠,٣٨	١٠٧,٧٤
٢١	-٩,٣٨	٨٧,٩٨
٣٥	٤,٦٣	٢١,٣٤
٢٤٣		٥٦٣,٨٤

ومن ذلك يكون الوسط الحسابي:

$$\bar{س} = \frac{١}{ن} مجـ س = \frac{٢٤٣}{٨} = ٣٠,٣٨ \text{ سنة}$$

$$تبا = \frac{١}{ن - ١} مجـ (س - \bar{س})^2$$

$$تبا = \frac{١}{٧} (٥٦٣,٨٤) = ٨٠,٥٥$$

والإنحراف المعياري هو:

$$نحر = \sqrt{٨٠,٥٥} = ٨,٩٨ \text{ سنة}$$

نلاحظ عند حساب التباين والإنحراف المعياري باستخدام العلاقتين (٩) و (١٠) السابقتين أنه لا بد من حساب الوسط الحسابي $\bar{س}$ وطرحه من جميع القيم. ومن المعلوم أن الوسط قد يكون عددًا كسريًا مما يزيد من صعوبة الحسابات والتعرض للأخطاء. مما دعت الحاجة إلى إيجاد صيغ أخرى مستنتجة منها تكون أبسط في الحساب كالتالي:

$$تبا = \frac{١}{ن - ١}\left(مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}\right) \quad .... (١١)$$

$$\text{نحـر} = \sqrt{\frac{1}{(\text{ن} - 1)}\left(\text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}\right)}$$

لإثبات العلاقة (١١) من العلاقة (٩) كالتالي:

$$\because \text{تبا} = \frac{1}{\text{ن} - 1} \text{ مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^2$$

$$= \frac{1}{\text{ن} - 1} \text{ مجـ } (\text{س}^2 - 2\,\bar{\text{س}}\,\text{س} + \bar{\text{س}}^2)$$

$$= \frac{1}{\text{ن} - 1} (\text{مجـ س}^2 - 2\,\bar{\text{س}} \text{ مجـ س} + \text{ن}\,\bar{\text{س}}^2)$$

$$= \frac{1}{\text{ن} - 1} \left(\text{مجـ س}^2 - \frac{2}{\text{ن}}(\text{مجـ س})^2 + \frac{1}{\text{ن}}(\text{مجـ س})^2\right)$$

$$\therefore \text{تبا} = \frac{1}{\text{ن} - 1}\left(\text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}\right)$$

ويكون الانحراف المعياري هو:

$$\text{نحـر} = \sqrt{\text{تبا}}$$

مثـــال (١١)

حل مثال (١٠) السابق باستخدام العلاقة (١١)

نكوّن جدول الحل التالي:

س	س^2
٤٠	١٦٠٠
٤٥	٢٠٢٥
٣٠	٩٠٠
٢٥	٦٢٥
٢٧	٧٢٩

س	$س^2$
٢٠	٤٠٠
٢١	٤٤١
٣٥	١٢٢٥
٢٤٣	٧٩٤٥

وبذلك يكون التباين:

$$تبا = \frac{1}{ن - 1}\left(مجـ\ س^2 - \frac{(مجـ\ س)^2}{ن}\right)$$

وبالتعويض يكون لدينا

$$تبا = \frac{١}{٧}\left(٧٩٤٥ - \frac{٥٩٠٤٩}{٨}\right)$$

$$= \frac{٥٦٣,٨٨}{٧} = ٨٠,٥٥$$

والانحراف المعياري هو:

$$نحـر = \sqrt{٨٠,٥٥} = ٨,٩٨ \text{ سنة}$$

وهي نفس النتيجة في مثال (١٠) السابق. ونستنتج أن هذه الطريقة أسهل في الحساب من الحساب باستخدام العلاقة (٩) السابقة في مثال (١٠). وفي بعض الأحيان قد تكون قيم المتغير «س» للظاهرة محل الدراسة كبيرة، وبذلك تكون مربعات القيم كبيرة جدًا مما يجعل الحساب بالعلاقة (١١) صعبًا إلى حد ما. مما جعلنا نفكر في تبسيط القيم قبل الحساب، وذلك باستخدام الخاصية المهمة التي يتميز بها كل من التباين والانحراف المعياري، وهي إذا طرحنا أو جمعنا مقدارَ ثابت (أ) من جميع القيم فإن التباين والانحراف المعياري لا يتأثر بالقيم نفسها، وإنما يتأثر بمقدار التفاوت بين القراءات، أي مقدار التقارب أو التباعد للقيم عن بعضها ونوضح ذلك كما يلي:

نفرض أنه لدينا القراءات :

$$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots\ldots ، س_ن$$

فإذا طرحنا مقدارًا ثابت ا من جميع القراءات السابقة فنحصل على الانحرافات التالية :

$$ح_١ ، ح_٢ ، \ldots\ldots ، ح_ن$$

حيث إن ح = س - ا، وبذلك يكون التباين :

$$تبا = \frac{١}{ن - ١}\left(مجـ ح^٢ - \frac{(مجـ ح)^٢}{ن}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٢)$$

والانحراف المعياري يكون :

$$نحـر = \sqrt{تبـا}$$

وبذلك يكون الحل في مثال (١١) بتطبيق العلاقة (١٢) كالتالي :

نختار مقدارًا ثابتًا ا = ٣٠ (قيمة متوسطة بين القراءات) ونكوّن جدول الحل التالي

س	ح = س - ٣٠	$ح^٢$
٤٠	١٠	١٠٠
٤٥	١٥	٢٢٥
٣٠	٠	٠
٢٥	٥-	٢٥
٢٧	٣-	٩
٢٠	١٠-	١٠٠
٢١	٩-	٨١
٣٥	٥	٢٥
المجموع	٣	٥٦٥

ومن الجدول نجد :

$$\therefore \text{تبا} = \frac{١}{ن - ١}\left(\text{مجـ } ح^٢ - \frac{(\text{مجـ } ح)^٢}{ن}\right)$$

$$\therefore \text{تبا} = \frac{١}{٧}\left(٥٦٥ - \frac{٩}{٨}\right)$$

$$= \frac{١}{٧}\,(٥٦٥ - ١,١٣) = \frac{٥٦٣,٨٧}{٧} = ٨٠,٥٥$$

$$\text{نحـر} = \sqrt{\text{تبـا}}$$

$\therefore$ نحـر = $\sqrt{٨٠,٥٥} = ٨,٩٨$ سنـة

وهي النتائج السابقة نفسها. ونلاحظ صغر القيم في الحسابات التي حصلنا عليها بهذه الطريقة.

(٤ ـ ٥ ـ ٢) التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة:

إذا كان لدينا التكرارات

$ك_١$، $ك_٢$، ....، $ك_م$

لفئات عددها م ومراكزها هي

$س_١$، $س_٢$، ....، $س_م$ على الترتيب

فإن التباين والإنحراف المعياري يعطى كالتالي:

$$\text{تبـا} = \frac{١}{ن - ١}\ \text{مجـ } ك\,(س - \bar{س})^٢ \quad .... \quad (١٣)$$

$$\text{نحـر} = \sqrt{\frac{١}{(ن - ١)}\ \text{مجـ } ك\,(س - \bar{س})^٢}$$

ويمكن كتابة الصيغة المبسطة (١١) والصيغة المختصرة (١٢) باستخدام وسط فرضي أ، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة في حالة البيانات غير المبوبة كالتالي:

$$\text{تبا} = \frac{١}{ن - ١}\left(\text{مجـ } ك\,س^٢ - \frac{(\text{مجـ } ك\,س)^٢}{ن}\right) \quad .... \quad (١٤)$$

و

$$\text{تبا} = \frac{\text{١}}{\text{ن} - \text{١}} \left(\text{مجـ ك ح}^{\text{٢}} - \frac{(\text{مجـ ك ح})^{\text{٢}}}{\text{ن}} \right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (\text{١٥})$$

وقد وجد عمليا أنه لسهولة الحسابات يفضل أن يكون الوسط الفرضي أ مساويًا مركز الفئة التي يناظرها أكبر تكرار.

مثال (١٢)

احسب التباين والانحراف المعياري في مثال (٣)، وذلك باستخدام العلاقات (١٣)، (١٤)، (١٥) على الترتيب.

الحـــل

لحســاب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٣) نكون جدول الحل كالتالي:

الفئـــات	س	م	ك س	$\text{س} - \bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{\text{٢}}$	$\text{ك} (\text{س} - \bar{\text{س}})^{\text{٢}}$
٢٥ ـ ٢٩	٢٧	٥	١٣٥	-١٢,٩	١٦٦,٤١	٨٣٢,٠٥
٣٠ ـ ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦	-٧,٩	٦٢,٤١	٤٩٩,٢٨
٣٥ ـ ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠	-٢,٩	٨,٤١	٨٤,١٠
٤٠ ـ ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	٥٧,٣٣
٤٥ ـ ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٤٠٣,٢٨
٥٠ ـ ٥٤	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٨٧٨,٤٦
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٢٧٥٤,٥٠

ومن ذلك يكون الوسط الحسابي هو:

$$\bar{س} = \frac{١}{ن} \text{ مج ك س}$$

$$= \frac{١}{٥٠} (١٩٩٥)$$

$$= ٣٩,٩٠ \text{ ريالا}$$

أما التباين فهو

$$\text{تبا} = \frac{١}{ن - ١} \text{ مج ك } (س - \bar{س})^٢$$

$$= \frac{١}{٤٩} (٢٧٥٤,٥٠)$$

$$= ٥٦,٢١$$

أما الإنحراف المعياري فيكون

$$\text{نحــر} = \sqrt{٥٦,٢١}$$

$$= ٧,٥٠ \text{ ريـالات}$$

ولحساب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٤) نكوّن الجدول التالي:

الفئـات	س	$س^٢$	ك	ك س	$ك س^٢$
٢٥ - ٢٩	٢٧	٧٢٩	٥	١٣٥	٣٦٤٥
٣٠ - ٣٤	٣٢	١٠٢٤	٨	٢٥٦	٨١٩٢
٣٥ - ٣٩	٣٧	١٣٦٩	١٠	٣٧٠	١٣٦٩٠
٤٠ - ٤٤	٤٢	١٧٦٤	١٣	٥٤٦	٢٢٩٣٢
٤٥ - ٤٩	٤٧	٢٢٠٩	٨	٣٧٦	١٧٦٧٢
٥٠ - ٥٤	٥٢	٢٧٠٤	٦	٣١٢	١٦٢٢٤
المجموع	-	-	٥٠	١٩٩٥	٨٢٣٥٥

$$\text{تبا} = \frac{١}{\text{ن} - ١}\left(\text{مجـ ك س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ك س})^{٢}}{\text{ن}}\right)$$

$$= \frac{١}{٤٩}\left(٨٢٣٥٥ - \frac{٣٩٨٠٠٢٥}{٥٠}\right)$$

$$= ٥٦,٢١$$

ومن ذلك يكون:

$$\text{نحـــر} = \sqrt{٥٦,٢١} = ٧,٥٠ \text{ ريال}$$

ولحساب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٥) نكوّن جدول الحل التالي بعد اختيار ا = ٤٢ لتناظرها لأكبر تكرار

الفئـــات	س	ك	ح = س - ٤٢	$ح^{٢}$	ك ح	$ك ح^{٢}$
٢٥ - ٢٩	٢٧	٥	١٥-	٢٢٥	٧٥-	١١٢٥
٣٠ - ٣٤	٣٢	٨	١٠-	١٠٠	٨٠-	٨٠٠
٣٥ - ٣٩	٣٧	١٠	٥-	٢٥	٥٠-	٢٥٠
٤٠ - ٤٤	٤٢	١٣	٠	٠	٠	٠
٤٥ - ٤٩	٤٧	٨	٥	٢٥	٤٠	٢٠٠
٥٠ - ٥٤	٥٢	٦	١٠	١٠٠	٦٠	٦٠٠
المجموع	-	٥٠	-	-	١٠٥-	٢٩٧٥

$$\text{تبا} = \frac{١}{\text{ن} - ١}\left(\text{مجـ ك ح}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ك ح})^{٢}}{\text{ن}}\right)$$

$$= \frac{١}{٤٩}\left(٢٩٧٥ - \frac{(-١٠٥)^{٢}}{٥٠}\right)$$

$$= \frac{١}{٤٩}(٢٩٧٥ - ٢٢٠,٥) = ٥٦,٢١$$

أما الانحراف المعياري فيكون :

نحـــر = $\sqrt{\text{٥٦,٢١}}$ = ٧,٥٠ ريـــال

ونلاحظ أن قيمة التباين والانحراف المعياري المحسوبة بالطرق الثلاث السابقة لا تتغير.

(٤ ـ ٥ ـ ٣) مميزات الانحراف المعياري

١ ـ يأخذ جميع القيم في الاعتبار، ويعتبر من أدق مقاييس التشتت.

٢ ـ يدخل في معظم التحاليل الإحصائية لسهولة التعامل معه رياضيا.

(٤ ـ ٥ ـ ٤) عيوب الانحراف المعياري

١ ـ يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).

٢ ـ يصعب حسابه في البيانات الوصفية، والبيانات الكمية ذات الجداول التكرارية المفتوحة.

(٤ ـ ٦) مقاييس التشتت النسبية

سبق لنا دراسة المدى ونصف المدى الربيعي، والانحراف المتوسط والانحراف المعياري، وجميعها مقاييس للتشتت. لها وحدات حسب طبيعة الظاهرة محل الدراسة. ولذلك فإنها تصلح للمقارنة بين الظواهر التي لها نفس الوحدات، مثل مقارنة تشتت أطوال مجموعة من جنود البحرية مع تشتت أطوال مجموعة من جنود الطيران، أو مقارنة تشتت أوزان مجموعة من طلاب جامعة الملك سعود مع تشتت أوزان مجموعة من طلاب جامعة الملك عبدالعزيز وهكذا. أما إذا رغبنا في المقارنة بين ظاهرتين لكل منهما وحدات تختلف عن الأخرى مثل مقارنة تشتت أطوال مجموعة من الطلاب مع تشتت أوزانهم فإن المقاييس السابقة للتشتت لا تصلح للمقارنة، وذلك لاختلاف الوحدات، لأن التشتت للأطوال يقاس بالسنتمتر، والأوزان تقاس بالكيلوجرام مثلا. لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقياس نسبي لا يعتمد على الوحدات، ويسمى هذا المقياس معامل الاختلاف، ويعرَّف كالتالي:

$$\text{معامل الاختلاف النسبي} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٦)$$

$$\text{أو معامل الاختلاف المئوي} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠ \quad \ldots\ldots \quad (١٧)$$

أما في حالة كون جداول التوزيعات التكرارية مفتوحة بإنه للتغلب على ذلك يعرَّف معامل الاختلاف النسبي أو المئوي باستخدام الربيعات كالتالي:

$$\text{معامل الاختلاف النسبي} = \frac{\text{الربيع الأعلى } (ر_٣) - \text{الربيع الأدنى } (ر_١)}{\text{الربيع الأعلى } (ر_٣) + \text{الربيع الأدنى } (ر_١)} \quad \ldots \quad (١٨)$$

$$\text{معامل الاختلاف المئوي} = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠ \quad \ldots\ldots \quad (١٩)$$

مثـــال (١٣)

احسب معامل الاختلاف لأجور العمال في مثال (٣) السابق

أولا: باستخدام معامل الاختلاف النسبي المعرّف بالعلاقة (١٦) والعلاقة (١٧).

ثانيا: باستخدام معامل الاختلاف المعطى بالعلاقة (١٨) والعلاقة (١٩).

الحـــل

سبق حساب كل من $\bar{س}$ = ٣٩,٩٠ ريال والانحراف المعياري = ٧,٥٠ ريال.

وبذلك يكون:

$$\text{معامل الاختلاف النسبي} = \frac{٧,٥٠}{٣٩,٩٠} = ٠,١٨٨$$

$$\text{معامل الاختلاف المئوي} = \frac{٧,٥٠}{٣٩,٩٠} \times ١٠٠ = ١٨,٨٠\%$$

سبق حساب $ر_٣$ = ٤٥,٤٤ ، $ر_١$ = ٣٥,٤٤

وبذلك يكـــون:

معامل الاختلاف النسبي $= \frac{ر_3 - ر_1}{ر_3 + ر_1}$

$= \frac{٤٥,٤٤ - ٣٥,٤٤}{٤٥,٤٤ + ٣٥,٤٤}$

$= ٠,١٢٤$

∴ معامل الاختلاف المئوي = ٠,١٢٤ × ١٠٠ = ١٢,٤٪

ويلاحظ أنه يوجد اختلاف بين قيمتي معامل الاختلاف باستخدام العلاقة (١٦) والعلاقة (١٨) وذلك لاختلاف الأساس الرياضي في كل من التعريفين السابقين ويفضل التعريف الأول إذا كانت جداول التوزيعات التكرارية غير مفتوحة وذلك لدقته.

(٤ ـ ٧) العزوم والالتواء والتفلطح

(٤ ـ ٧ ـ ١) العـزوم

يعرَّف العزم الرائي إذا كانت لدينا مجموعة من القراءات $س_1$، $س_2$، ......، $س_ن$ بالعلاقة الآتية:

العزم الرائي $= \frac{\text{مج } س^ر}{ن}$ .... (٢٠)

ويسمى هذا العزم بالعزم الرائي حول نقطة الأصل، أو العزم الرائي غير المركزي وإذا كانت ر = ١ فإنه يسمى العزم الأول حول نقطة الأصل، وهو يساوي الوسط الحسابي $\bar{س}$.

أي أن

العزم الأول حول نقطة الأصل $= \frac{\text{مج } س}{ن} = \bar{س}$

ويعرف العزم الرائي حول الوسط الحسابي بالعزم الرائي المركزي كالتالي:

العزم الرائي المركزي $= \frac{\text{مج } (س - \bar{س})^ر}{ن}$ .... (٢١)

وفي هذه الحالة عندما ر = ١

فإن العزم الأول المركزي = صفرًا

وعندما ر = ٢

فإن العزم الثاني المركزي $= \frac{مجـ (س - \bar{س})^{٢}}{ن}$ وهذا يساوي التباين

وعندما ر = ٣

فإن العزم الثالث المركزي $= \frac{مجـ (س - \bar{س})^{٣}}{ن}$

عندما ر = ٤

فإن العزم الرابع المركزي $= \frac{مجـ (س - \bar{س})^{٤}}{ن}$ .... وهكذا

وبالمثل في حالة البيانات المبوبة فإن العلاقتين (٢٠)، (٢١) يمكن كتابتهما كالتالي:

العزم الرائي حول نقطة الأصل $= \frac{مجـ ك س^{ر}}{مجـ ك} = \frac{مجـ ك س^{ر}}{ن}$ ... (٢٢)

حيث ن = مجـ ك وذلك عندما يكون لدينا مراكز فئات $س_{١}$، $س_{٢}$، ......، $س_{م}$

لها تكرارات $ك_{١}$، $ك_{٢}$ ......، $ك_{م}$

ويكون أيضا

العزم الرائي المركزي $= \frac{مجـ ك (س - \bar{س})^{ر}}{ن}$ ... (٢٣)

ونلاحظ أن العزم الأول حول نقطة الأصل بوضع ر = ١ في (٢٢) ويكون هو الوسط الحسابي، وأن العزم الأول المركزي ر = ١ في (٢٣) يساوي صفرا، وأن العزم الثاني المركزي ر = ٢ في (٢٣) يساوي التباين، وبطريقة مماثلة لها في البيانات غير المبوبة يمكن حساب العزوم الأخرى.

مثـــال (١٤)

احسب العزم الأول والعزم الثاني حول نقطة الأصل، وكذلك كلا من العزم الأول المركزي والعزم الثاني المركزي لمجموعة البيانات:

٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ١٠

لسهولة الحل نكوّن الجدول التالي:

س	$س^2$	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
٢	٤	٤-	١٦
٤	١٦	٢-	٤
٥	٢٥	١-	١
٧	٤٩	١	١
٨	٦٤	٢	٤
١٠	١٠٠	٤	١٦
٣٦	٢٥٨		٤٢

نحسب $\bar{س}$ وهو العزم الأول حول نقطة الأصل من القانون $\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$

أي أن $\bar{س} = \frac{٣٦}{٦} = ٦$

العزم الثاني غير المركزي $= \frac{مجـ\ س^2}{ن}$

$= \frac{٢٥٨}{٦} = ٤٣$

العزم الأول المركزي $= \frac{مجـ\ (س - \bar{س})}{ن} =$ صفـرًا

العزم المركزي الثاني $= \frac{مجـ\ (س - \bar{س})^2}{ن}$

$= \frac{٤٢}{٦} = ٧$

أما البيانات المبوبة فسوف نرى كيفية حساب العزوم في مثال (١٥).

(٤ ـ ٧ ـ ٢) الالتــواء

لقد سبق أن أوضحنا أشكال المنحنيات للتوزيعات التكرارية المختلفة، وذكرنا منها ما هو متماثل وما هو غير متماثل، وذلك بشكل بياني، من الملاحظ أن الأشكال البيانية عادة تكون تقريبية، ولا تعطي قيمة محددة.

ولقد سبق أن ذكرنا في مقاييس النزعة المركزية إذا كانت المنحنيات متماثلة أن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تكون متطابقة، أي متساوية في القيمة، وفي حالة عدم التماثل فإنها قد تكون ملتوية ناحية اليمين، فيكون الوسط الحسابي أكبرها، يليه الوسيط، ثم المنوال. وإما ملتوية ناحية اليسار فيكون الوسط الحسابي أصغرها، يليه الوسيط، ثم المنوال.

وكل ما سبق يكون غير كافٍ لقياس الالتواء مما دعت الحاجة لإيجاد مقياس للالتواء يفيد في المقارنات ودراسة طبيعة التوزيعات المختلفة. ويحدد لنا هذا المقياس مدى بعد شكل منحنى التكرار عن التماثل حول أحد مقاييس الموضع المختلفة. وتحدد قيمته عادة بمعامل الالتواء الذي يحسب بعدة طرق، كما سنرى فيما يلي، تختلف قيمها باختلاف اختيار مقياس الموضع.

مقياس الالتواء لبيرسون (Pearson)

يعرف معامل بيرسون للالتواء كالتالي:

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢٤)$$

أو

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{٣(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}} \quad \ldots\ldots (٢٥)$$

ومعامل بيرسون للالتواء يعطي نتائج مقبولة عندما يكون الالتواء بسيطا، ويفشل عندما تكون المنحنيات شديدة الالتواء، أو في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

مقياس الالتواء لباولي Bowely

ويعرف معامل الالتواء لباولي كالآتي:

$$\text{معامل الالتواء لباولي} = \frac{(\text{الربيع الأعلى} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى})}{(\text{الربيع الأعلى} - \text{الوسيط}) + (\text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى})}$$

.... (٢٦)

وهذه العلاقة تفيد في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة والمغلقة.

مقياس الالتواء بطريقة العزوم

ويعرف معامل الالتواء كالتالي:

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^3} \quad \text{........ (٢٧)}$$

ونوضح العلاقات الثلاث السابقة لحساب معامل الالتواء بالمثال التالي:

مثـــال (١٥)

أوجد معامل الالتواء لبيرسون ولباولي وباستخدام طريقة العزوم، وذلك في حالة أجور العمال في مثال (٣) السابق.

الحـــل

لقد سبق أن حسبنا في الأمثلة (٣)، (٩)، (١٢) في الفصل الثالث وكان الوسط الحسابي = ٣٩,٩٠ ريالا، الوسيط = ٤٠,٢٧ ريالا، المنوال = ٤١,٣٨ ريالا وفي مثال (١٢) السابق الانحراف المعياري = ٧,٥ ريالات.

وعليه فإن

$$\text{معامل الالتواء لبيرسون} = \frac{\text{الوسط الحسابي - المنوال}}{\text{الانحـراف المعيـاري}}$$

$$= \frac{٤١,٣٨ - ٣٩,٩}{٧,٥} = -٠,١٩٧$$

أي أن الالتواء سالب فيكون جهة اليسار ومقداره صغير لقرب المقدار −١٩٧,٠ من الصفر.

أو باستخدام العلاقة (٢٥) يكون

$$\text{معامل الالتواء لبيرسون} = \frac{\text{٣(الوسط الحسابي - الوسيط)}}{\text{الانحـراف المعيـاري}}$$

$$= \frac{٣(٣٩,٩٠ - ٤٠,٢٧)}{٧,٥} = -٠,١٤٨$$

باستخدام العلاقة (٢٦) يكون

$$\text{معامل الالتواء لباولي} = \frac{(\text{ر}_٣ - \text{ر}_٢) - (\text{ر}_٢ - \text{ر}_١)}{(\text{ر}_٣ - \text{ر}_٢) + (\text{ر}_٢ - \text{ر}_١)}$$

$$= \frac{(٤٥,٤٤ - ٤٠,٢٧) - (٤٠,٢٧ - ٣٥,٤٤)}{(٤٥,٤٤ - ٤٠,٢٧) + (٤٠,٢٧ - ٣٥,٤٤)}$$

$$= \frac{٥,١٧ - ٤,٨٣}{٥,١٧ + ٤,٨٣} = \frac{٠,٣٤}{١٠,٠٠}$$

$$= ٠,٠٣٤$$

باستخدام العلاقة (٢٧) يكون

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث المركزي}}{(\text{الانحـراف المعيـاري})^{٣}}$$

ولحساب ذلك نكوّن جدول الحل التالي :

الفئـات	س	ك	ك س	س - سَ	(س - سَ)٢	ك (س - سَ)٢	ك (س - سَ)٣
٢٥ـ٢٩	٢٧	٥	١٣٥	١٢,٩-	١٦٦,٤١	٨٣٢,٠٥	١٠٧٣٣,٤٥-
٣٠ـ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦	٧,٩-	٦٢,٤١	٤٩٩,٢٨	٣٩٤٤,٣١-
٣٥ـ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠	٢,٩-	٨,٤١	٨٤,١٠	٢٤٣,٨٩-
٤٠ـ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	٥٧,٣٣	١٢٠,٣٩
٤٥ـ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٤٠٣,٢٨	٢٨٦٣,٢٩
٥٠ـ٥٤	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٨٧٨,٤٦	١٠٦٢٩,٣٧
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٢٧٥٤,٥٠	١٣٠٨,٦-

سَ = مجـ ك س / ن = ١٩٩٥ / ٥٠ = ٣٩,٩٠ ريـالا

التباين = مجـ ك (س - سَ)٢ / ن ـ ١ = ١ / ٤٩ (٢٧٥٤,٥) = ٥٦,٢١

الانحراف المعياري = √٥٦,٢١ = ٧,٥ ريـالا

العزم الثالث = مجـ ك (س - سَ)٣ / ن = ١ / ٥٠ (-١٣٠٨,٦)

= -٢٦,١٧

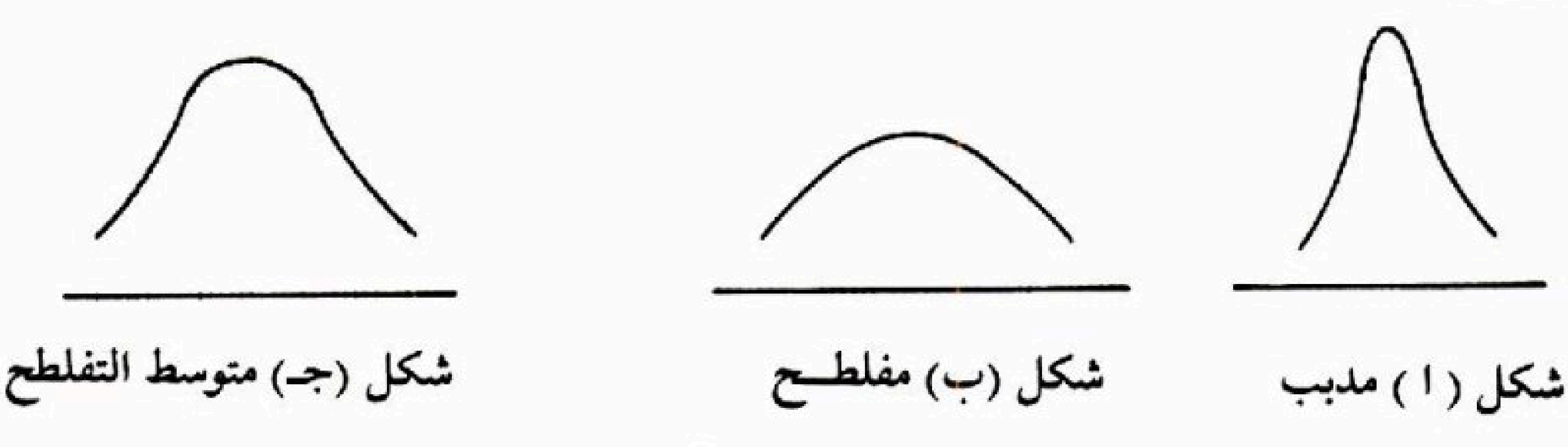
معامل الالتواء = -٢٦,١٧ / (٧,٥)٣ = -٢٦,١٧ / ٤٢١,٨٨

= -٠,٠٦٢

ويلاحظ من حساب معامل الالتواء بالطرق الثلاث السابقة أن الالتواء سالب، أي جهة اليسار وأنه التواء بسيط، وذلك لقرب قيمته من الصفر.

(٤ ـ ٧ ـ ٣) التفلطـــح

سبق لنـا دراسـة طرق عرض التـوزيعات التكرارية بيانيًّا، ورسم المنحنيات التكـرارية لها، ومعـرفـة المنحنيات المتماثلة وغير المتماثلة (أي الملتوية) وقياس معامل الالتـواء لها. والآن سوف نتنـاول كيفية مقـدار التفلطح لهذه المنحنيات التكرارية، وطريقة قياسه بالنسبة للمنحنى المتماثل الذي يسمى المنحنى الطبيعي، التفلطح يقيس مقدار التدبب لقمة هذه المنحنيات ارتفاعًا أو انخفاضًا بالنسبة لقمة التوزيع الطبيعي الذي يسمى متوسط التفلطح. فيما يلي بعض أشكال توضح من خلالها أنواع التفلطح المختلفة.



شكل (ا) مدبب — شكل (ب) مفلطـــح — شكل (جـ) متوسط التفلطح

شكل (٤ ـ ٣): بعض أشكال التفلطح

ونلاحظ ما يلي:

شكل (ا): له قمة عالية نسبيا ويسمى منحنى مدبب.

شكل (ب): له قمة مسطحة ويسمى منحنى مفلطح.

شكل (جـ): له قمة ليست مدببة ولا مفلطحة ويسمى منحنى متوسط التفلطح (أو المنحنى الطبيعي) ومعامل تفلطحه يساوي ثلاثة.

ولقياس معامل التفلطح تستخدم إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى

معامل التفلطح بدلالة العزوم وهو يساوي خارج قسمة العزم الرابع المركزي على الانحراف المعياري مرفوعا للقوى ٤ أي أن:

$$\text{معامل التفلطح العزمي} = \frac{\text{العزم الرابع المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^{4}} \quad \ldots\ldots\ (٢٨)$$

الطريقة الثانية

معامل التفلطح باستخدام الربيعات والمئينات ويعرف كالتالي:

$$\text{معامل التفلطح} = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢(م_{٩٠} - م_{١٠})} \qquad \text{.................} \qquad (٢٩)$$

حيث إن:

$ر_٣$ = الربيع الأعلى

$ر_١$ = الربيع الأدنى

$م_{٩٠}$ = المئين التسعين

$م_{١٠}$ = المئين العاشر

ونوضح كلا من الطريقتين بالمثال التالي.

مثـال (١٦)

احسب معامل التفلطح باستخدام الطريقتين السابقتين لأجور العمال في مثال (٣) السابق.

بطريقة العزوم نكوّن جدول الحل التالي:

الفئـات	س	ك	ك س	س - $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^٢$	$(س - \bar{س})^٣$	$ك (س - \bar{س})^٤$
٢٥-٢٩	٢٧	٥	١٣٥	١٢,٩-	١٦٦,٤١	٢٧٦٩٢,٢٩	١٣٨٤٦١,٤٥
٣٠-٣٤	٣٢	٨	٢٥٦	٧,٩-	٦٢,٤١	٣٨٩٥,٠١	٣١١٦٠,٠٨
٣٥-٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠	٢,٩-	٨,٤١	٧٠,٧٣	٧٠٧,٢٠
٤٠-٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	١٩,٤٥	٢٥٢,٨٥
٤٥-٤٩	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٢٥٤١,١٧	٢٠٠٣٢٩,٣٦
٥٠-٥٤	٥٣	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٢١٤٣٥,٨٩	١٢٨٦١٥,٣٤
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٥٥٦٥٤,٥٣	٣١٩٥٢٦,٣٨

سبق حساب $\bar{س}$ = ٣٩,٩٠، والانحراف المعياري نحر = ٧,٥٠

ومن الجدول يكون العزم الرابع المركزي = $\frac{مجـ ك (س - \bar{س})^{٤}}{ن}$

$= \frac{٣١٩٥٢٦,٣٨}{٥٠} = ٦٣٩٠,٥٣$

معامل التفلطح = $\frac{\text{العزم الرابع المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^{٤}} = \frac{٦٣٩٠,٥٣}{٣١٦٤,٠٦}$

= ٢,٠٢ أي أن المنحنى مفلطح

بطريقة الربيعات والمئينات:

سبق أن حسبنا الربيع الأعلى والأدنى $ر_{٣}$، $ر_{١}$ في مثال (٦) السابق فكانت $ر_{٣}$= ٤٥,٤٤، $ر_{١}$ = ٣٥,٤٤

ولحساب $م_{٩٠}$، $م_{١٠}$ نعيد كتابة الجدول المتجمع الصاعد كالتالي:

الفئـــات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤,٥	صفـر
أقل من ٢٩,٥	٥
أقل من ٣٤,٥	١٣
أقل من ٣٩,٥	٢٣
أقل من ٤٤,٥	٣٦
أقل من ٤٩,٥ أ	٤٤ $ك_{١}$
أقل من ٥٤,٥	٥٠ $ك_{٢}$

رتبة $م_{١٠}$ = $\frac{١٠ \times ن}{١٠٠}$

$$= \frac{١٠ \times ٥٠}{١٠٠} = ٥$$

تكون $م_{١٠}$ = ٢٩,٥ ريـالا (من الجدول مباشرة)

$$\text{رتبة } م_{٩٠} = \frac{٩٠ \times ن}{١٠٠}$$

$$= \frac{٩٠ \times ٥٠}{١٠٠} = ٤٥$$

نضع خطًا أفقياً بين التكرارين المتجمعين ٤٤ ، ٥٠ ، ونحسب قيمة $م_{٩٠}$ من العلاقة الآتية :

$$\therefore م_{٩٠} = ا + \frac{\frac{٩٠ن}{١٠٠} - ك_{١}}{ك_{٢} - ك_{١}} \times ل$$

حيث إن ا = ٤٩,٥ ، $ك_{١}$ = ٤٤ ، $ك_{٢}$ = ٥٠ ، ل = ٥

$$\therefore م_{٩٠} = ٤٩,٥ + \frac{٤٥ - ٤٤}{٥٠ - ٤٤} \times ٥$$

$$= ٤٩,٥ + \frac{٥}{٦} = ٥٠,٣٣$$

$$\text{معامل التفلطح} = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢(م_{٩٠} - م_{١٠})}$$

$$= \frac{٤٥,٤٤ - ٣٥,٤٤}{٢(٥٠,٣٢ - ٢٩,٥)} = ٠,٢٥$$ أي المنحنى مفلطح

(٤ ـ ٨) تمارين

١ ـ فيما يلي أعمار مجموعة من طلاب جامعة الملك سعود

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢١ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٠ ، ٢١

ا) احسب المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري لأعمار الطلاب .

ب) أوجد المقاييس المطلوب حسابها في الفقرة السابقة (أ) بعد أربع سنوات على نفس الأشخاص بفرض بقائهم على قيد الحياة.

٢ ـ عند دراسة تصنيف مقادير مشتريات الطلاب في إحدى محلات (مراكز) بيع الأدوات الكتابية بإحدى الكليات لعينة من الطلاب مكونة من ١٠٠ طالب كانت كالتالي:

جدول التوزيع التكراري لمشتريات الطلاب

المبيعات لأقرب ريال	١ ـ ٢	٣ ـ ٤	٥ ـ ٦	٧ ـ ٨	٩ ـ ١٠
عدد الطلاب	٢٠	٤٠	٢٥	١٠	٥

أوجد المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المعياري للمبيعات.

٣ ـ عند دراسة استهلاك مجموعة مكونة من ٨٠ سيارة من سيارات جامعة الملك سعود لكل جالون من البنزين كانت كالتالي:

جدول التوزيع التكراري لإستهلاك البنزين
لمجموعة من سيارات جامعة الملك سعود

عدد الأميال لكل جالون	عدد السيارات
١٦ ـ ١٧	٨
١٨ ـ ١٩	٢٢
٢٠ ـ ٢١	٣٠
٢٢ ـ ٢٣	١٢
٢٤ ـ ٢٥	٨
المجموع	٨٠

احسب الانحراف المعياري لعدد الأميال لكل جالون.

٤ - البيانات التالية تمثل الأجر اليومي لعينة مكونة من ١٠٠ عامل من عمال عاديين في إحدى المؤسسات الصناعية:

جدول التوزيع التكراري للأجر اليومي لمجموعة من العمال

الأجر اليومي بالريال	عدد العمال
أقل من ٣٥	١٤
٣٥ - ٣٧	٢٧
٣٨ - ٤٠	٣٠
٤١ - ٤٣	٢٠
أكبر من ٤٣	٩
المجمـــوع	١٠٠

احسب تشتت الأجور باستخدام مقياس مناسب.

٥ - الجدول التالي يمثل درجات عينتين من طلاب قسم الاجتماع في كلية الآداب

جدول التوزيع التكراري للدرجات لعينتين من طلاب قسم الاجتماع

فئات الدرجات	٤٠ - ٤٩	٥٠ - ٥٩	٦٠ - ٦٩	٧٠ - ٧٩	٨٠ - ٨٩	٩٠ - ٩٩
درجات المجموعة الأولى	٥	٩	١٤	١٢	١٠	-
درجات المجموعة الثانية	٤	١٢	١٦	١١	٥	٢

أي المجموعتين أكثر تشتتا؟

٦ - فيما يلي أعمار عينتين من طلاب الصف الثاني في مدرستين مختلفتين مقربة لأقرب سنة

المدرسة الأولى: ٦، ٧، ٦، ٧، ٧، ٨، ٩، ٨، ٧، ٦، ٧

المدرسة الثانية: ٧، ٨، ٨، ٩، ١٠، ٩، ٦، ٦، ٨، ٧، ٨

أوجد في أي المدرستين تكون أعمار الطلاب أكثر تشتتا .

٧ ـ الجدول التالي يمثل توزيع ١٠٠ أسرة حسب عدد الأفراد

جدول التوزيع التكراري لأعداد أفراد مجموعة من الأسر

عدد الأفراد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
عدد الأسر	٣	٥	١٤	٢٢	٢٥	١٦	٩	٦	١٠٠

احسب الانحراف المعياري لعدد أفراد الأسر.

٨ ـ الجدول التالي يبين عدد المواليد الموتى خلال سنة في إحدى المدن طبقا لعمر الأم .

جدول التوزيع التكراري لأعمار الأمهات حسب أعداد المواليد الموتى

عمر الأم	٢٠ ـ ٢٤	٢٥ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٤	٣٥ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٤
عدد المواليد	٦	١٠	١٢	٨	٤٠

أوجد الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف .

٩ ـ الجدول التالي يبين توزيع عدد الشقق حسب الإيجار السنوي في أحد الأحياء بمدينة ما .

جدول التوزيع التكراري لإيجارات مجموعة من الشقق

الإيجار بآلاف الريالات	٦ ـ ٨	٩ ـ ١١	١٢ ـ ١٤	١٥ ـ ١٧	١٨ ـ ٢٠	٢١ ـ ٢٣
عدد الشقق	٤	١١	١٥	٢٤	١٠	٦

احسب الانحراف المعياري لإيجار الشقق .

١٠ـ الجدول التالي يمثل توزيع الإنفاق الشهري لعدد من الأسر غير السعودية في إحدى المدن .

جدول التوزيع التكراري للإنفاق الشهري لمجموعة من الأسر

الإنفاق بمئات الريالات	٨ ـ ١٠	١١ ـ ١٣	١٤ ـ ١٦	١٧ ـ ١٩	٢٠ ـ ٢٢	٢٣ ـ ٢٥
عدد الأسـر	٣	١٨	١٧	٢٥	١٠	٧

احسب المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط والمعياري ومعامل الاختلاف للإنفاق.

١١ـ في دراسة عن أطوال وأوزان مجموعة من الطلاب كانت النتائج كما يلي:

الأوزان: مجـ س = ٣٤٠٠ ، مجـ $س^٢$ = ٥٧٨٤٨٠

والجدول التكراري للأوزان هو:

فئات الوزن	٦٠ ـ ٦٤	٦٥ ـ ٦٩	٧٠ ـ ٧٤	٧٥ ـ ٧٩	٨٠ ـ ٨٤
التكـرار	٢	٤	٩	٤	١

قارن بين تشتت الأطوال والأوزان.

١٢ـ بإضافة ٤ إلى كل رقم في مجموعة البيانات:

٦ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٧ ، ٦

نحصل على مجموعة البيانات التالية:

١٠ ، ٨ ، ٩ ، ٦ ، ١١ ، ١٠

ا) بين أن للمجموعتين نفس الانحراف المعياري ووسطين مختلفين مع بيان العلاقة بين الوسطين؟

ب) بضرب المجموعة الأولى في ٢ ثم إضافة ٤ نحصل على مجموعة البيانات التالية:

١٦ ، ١٢ ، ١٤ ، ٨ ، ١٨ ، ١٦

ما هي العلاقة بين الانحرافات المعيارية والأوساط لمجموعتي البيانات الأولى والأخيرة.

١٣- في دراسة عن أحد النباتات التي لها نفس العمر كانت أطوالها كما في الجدول التالي:

جدول التوزيع التكراري لأطوال مجموعة النباتات لها نفس العمر

فئات الطول	٢٠ - ٢٤	٢٥ - ٢٩	٣٠ - ٣٤	٣٥ - ٣٩	٤٠ - ٤٤
التكـــرار	١٤	٥٢	٥٠	٣٦	٨

ا) احسب الالتواء لهذه النباتات باستخدام ثلاثة مقاييس.

ب) قارن بين النتائج من حيث وصفها للتوزيع.

جـ) اذكر مزايا وعيوب كل مقياس ثم احسب مقياسا لتفلطح هذا التوزيع.

الفصل الخامس

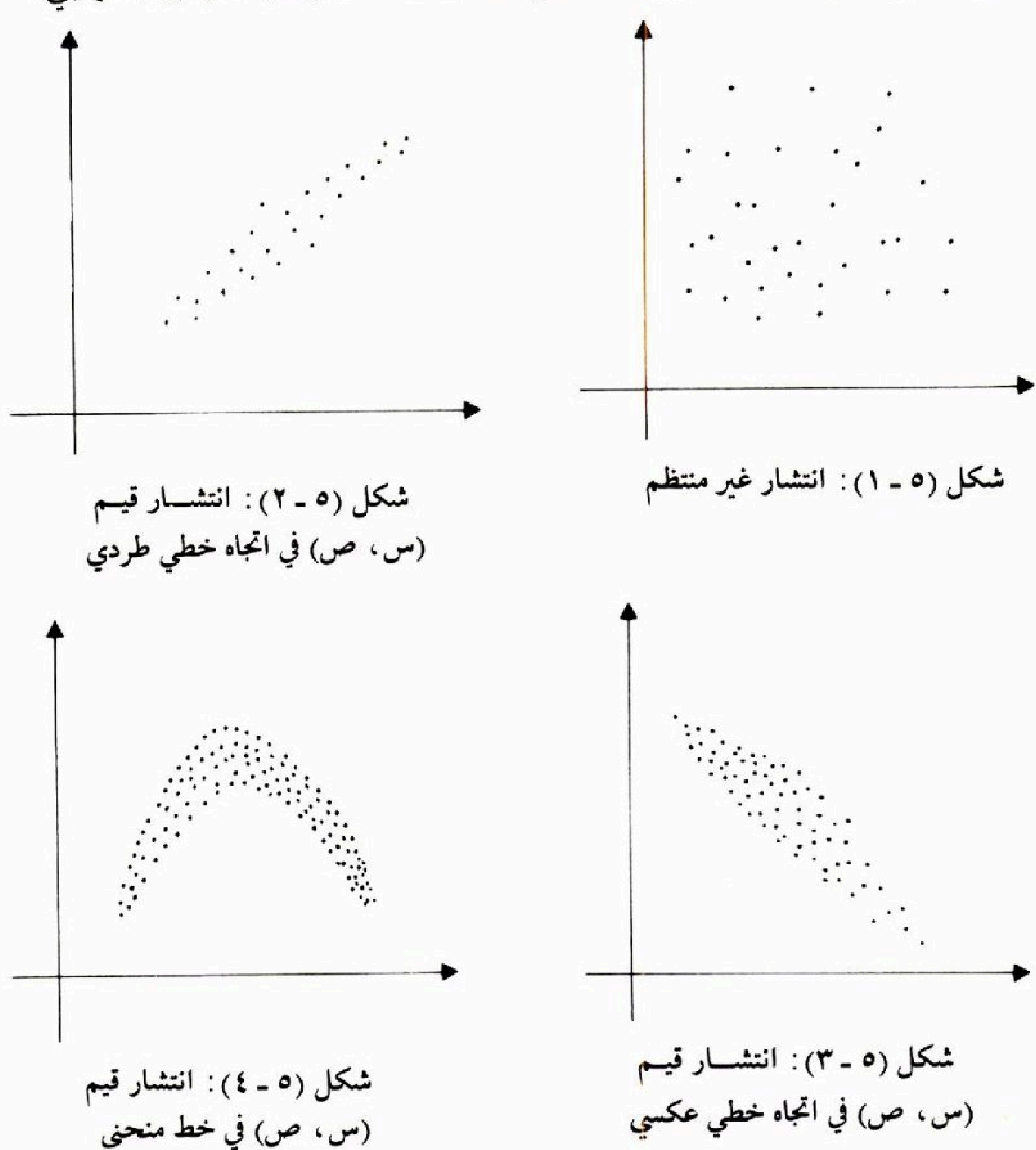
الارتباط والانحدار

(٥ - ١) مقدمـــة

تعـرضنـا في الفصـول السـابقة لطرق تنظيم وتلخيص البيانات في توزيعات تكرارية وطرق عرضها بيانيا. كما تعرفنا في الفصلين الثالث والرابع على كيفية حساب مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) وكذلك إيجاد مقاييس التشتت لمجموعة واحدة من البيانات في كل مرة، أو لأكثر من مجموعة من البيانات لغرض المقارنة فيما بينها، وكانت الصفة المشتركة التي تمثل هذه المجموعات أنها تعتمد على متغير واحد وهو المتغير محل الـدراسة. ولكن في الحياة العملية قد تكون مفردات العينة محل الدراسة عبارة عن أزواج من القيم لخاصتين مختلفتين، كما قد يكون المطلوب في مثل هذه الحالة دراسة العلاقة بينهما، ومقياس قوة هذه العلاقة واتجاهها كأن تكون علاقة طردية أو عكسية أو غير ذلـك. من هذه العـلاقـات على سبيل المثال دراسة العلاقة بين الطول والوزن لمجموعة من الطلاب، أو الإنتاج والأجور لمجموعة من العمال، أو الدخل والإنفاق لمجموعة من الأسر، أو النمو للنبات وعمره، أو كمية المحصول والتسميد وهكذا.

وفي هذا الفصل سوف نقوم بدراسة طرق قياس مقدار العلاقة بين متغيرين محل الدراسة، مثل قياس قوة الارتباط بينهما. وإيجاد مقاييس عددية لقياس قوة الارتباط. نبحث كذلك موضوع إيجاد علاقة رياضية تربط المتغيرين بعضهما ببعض، لكي يمكن التنبؤ بأحد المتغيرات لقيمة محددة للمتغير الآخر، وهي ما تسمى بمعادلة الانحدار.

ولكي نبدأ هذه الدراسة يجب أن نتعرف على ما يسمى بأشكال الانتشار وهي عبارة عن رسم بياني على محورين لمجموعة من النقاط تمثل أزواج القيم للبيانات مثل : (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) . . . . ، (س$_{ن}$ ، ص$_{ن}$) بحيث يكون المحـور الأفقي يمثل المتغير س والمحور الرأسي يمثل المتغير ص . والمتغيرات لبعض الظواهر محل الدراسة تأخذ صور مختلفة من أشكال الانتشار نبين بعضها بيانيًا كما يلي :



شكل (٥ ـ ١) : انتشار غير منتظم

شكل (٥ ـ ٢) : انتشـــار قيــم (س ، ص) في اتجاه خطي طردي

شكل (٥ ـ ٣) : انتشـــار قيــم (س ، ص) في اتجاه خطي عكسي

شكل (٥ ـ ٤) : انتشار قيم (س ، ص) في خط منحني

في شكل (٥ ـ ١): يتضح منه أن أزواج القيم (س، ص) مبعثرة بدون ضابط أو اتجاه معين، أي لا يمكن استنتاج أي علاقة بين المتغيرين (س، ص). ويمكن القول أن المتغيرين س، ص مستقلين ولا يوجد أي ارتباط بينهما.

في شكل (٥ ـ ٢): نلاحظ أن أزواج المشاهدات (س، ص) تنتشر حول خط مستقيم أي كلما تزداد قيم س تزداد معها قيم ص ومنه نستنتج أنه توجد علاقة خطية طردية بين المتغيرين (س، ص).

في شكل (٥ ـ ٣): نجد أن شكل الانتشار يأخذ شكل خطي أيضا ولكن عندما تزداد قيم س تقل قيم ص، أي توجد علاقة خطية عكسية بين المتغيرين (س، ص).

في شكل (٥ ـ ٤): نجد أن البيانات منتشرة حول منحنى أي توجد علاقة غير خطية بين المتغيرين (س، ص).

والمقاييس التي توضح مدى هذا الارتباط بين المتغيرين (س، ص) تسمى بمعامل الارتباط. أما العلاقة الرياضية التي تربط المتغيرين (س، ص) تسمى معادلة خط الانحدار. سوف نكتفي بدراسة معامل الارتباط الخطي وكذلك معادلة الانحدار الخطي بأشكال الانتشار (٥ ـ ٢)، (٥ ـ ٣) وذلك لمراعاة مستوى وطبيعة تخصصات الدارسين لهذا الكتاب. وسوف نقوم بدراسة بعض مقاييس الارتباط بين المتغيرين (س، ص) مثل معامل الارتباط الخطي لبيرسون (Pearson) ومعامل الارتباط للرتب لسبيرمان (Spearman) ومعامل الاقتران لكرامير (Cramer) وكذلك إيجاد معادلة الانحدار الخطي للمتغيرين (س، ص). كما سنحاول تبسيط عرضنا للموضوع كلما أمكن، وذلك باستخدام الأمثلة لكل مقياس على حدة.

(٥ ـ ٢) معامل الإرتباط الخطي

يستخدم معامل الارتباط لبيرسون (Pearson) لقياس قوة الارتباط بين متغيرين س، ص عندما تكون أزواج القراءات كمية أي رقيمة وذلك في حالة البيانات غير المبوبة أو في حالة البيانات المبوبة وسنتناول كلا من هاتين الحالتين فيما يلي.

(٥ ـ ٢ ـ ١) معامل الارتباط الخطي لبيرسون في حالة البيانات غير المبوبة

إذا كان لدينا أزواج القيم للمتغيرين س، ص من المجتمع محل الدراسة كالتالي ($س_١$، $ص_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$)، . . . .، ($س_ن$، $ص_ن$) فإننا نعرِّف معامل الارتباط الخطي لبيرسون ($م_ب$) بأنه متوسط مجموع حاصل ضرب القيم المعيارية للظاهرتين المراد دراسة العلاقة بينهما ولكل ظاهرة، ولتكن سَ، صَ. وهذه هي أفضل طريقة لقياس التغيرات التي تحدث بين ظاهرتين وتحدد طبيعة التغير سواءً بالنقص أو الزيادة ويعبّر عن ذلك رياضيًّا كما يلي:

$$م_ب = \frac{١}{ن} \text{ مجـ } سَ\, صَ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$\text{حيث } سَ = \frac{س - \bar{س}}{نحر(س)} \quad \text{و} \quad صَ = \frac{ص - \bar{ص}}{نحر(ص)}$$

وبالتعويض عن القيم المعيارية سَ، صَ فيكون $م_ب$ كالتالي:

$$م_ب = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{ن\ نحر(س)\ نحر(ص)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

يلاحظ أن هذه الصيغة لا تعتمد على وحدات القياس للظاهرتين. وعندما تكون البيانات مأخوذة من عينة حجمها ن فإنه يفضل القسمة على (ن – ١) بدلا من ن عندئذ نكتب العلاقة (١) في الصورة التالية:

$$م_ب = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{(ن - ١)\ نحر_س\ نحر_ص} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

يلاحظ في بعض الأحيان أن العلاقة (٣) السابقة صعبة إلى حد ما عند حساب قيمتها عدديا، وقد يتعرض الدارس إلى ارتكاب بعض الأخطاء لأنه يحتاج إلى عدد من المقادير

الإحصائية مثل $نحر_{س}$ ، $نحر_{ص}$ ، $\overline{س}$، $\overline{ص}$ ولتجاوز مثل هذه الصعوبة سنعمد فيما يلي إلى استنتاج صيغة ستكون غالبا أبسط في الحساب من العلاقة (٣) السابقة وتكون كالتالي :

$$م_{ب} = \frac{ن مج س ص - مج س مج ص}{\sqrt{[ن مج س^{٢} - (مج س)^{٢}][ن مج ص^{٢} - (مج ص)^{٢}]}} \quad \ldots\ldots\ (٤)$$

وتعتمد العلاقة (٤) في كونها سهلة حسابيا من سابقها لأننا نحسب فقط المقادير مجـ س، مجـ ص، مجـ س ص، مجـ $س^{٢}$، مجـ $ص^{٢}$، وهي مقادير يمكن الإشارة إليها : بأنه يمكن حسابها مباشرة، وبسرعة أكبر.

مثـال (١)

أوجد معامل الارتباط بين الإنفاق ص والدخل س لمجموعة مكونة من سبع أسر والبيانات بمئات الريالات كالتالي :

جدول (٥ ـ ١) : الإنفاق والدخل لسبع أسر

س	٨	١٠	١٢	١٢	١٣	١٥	٢٠
ص	٨	٩	١٢	١٠	١٠	١٣	١٩

ولسهولة الحل نلخص الحسابات في الجدول التالي :

الدخل (س)	الإنفاق (ص)	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
١٠	٩	٩٠	١٠٠	٨١
١٢	١٢	١٤٤	١٤٤	١٤٤
١٢	١٠	١٢٠	١٤٤	١٠٠
١٣	١٠	١٣٠	١٦٩	١٠٠

الدخل (س)	الإنفاق (ص)	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
١٥ ٢٠	١٣ ١٩	١٩٥ ٣٨٠	٢٢٥ ٤٠٠	١٦٩ ٣٦١
٩٠	٨١	١١٢٣	١٢٤٦	١٠١٩

ومن ذلك يمكن حساب معامل الارتباط كما يلي:

$$م_{ب} = \frac{ن\ مج\ س\ ص - مج\ س\ مج\ ص}{\sqrt{[ن\ مج\ س^{٢} - (مج\ س)^{٢}][ن\ مج\ ص^{٢} - (مج\ ص)^{٢}]}}$$

$$= \frac{٧ \times ١١٢٣ - ٩٠ \times ٨١}{\sqrt{[٧ \times ١٢٤٦ - (٩٠)^{٢}][٧ \times ١٠١٩ - (٨١)^{٢}]}}$$

$$= \frac{٧٨٦١ - ٧٢٩٠}{\sqrt{٦٢٢ \times ٥٧٢}} = \frac{٥٧١}{٥٩٦,٤٨}$$

$$= ٠,٩٥٧$$

ملاحظـــات

نلاحظ أن قيمة معامل الإرتباط $م_{ب}$ تتراوح بين ١، -١. كما يقال: إن الإرتباط طردي إذا كانت قيمة معامله $م_{ب}$ موجبة (أي محصورة بين الصفر والواحد الصحيح) وتزداد قوة الارتباط كلما قربت قيمة معامل الارتباط من الواحد الصحيح، وتضعف قيمته كلما اقترب من الصفر. كما يقال: إن الارتباط عكسي إذا كانت قيمة معامله $م_{ب}$ سالبة (أي أقل من صفر إلى -١)، ويكون ارتباطًا عكسيًا قويًا كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من -١، وتضعف قيمته كلما اقترب من الصفر.

وتجدر الإشارة إلى أنه لا توجد حدود فاصلة تبين قوة وضعف الارتباط، ولكن يمكن وضع حدود تقريبية لقيم «$م_{ب}$» مبنية على الخبرة السابقة، وسوف نذكر ذلك

للقيم الموجبة وبالمثل يمكن تطبيقها عندما تكون «م ب» سالبة، وذلك بتغير إشارة الحدود في الجدول التالي:

جدول (٥ ـ ٢): قيم معامل الإرتباط وقوته

قسم معامل الإتباط م ب	قوة الإرتباط
صفر إلى ٠,٣	لا يوجد ارتباط يذكر
٠,٣ إلى ٠,٥	ارتباط ضعيف
٠,٥ إلى ٠,٧	ارتباط متوسط
٠,٧ إلى ٠,٩	ارتباط قوي
٠,٩ إلى ١	ارتباط قوي جدًا

وبذلك يكون الإرتباط في مثال (١) السابق قويا جدًا.

بعض خصائص معامل الإرتباط الخطي لبيرسون

من أهم خصائصه أنه لا يعتمد على القيم نفسها وإنما يعتمد على مقدار تباعد هذه القيم عن بعضها، ولذلك إذا جمعنا أو طرحنا مقدارا ثابتا من كل قراءات الظاهرتين س أو ص فإن قيمة معامل الارتباط لا تتغير. يتمتع معامل الارتباط بهذه الخاصة بالنسبة للضرب والقسمة كذلك إلا إنه في حالة ضرب أو قسمة مقدار ثابت في كل من س، ص فإن قيمة معامل الإرتباط لا تتغير بمثل هذه العمليات البسيطة.
ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في المعادلة (٤) السابقة بوضع س = س $\pm$ ا، ص = ص $\pm$ ب فإن المعادلة (٤) تصبح كالتالي:

$$م_{ب} = \frac{ن\ مج\ س\ ص - مج\ س\ مج\ ص}{\sqrt{[ن\ مج\ س^{2} - (مج\ س)^{2}][ن\ مج\ ص^{2} - (مج\ ص)^{2}]}} \quad .... (٥)$$

وكذلك في حالة قسمة كل من س، ص على مقدار ثابت أي بوضع

$س = \frac{س}{ا}$ ، $ص = \frac{ص}{ب}$ فإن المعادلة (٥) تصبح كالتالي:

$$م_ب = \frac{ن\ مج\ س\ ص - مج\ س\ مج\ ص}{\sqrt{[ن\ مج\ س^٢ - (مج\ س)^٢][ن\ مج\ ص^٢ - (مج\ ص)^٢]}} \quad \ldots\ldots (٦)$$

ولاستخدام بيانات مثال (١) السابق لتوضيح الأفكار السابقة نورد المثال التالي:

نطرح من جميع قيم س مقدارًا ثابتًا وليكن ا = ١٠ كما نطرح من جميع قيم ص مقدار ب = ٨ في بيانات المثال السابق فنحصل على القيم الجديدة، وهي س = س − ١٠، ص = ص − ٨ فنحصل على بيانات العمودين الأول والثاني من الجدول التالي وبقسمة قيم س، ص على مقدار ثابت وليكن ٢ مثلاً فنحصل على بيانات العمودين الثالث والرابع، ويكون جدول الحل في هذه الحالة هو:

س	ص	$س = \frac{س}{٢}$	$ص = \frac{ص}{٢}$	س ص	$س^٢$	$ص^٢$
٢−	٠	١−	٠	٠	١	٠
٠	١	٠	٠,٥	٠	٠	٠,٢٥
٢	٤	١	٢	٢	١	٤,٠٠
٢	٢	١	١	١	١	١,٠٠
٣	٢	١,٥	١	١,٥	٢,٢٥	١,٠٠
٥	٥	٢,٥	٢,٥	٦,٢٥	٦,٢٥	٦,٢٥
١٠	١١	٥	٥,٥	٢٧,٥٠	٢٥,٠٠	٣٠,٢٥
المجموع		١٠	١٢,٥	٣٨,٢٥	٣٦,٥٠	٤٢,٧٥

$$م_ب = \frac{ن\ مج\ س\ ص - مج\ س\ مج\ ص}{\sqrt{[ن\ مج\ س^٢ - (مج\ س)^٢][ن\ مج\ ص^٢ - (مج\ ص)^٢]}}$$

$$= \frac{٧ \times ٣٨,٢٥ - ١٠ \times ١٢,٥}{\sqrt{[٧ \times ٣٦,٢٥ - (١٠)^٢][٧ \times ٤٢,٧٥ - (١٢,٥)^٢]}}$$

$$= \frac{\text{٢٦٧,٧٥} - \text{١٢٥}}{\sqrt{\text{١٥٥,٥} \times \text{١٤٣}}} = \frac{\text{١٤٢,٢٥}}{\text{١٤٩,١٢}}$$

= ٠,٩٥٧ وهي النتيجة السابقة نفسها أيضا.

وباستخدام القسمة فقط لبيانات مثال (١) تقسم س، ص على مقدار ثابت وليكن ٢ مثلاً، فيكون جدول الحل في هذه الحالة هو:

س	ص	س = $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$	ص = $\frac{\text{ص}}{\text{٢}}$	س ص	س^{٢}	ص^{٢}
٨	٨	٤	٤	١٦	١٦	١٦
١٠	٩	٥	٤,٥	٢٢,٥	٢٥	٢٠,٢٥
١٢	١٢	٦	٦	٣٦	٣٦	٣٦
١٢	١٠	٦	٥	٣٠	٣٦	٢٥
١٣	١٠	٦,٥	٥	٣٢,٥	٤٥,٢٥	٢٥
١٥	١٣	٧,٥	٦,٥	٤٨,٧٥	٥٦,٢٥	٤٢,٢٥
٢٠	١٩	١٠	٩,٥	٩٥	١٠٠	٩٠,٢٥
المجموع		٤٥	٤٠,٥	٢٨٠,٧٥	٣١١,٥	٢٥٤,٧٥

$$\text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{ن مج س ص} - \text{مج س مج ص}}{\sqrt{[\text{ن مج س}^{٢} - (\text{مج س})^{٢}][\text{ن مج ص}^{٢} - (\text{مج ص})^{٢}]}}$$

$$= \frac{\text{٧} \times \text{٢٨٠,٧٥} - \text{٤٥} \times \text{٤٠,٥}}{\sqrt{[\text{٧} \times \text{٣١١,٥} - (\text{٤٥})^{٢}][\text{٧} \times \text{٢٥٤,٧٥} - (\text{٤٠,٥})^{٢}]}}$$

$$= \frac{\text{١٩٦٥,٢٥} - \text{١٨٢٢,٥}}{\sqrt{\text{١٥٥,٥} \times \text{١٤٣}}}$$

$$= \frac{\text{١٤٢,٧٥}}{\text{١٤٩,١٢}} = \text{٠,٩٥٧}$$ وهي النتيجة السابقة نفسها

(٥ ـ ٢ ـ ٢) معامل الإرتباط الخطي لبيرسون في حالة البيانات المبوبة

في هذه الحالة تصبح العلاقة (٤) في الشكل التالي:

$$م_ب = \frac{ن \text{ مج } ك_{٢١} س ص - (\text{مج } ك_١ س) (\text{مج } ك_٢ ص)}{\sqrt{[ن \text{ مج } ك_١ س^٢ - (\text{مج } ك_١ س)^٢][ن \text{ مج } ك_٢ ص^٢ - (\text{مج } ك_٢ ص)^٢]}} \quad ... (٧)$$

حيث

ن مجموع التكرارات الكلية.

$ك_{٢١}$ التكرار المشترك للمتغيرين س، ص في الخلايا.

$ك_١$ مجموع التكرارات الأفقية (أي الصف) لمراكز الفئات للمتغير س.

$ك_٢$ مجموع التكرارات الرأسية (أي العمود) لمراكز الفئات للمتغير ص.

س هي مراكز الفئات للمتغير س.

ص هي مراكز الفئات للمتغير ص.

ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٢)

أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين الأجور والانتاج لمجموعة مكونة من ثلاثين عاملاً في مثال (٤) في الفصل الثاني.

الحـل:

نلخص الحل والحسابات في الجدول التالي:

القيمة التي في الركن للصف الأول **١٢** هي عبارة عن ضرب التكرار **٣** × مركز الفئة س (-٢) × مركز الفئة ص (-٢) = **٣** × -**٢** × -**٢** = **١٢** = $ك_{٢١}$ س ص.

وهكذا بالنسبة لباقي الخلايا يمكن حساب $ك_{٢١}$ س ص بنفس الطريقة. وتجمع أفقيا فيكـون العمـود الـرأسي الأخـير في الجـدول. وتجمـع رأسيا فيكـون الصف الأخير $ك_{٢١}$س ص في الجدول. وتكون نتيجة مجموع العمود الأخير مج $ك_{٢١}$ س ص مساويا لمجموع الصف الأخير في الجدول مج $ك_{٢١}$ س ص = ٤٢.

الأجور س \ الانتاج ص	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩	٩٠-٩٩	$ك_1$	$س = \frac{س - ٧٤,٥}{١٠}$	$ك_1 س$	$ك_1 س^2$	$ك_{21} س ص$
٥٠-٥٩	٣ / ١٢					٣	-٢	-٦	١٢	١٢
٦٠-٦٩	١ / ٢	٤ / ٤				٥	-١	-٥	٥	٦
٧٠-٧٩	٢ / ٠	٨ / ٠				١٠	٠	٠	٠	٠
٨٠-٨٩			١ / ٠	٦ / ٦	١ / ٢	٨	١	٨	٨	٨
٩٠-٩٩					٤ / ١٦	٤	٢	٨	١٦	١٦
$ك_2$	٤	٦	٩	٦	٥	٣٠	مج	٥	٤١	٤٢
$ص = \frac{ص - ٧٤,٥}{١٠}$	-٢	-١	٠	١	٢	مج				
$ك_2 ص$	-٨	-٦	٠	٦	١٠	٢				
$ك_2 ص^2$	١٦	٦	٠	٦	٢٠	١٢٠				
$ك_{21} س ص$	١٤	٤	٠	٦	١٨	٤٢				

$$م_ب = \frac{ن \text{ مج } ك_{21} س ص - (\text{مج } ك_1 س)(\text{مج } ك_2 ص)}{\sqrt{[ن \text{ مج } ك_1 س^2 - (\text{مج } ك_1 س)^2][ن \text{ مج } ك_2 ص^2 - (\text{مج } ك_2 ص)^2]}}$$

$$= \frac{٣٠ \times ٤٢ - ٥ \times ٢}{\sqrt{[٣٠ \times ٤١ - (٥)^2][٣٠ \times ٤٨ - (٢)^2]}}$$

$$= \frac{١٢٦٠ - ١٠}{\sqrt{١٢٠٥ \times ١٤٣٦}}$$

$$= \frac{١٢٥٠}{١٣١٥,٤٤} = ٠,٩٥$$

أي أنه يوجد ارتباط طردي قوي بين مقدار الأجر وكمية الإنتاج.

(٥ ـ ٣) معامل ارتباط الرتب

يلاحظ أن الارتباط الخطي لبيرسون يبين مدى قوة الارتباط بين المتغيرين (س، ص) في حالة البيانات الكمية فقط، ولكن في كثير من الدراسات التطبيقية نصادف

بيانات وصفية يكون المطلوب فيها إيجاد قوة الارتباط بين المتغيرين الوصفيين. لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقياس يستخدم في حالة البيانات الوصفية خاصة إذا أمكن وضعها في صورة ترتيبية، مثل تقديرات الطلاب، أو المراتب العلمية لأعضاء هيئة التدريس بالجامعة، أو المراتب والدرجات لموظفين حسب السلم الوظيفي.

ويمكن ملاحظة أن استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (Spearman) يفيد في مثل حالة هذه البيانات الوصفية السالفة الذكر أو البيانات الكمية كذلك مع مراعاة أن تكون عدد أزواج القيم أقل من ٣٠ حتى يمكن أن يعطي معامل ارتباط الرتب في أغلب الأحيان قوة الارتباط بصورة أكثر دقة من معامل ارتباط بيرسون. ويعرَّف معامل ارتباط الرتب لسبيرمان $م_{س}$ بالعلاقة التالية:

$$م_{س} = ١ - \frac{٦ \text{ مج } ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)} \quad \ldots\ldots\ldots (٨)$$

حيث إن «ن» عدد المشاهدات، ف فرق الرتبة بين المتغيرين.

ولتوضيح طريقة إيجاد رتب مجموعة من الأرقام نتصور أننا رتبنا الأرقام تصاعديا أو تنازليا فيكون الرقم الأول رتبة ١، والرقم الثاني رتبة ٢، وهكذا. . . .

وإذا تساوى رقمان فإننا نأخذ متوسط مجموع الرتبتين لهما، ونوضح ذلك باستخدام الترتيب التصاعدي في ثلاثة الأمثلة التالية، حيث نوضح في المثال الأول كيفية تحديد رتب القراءات، ومن ثم نطبق ذلك لإيجاد معامل ارتباط الرتب في المثالين التاليين (٤)، (٥).

مثـــال (٣)

أوجد رتب الأعداد التالية:

س	٢	٤	٣	٩	٦	٧	٣

إذا تصورنا ترتيب البيانات تصاعديا فإن الرقم ٢ يحتل المرتبة الأولى (١)، والرقمين ٣، ٣ يحتلان المرتبة الثانية والثالثة (٢، ٣)، وتكون رتبة كل منهما هي متوسط الرتبتين (٢، ٣) أي ($\frac{٢+٣}{٢}$= ٢,٥) والرقم ٤ يمثل المرتبة (٤) وهكذا باقي الأرقام. . . .

ونوضح ذلك بالجدول التالي لقيم «س» ورتبها

س	٢	٤	٣	٩	٦	٧	٣
رتبة س	١	٤	٢,٥	٧	٥	٦	٢,٥

ولإيجاد معامل الارتباط للرتب حسب العلاقة (٨) نوضح طريقة حسابه بالمثال التالي.

مثـــال (٤)

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان للدخل والإنفاق لعينة مكونة من ٧ أسر حسب البيانات المعطاة في مثال (١) السابق.

ويمكن تلخيص الحسابات كما في الجدول التالي:

الدخل (س)	الإنفاق (ص)	رتبة س	رتبة ص	ف = رتبة س - رتبة ص	ف^{٢}
٨	٨	١	١	٠	٠
١٠	٩	٢	٢	٠	٠
١٢	١٢	٣,٥	٥	١,٥-	٢,٢٥
١٢	١٠	٣,٥	٣,٥	٠	٠
١٣	١٠	٥	٣,٥	١,٥	٢,٢٥
١٥	١٣	٦	٦	٠	٠
٢٠	١٩	٧	٧	٠	٠
-	-	-	-	-	٤,٥

$$م_س = ١ - \frac{٦ مجـ ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ × ٤,٥}{٧ (٤٩ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٢٧}{٧ × ٤٨}$$

$$= ١ - \frac{٢٧}{٣٣٦}$$

$$= ١ - ٠,٠٨$$

$م_س$ = ٠,٩٢ وهو ارتباط طردي وقوي جدًا.

مثـــال (٥)

في دراسة اجتماعية لعينة مكونة من ٥ عائلات عن الوضع المالي لكل من أسرتي الـزوج والزوجة، وذلك لمعرفة تأثير الحالة المادية في الزواج بين الأسر، حيث كانت المعلومات كما في الجدول التالي:

جدول (٥ ـ ٣): الأوضاع المالية لأسر الأزواج والزوجات لخمسة أسر

الحالة المالية لأسرة الزوج (س)	جيدة	منخفضة	متوسطة	ممتازة	متوسطة
الحالة المالية لأسرة الزوجة (ص)	ممتازة	جيدة	جيدة	ممتازة	متوسطة

أي أن المطلوب هو حساب معامل ارتباط الرتب.

نلخص الحل في الجدول التالي:

س (أسرة الزوج)	ص (أسرة الزوجة)	رتبة س	رتبة ص	ف	ف^٢
جيـــــدة	ممتـــازة	٤	٤,٥	-٠,٥	٠,٢٥
منخفضـــة	جيـــــدة	١	٢,٥	-١,٥	٢,٢٥

س (أسرة الزوج)	ص (أسرة الزوجة)	رتبة س	رتبة ص	ف	ف^{٢}
متوسطة	جيدة	٢,٥	٢,٥	٠	٠
ممتازة	ممتازة	٥	٤,٥	٠,٥	٠,٢٥
متوسطة	متوسطة	٢,٥	١	١,٥	٢,٢٥
				مجـ	٥

$$م_{س} = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٥}{٥(٢٥ - ١)}$$

$$م_{س} = ١ - ٠,٢٥ = ٠,٧٥$$

أي أنه يوجد ارتباط طردي قوي.

(٥ ـ ٤) معامل الاقتران

لقد سبق أن أوجدنا معامل الارتباط لسبيرمان (الرتب) للبيانات الوصفية التي يمكن ترتيبها، ولكن نصادف كثيرًا من الدراسات التطبيقية في مختلف أوجه الحياة العملية كعلم الاجتماع والطب والزراعة. . . الخ، بيانات وصفية ليس في طبيعتها صفة الترتيب أي لا يمكن وضع رتب لها، أو لا معنى للرتب فيها، نذكر مثلاً: التدخين فيكون له صفتان (يدخن، أو لا يدخن)، التعليم أي يكون (متعلمًا أو غير متعلم)، أو لون الشعر كأن يكون (أشقر، أو بنيًا، أو أسود)، لون العيون يكون (أزرق، أو عسليا، أو أسود، . . .) فصائل الدم تكون (مثلاً ا ، ا + ، ب، . . .) وهكذا.

ولتبسيط مفهوم الاقتران بين صفات ما لنفرض أن لكل من المتغيرين أو زوج القراءة س، ص صفتان أولى وثانية فإنه يمكن التعبير عن البيانات الناتجة كما في الجدول التالي

جدول (٥ ـ ٤): التكرارات المشتركة بين الصفات

المتغير س / المتغير ص	الصفة الأولى $س_1$	الصفة الثانية $س_2$
الصفة الأولى $ص_1$	ا	ب
الصفة الثانية $ص_2$	جـ	د

حيث إن ا هي عبارة عن التكرارات المشتركة في الصفة الأولى $س_1$ والصفة الأولى $ص_1$، هكذا بالنسبة لبقية الرموز ب، جـ، د.

وقد اقترح ييل (Yule) بأن يعرف معامل الاقتران ($م_ق$) في هذه الحالة بالعلاقة التالية

$$م_ق = \frac{ا د - ب جـ}{ا د + ب جـ} \quad \ldots\ldots\ldots (٩)$$

ونوضح طريقة حساب $م_ق$ بالمثال التالي.

مثـــال (٦)

أوجد معامل الاقتران $م_ق$ بين التعليم والعمل لمجموعة من الأفراد حيث كانت البيانات المجموعة عنهم هي كما يلي:

جدول (٥ ـ ٥): الاقتران بين العمل والتعليم

التعليم س / العمل ص	متعلـــم	أمـــــي
يعمـــــــل	١٠	٥
لا يعمـــــل	٤	٦

ومن ذلك يمكن حساب معامل الاقتران كما يلي:

$$م_{ق} = \frac{ا د - ب ج}{ا د + ب ج}$$

$$= \frac{١٠ \times ٦ - ٥ \times ٤}{١٠ \times ٦ + ٥ \times ٤} = \frac{٤٠}{٨٠} = ٠,٥$$

أي يوجد ارتباط متوسط بين التعليم والعمل.

أما عندما تتكون الظواهر من عدة صفات لكل متغير فنذكر على سبيل المثال لا الحصر أنه يمكن وصف لون العين على أنه أزرق ـ أو عسلي ـ أو أسود ـ . . . ، أو لون الشعر حيث يمكن وصفه على أنه (أشقر ـ أو بني ـ أو أسود ـ . . .)

فإننا في مثل هذه الحالات نضع المتغيرين س، ص وصفاتهما الأخرى مهما كان عددها في جدول مبسط كما يلي:

جدول (٥ ـ ٦): التكرارات المشتركة بين الصفات

المتغير س / المتغير ص	الصفة الأولى $س_{١}$	الصفة الثانية $س_{٢}$	......	الصفة $س_{م}$	المجموع
الصفة الأولى $ص_{١}$	$ك_{١١}$	$ك_{٢١}$	......	$ك_{م١}$	$ك_{٠١}$
الصفة الثانية $ص_{٢}$	$ك_{١٢}$	$ك_{٢٢}$	......	$ك_{م٢}$	$ك_{٠٢}$
......			......		
الصفة $ص_{ل}$	$ك_{١ل}$	$ك_{٢ل}$	......	$ك_{مل}$	$ك_{٠ل}$
المجموع	$ك_{١٠}$	$ك_{٢٠}$		$ك_{م٠}$	$ك_{٠٠}$

نقول لمعامل الاقتران في هذه الحالة معامل التوافق، ونرمز له بالرمز م ت ويمكن حساب قيمته باستخدام العلاقة التالية:

$$م_{ت} = \sqrt{\frac{جـ - ١}{جـ}} \qquad \ldots\ldots\ldots (١٠)$$

حيث إن جـ تحسب من الجدول السابق كالآتي

$$جـ = \frac{(ك_{١١})^{٢}}{ك_{١٠}\,ك_{٠١}} + \frac{(ك_{٢١})^{٢}}{ك_{٢٠}\,ك_{٠١}} + \cdots\cdots + \frac{(ك_{لم})^{٢}}{ك_{ل٠}\,ك_{٠م}} \qquad \ldots\ldots\ldots (١١)$$

أي أن نربع تكرار الخلية الأولى، ونقسمه على حاصل ضرب مجموع التكرارات للصف الذي به الخلية الأولى، ومجموع التكرارات للعمود الذي به الخلية الأولى، وهكذا نحسب بقية حدود جـ من العلاقة (١١) بالنسبة لتكرارات جميع الخلايا. ولتوضيح خطوات حساب معامل التوافق نورد المثال التالي.

مثال (٧)

أوجد معامل التوافق بين لون الشعر ولون العين لعينة مكونة من ٤٥ شخصًا باستخدام البيانات التالية:

جدول (٥ ـ ٧): التكرارات المشتركة بين لون العيون ولون الشعر

لون الشعر س / لون العيون ص	أشقر	بني	أسود	المجموع
أزرق	٦	٥	٤	١٥
عسلي	٣	٦	٦	١٥
أسود	٢	٧	٦	١٥
المجموع	١١	١٨	١٦	٤٥

لإيجاد معامل التوافق $م_{ت}$ نحسب أولا قيمة جـ كالتالي :

$$جـ = \frac{(٦)^٢}{١١ \times ١٥} + \frac{(٥)^٢}{١٨ \times ١٥} + \frac{(٤)^٢}{١٦ \times ١٥}$$

$$+ \frac{(٣)^٢}{١١ \times ١٥} + \frac{(٦)^٢}{١٨ \times ١٥} + \frac{(٦)^٢}{١٦ \times ١٥}$$

$$+ \frac{(٢)^٢}{١١ \times ١٥} + \frac{(٧)^٢}{١٨ \times ١٥} + \frac{(٦)^٢}{١٦ \times ١٥}$$

$$جـ = ٠,٢٢ + ٠,٠٩ + ٠,٠٧ +$$

$$+ ٠,٠٥ + ٠,١٣ + ٠,١٥ +$$

$$+ ٠,٠٢ + ٠,١٨ + ٠,١٥ +$$

$$جـ = ١,٠٧$$

$$م_{ت} = \sqrt{\frac{جـ - ١}{جـ}}$$

$$= \sqrt{\frac{١,٠٧ - ١}{١,٠٧}}$$

$$= \sqrt{٠,٠٧}$$

$$= ٠,٢٦$$

أي يوجد ارتباط ضعيف بين لون الشعر ولون العيون .

ولأهمية دراسة مفهوم الاقتران في كثير من المسائل التطبيقية بين متغيرين أو أكثر، وذلك للاستدلال على طبيعة الاقتران أو قياس معامل الاقتران، وذلك للمقارنة والتعرف على قوة مثل هذا الاقتران. نواجه في دراسة الاقتران عددا من تطبيقات الإحصاء مثل تطبيقات الإحصاء في علم الاجتماع لدراسة ظواهر ما، وعلاقة ذلك بالدين أو التعليم أو الجنس أو العادات الأخرى، كما نواجه مثل هذه الدراسات في كثير من العلوم أحيانا، وفي دراسة بعض الخصائص الوراثية مثل لون الشعر أو العين. . إلخ .

باستخدام الجدول (١٤) يمكن أن نشير إلى الحد العام على أنه $ك_{س ص}$ حيث إن عدد صفوف الجدول ل، وعدد أعمدته م. نرمز لأي قراءة من الجدول $ك_{س ص}$ بالمشاهدة «مش»، ويسمى المقدار $\frac{ك_س ك_ص}{ك}$ القيمة المتوقعة للقراءة، ونرمز لها بالرمز «مت»، وبذلك نحسب ما يسمى مربع كاي، ونرمز له $كا^2$ على الصورة

$$كا^2 = مجـ \frac{(مش - مت)^2}{مت} \quad \ldots\ldots\ldots (١٢)$$

حيث إن المجموع مجـ يكون على جميع خلايا الجدول.

مثـــال (٨)

أوجد مربع كاي لبيانات المثال ٧ عند دراسة الاقتران بين لون الشعر ولون العين لعينة مكونة من ٤٥ شخصًا.

الحـــل

أولا نكوّن جدول القيم المشاهدة كما يلي:

لون الشعر س / لون العيون ص	أشقر	بني	أسود	المجموع
أزرق	٦	٥	٤	١٥
عسلي	٣	٦	٦	١٥
أسود	٢	٧	٦	١٥
المجموع	١١	١٨	١٦	٤٥

أما جدول القيم المتوقعة فيمكن حسابه لكل خلية على حده فبالنسبة للخلية في الصف الأول والعمود الأول التي قيمة مشاهداتها ٦ فإن القيمة المتوقعة لها

$$مت_{١١} = \frac{١١ \times ١٥}{٤٥} = \frac{١١}{٣}$$

والقيمة المتوقعة للخلية في الصف الثاني والعمود الأول

$$مت_{١٢} = \frac{١١ \times ١٥}{٤٥} = \frac{١١}{٣}$$

وبالمثل نلاحظ أن

$$مت_{٢١} = \frac{١٨ \times ١٥}{٤٥} = ٦$$

ومن ذلك يكون جدول القيم المتوقعة هو

لون الشعر س / لون العيون ص	أشقر	بني	أسود
أزرق	$\frac{١١}{٣}$	٦	$\frac{١٦}{٣}$
عسلي	$\frac{١١}{٣}$	٦	$\frac{١٦}{٣}$
أسود	$\frac{١١}{٣}$	٦	$\frac{١٦}{٣}$

وبالتالي فإنه باستخدام الجدولين السابقين يكون مربع كاي هو

$$كا^{٢} = \frac{(٦ - \frac{١١}{٣})^{٢}}{\frac{١١}{٣}} + \frac{(٣ - \frac{١١}{٣})^{٢}}{\frac{١١}{٣}} + \frac{(٢ - \frac{١١}{٣})^{٢}}{\frac{١١}{٣}}$$

$$= \frac{(٥ - ٦)^{٢}}{٦} + \frac{(٦ - ٦)^{٢}}{٦} + \frac{(٧ - ٦)^{٢}}{٦}$$

$$كا^{٢} = \frac{(٤ - \frac{١٦}{٣})^{٢}}{\frac{١٦}{٣}} + \frac{(٦ - \frac{١٦}{٣})^{٢}}{\frac{١٦}{٣}} + \frac{(٦ - \frac{١٦}{٣})^{٢}}{\frac{١٦}{٣}}$$

= ١,٤٨ + ٠,١٢ + ٠,٧٦
+ ٠,١٧ + ٠,٠٠ + ٠,١٧
+ ٠,٣٣ + ٠,٠٨ + ٠,٠٨
= ٣,١٩

بعد حساب مربع كاي يمكن حساب معامل كارل بيرسون للاقتران بالصيغة التالية:

$$م_ي = \sqrt{\frac{كا^2}{ك_{..} + كا^2}} \quad .... (١٣)$$

كما اعتاد بعض الإحصائيين على استخدام كمية أخرى تسمى مربع فاي، ويرمز لها بالرمز $ف^2$ وهي

$$ف^2 = \frac{كا^2}{ك_{..}}$$

وبذلك فإنه يمكن حساب معامل بيرسون للاقتران باستخدام مربع فاي من

$$م_ي = \sqrt{\frac{ف^2}{١ + ف^2}} \quad .... (١٤)$$

مثـــال (٩)

أوجـد معامل بيرسون للاقتران لبيانات المثال ٨ السابق باستخدام مربع كاي ومربع فاي.

الحـــل

سبق أن حسبنا مربع كاي فكانت قيمتة

$$كا^2 = ٣,١٩$$

وبذلك يكون معامل بيرسون للاقتران

$$م_ي = \sqrt{\frac{٣,١٩}{٤٥ + ٣,١٩}} = ٠,٢٦$$

ولحساب مربع فاي يكون لدينـا :

$$ف^{٢} = \frac{٣,١٩}{٤٥}$$

$$= ٠,٠٧$$

وبالتالي فإن معامل بيرسون للاقتران هو:

$$م_{ي} = \sqrt{\frac{٠,٠٧}{١ + ٠,٠٧}}$$

$$= ٠,٢٦$$

وقد لوحظ أن معامل بيرسون للاقتران $م_{ي}$ لا يساوي الوحدة حتى في حالة الاقتران الكلي بين متغيرين عندما تكون التقسيمات ل، م محدودة وتقترب من الوحدة عندما تكون قيم ل، م كبيرة جدًّا.

وقد لوحظ أنه في حالة ل = م فإن القيمة العظمى لمعامل بيرسون للاقتران هي

م = ٢ فإن $م_{ي}$ = ٠,٧٠٧

م = ٣ فإن $م_{ي}$ = ٠,٨١٦

م = ١٠ فإن $م_{ي}$ = ٠,٩٤٩

وبذلك يمكن استخدام معامل بيرسون للاقتران فقط للمقارنة بين قيمة بيانات مختلفة في حالة تساوي أبعاد هذه البيانات أي أن لها نفس الصفوف والأعمدة.

ولتجاوز هذه المشكلة فقد اقترح تشابرو ما يسمى معامل تشابرو للاقتران، ويرمز له بالرمز $م_{و}$ ويحسب بالصيغة التالية :

$$م_{و}^{٢} = \frac{ف^{٢}}{\sqrt{(ل - ١)(م - ١)}} \quad .... (١٥)$$

أو

$$\text{م}_{\text{و}}^{٢} = \frac{\text{م}_{\text{ي}}^{٢}}{\sqrt{(١ - \text{م}_{\text{ي}}^{٢})\,(\text{ل} - ١)\,(\text{م} - ١)}} \quad \ldots\ldots\ (١٦)$$

حيث إن العلاقتين (١٥) و (١٦) متكافئتان.

وقد تبين أن معامل تشابرو يقع بين الصفر والواحد عندما تكون ل = م.

مثـــال (١٠)

أوجد معامل تشابرو للاقتران لبيانات مثالي ٨ و ٩ السابقين. وبما أننا سبق وأن حسبنا المقدارين $\text{ف}^{٢}$ و $\text{م}_{\text{ي}}$ عندئذ يكون معامل تشابرو للاقتران حسب العلاقة (١٥) هو:

$$\text{م}_{\text{و}}^{٢} = \frac{٠,٠٧}{\sqrt{(٣ - ١)\,(٣ - ١)}}$$

$$= ٠,٠٣٥$$

بينما يكون نفس المعامل باستخدام العلاقة (١٦) هو:

$$\text{م}_{\text{و}}^{٢} = \frac{(٠,٢٦)^{٢}}{\sqrt{(١ - (٠,٢٦)^{٢})\,(٣ - ١)\,(٣ - ١)}}$$

$$= ٠,٠٣٥$$

أي أن:

$$\text{م}_{\text{و}} = ٠,١٩$$

(٥ ـ ٥) خـــط الانحـــدار

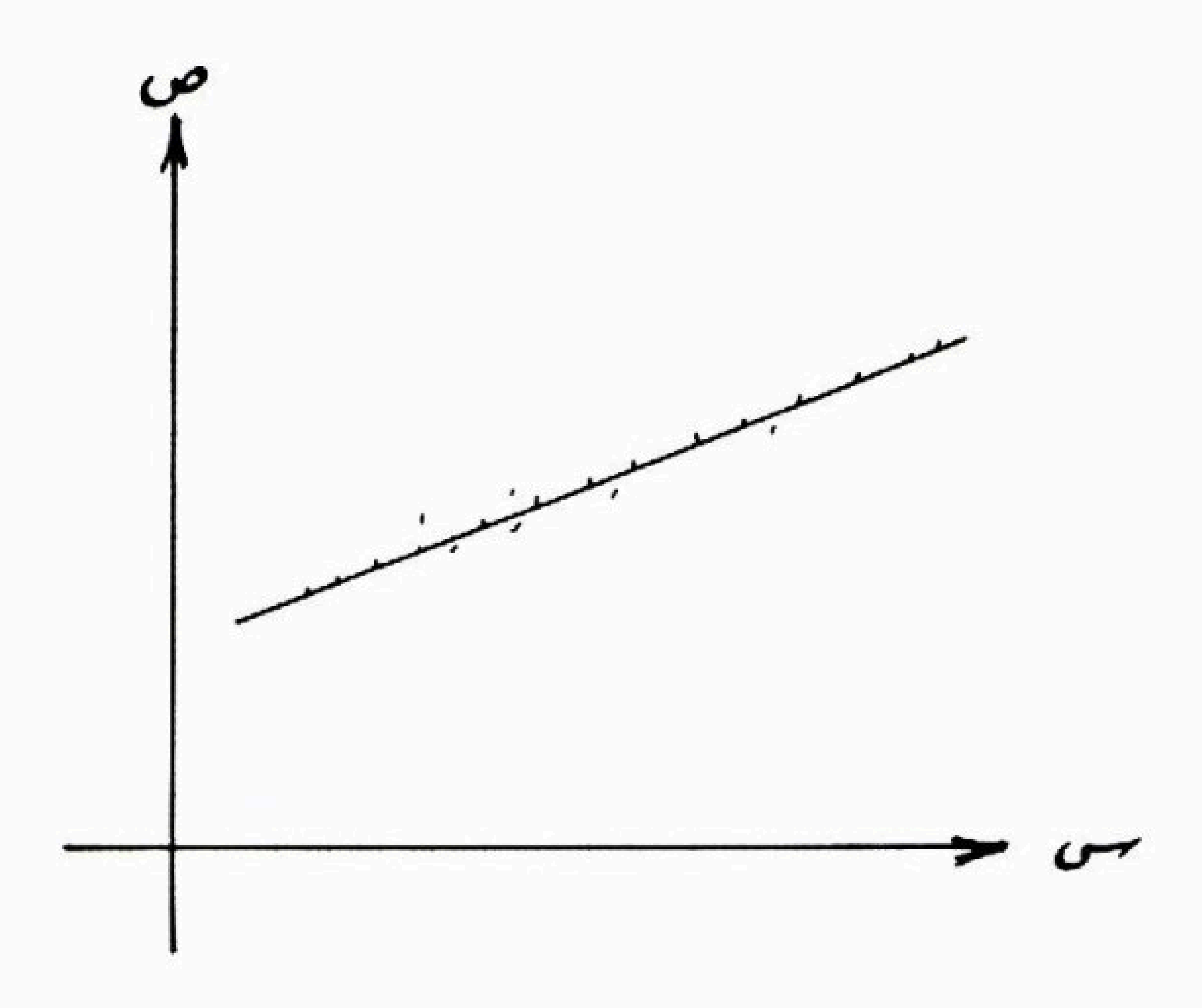
سبق أن درسنا في هذا الفصل طرق حساب قيمة معامل الارتباط الخطي بين متغيرين س، ص بعدة طرق، وذلك في معامل الارتباط لبيرسون، أو معامل الارتباط للرتب لسبيرمان، كما تعرفنا على كيفية إيجاد قيمة معامل الاقتران لكارل بيرسون وغيره. ومن الملاحظ أن جميع المقاييس السابقة تبين أو تعطي قوة الارتباط بين أي متغيرين

فقط، ولكن إذا كان يود الدارس أو الباحث استقصاءً أو بحثًا لأحد المتغيرين عند معـرفة قيمة محددة للمتغير الآخر فإنه لا يمكن استخدام معامل الارتباط أو معاملي الاقــتران والتــوافق ولا بد للوصـــول إلى إيجـاد علاقـة جبرية محددة بين المتغـيرين (س، ص)، تسمى عادة العلاقة الرياضية التي تفرض التوقع أو التنبوء بسلوك أحد المتغيرين عند معرفة الآخر بمعادلة خط الانحدار. وتشير معادلة خط الانحدار إلى انحدار أحد المتغيرين على المتغير الآخر، وسوف ندرس فيما يلي معادلة خط انحدار المتغير ص على المتغير س وكذلك معادلة خط انحدار المتغير «س» على المتغير «ص» ويمكن تلخيص الصورتين الجبرية والبيانية لخطيْ الانحدار فيما يلي.

(٥ ـ ٥ ـ ١): انحدار ص على س يعطي بالمعادلة التالية

ص = ا س + ب .... (١٧)

ويمكن توضيح المقصود بالشكل البياني التالي:

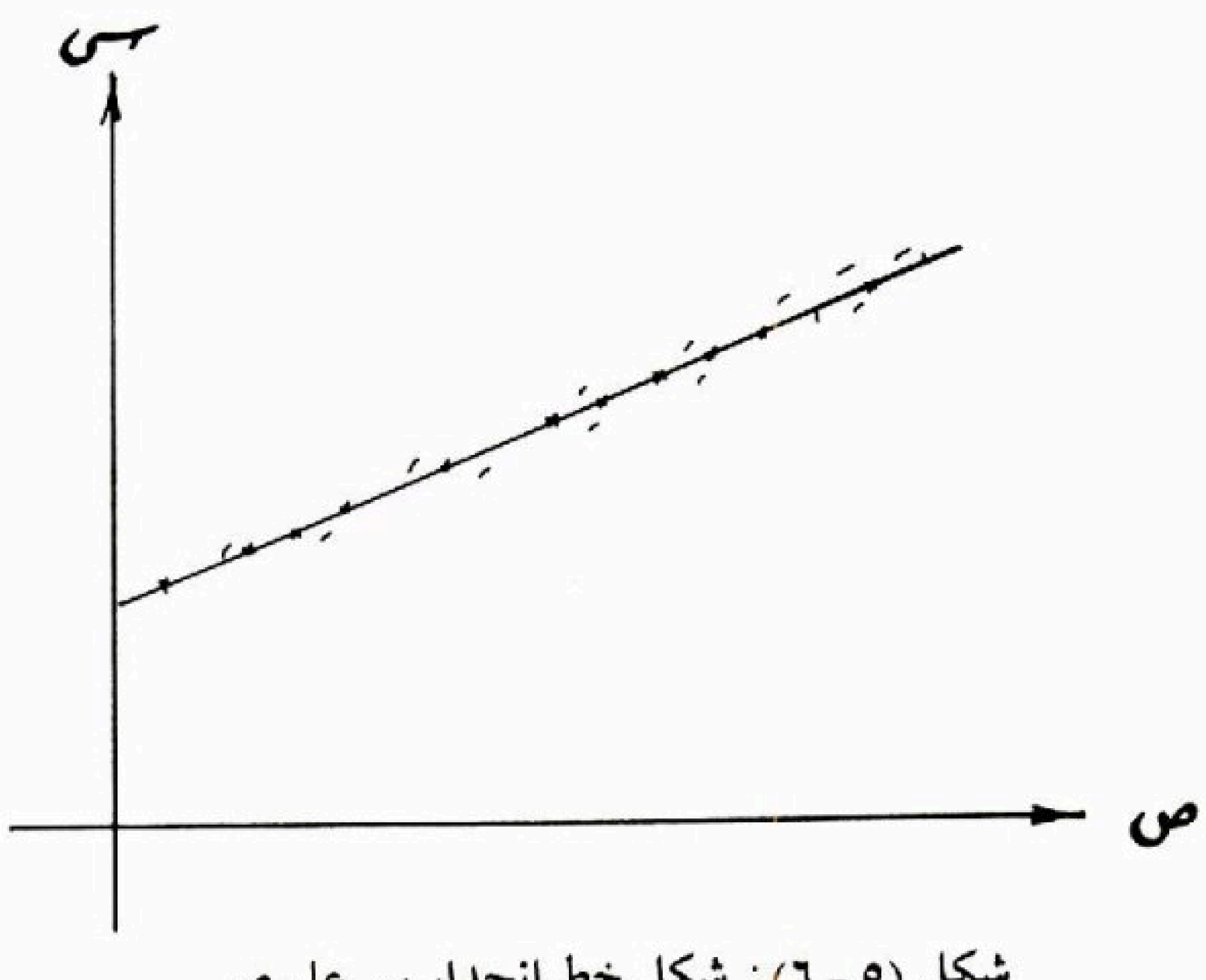


شكل (٥ ـ ٥): شكل خط انحدار ص على س

(٥ ـ ٥ ـ ٢): انحدار س على ص ويعطى بالمعادلة التالية

س = ا ص + ب .... (١٨)

ويمكن توضيح المقصود بالعلاقة السابقة بالرسم البياني التالي:



شكل (٥ ـ ٦): شكل خط انحدار س على ص

حيث إن أحد المتغيرين يعتمد على الآخر سواء كان الاعتماد طرديًا أو عكسيًا.

ويمكن تحديد ورسم خط الانحدار بعدة طرق: منها تمهيد خط مناسب بعد رسم شكل الانتشار للبيانات الخاصة بالمتغيرين (س، ص) وهذه الطريقة تقريبية جدًا، ولا تستخدم كثيرًا، لأنها تختلف من شخص لآخر، ولهذا كان لا بد من إيجاد طريقة لتوفيق خط الانحدار بحيث لا تعتمد على انطباع الأشخاص، ولكن تعتمد على البيانات الخاصة بالمتغيرين (س، ص) فقط من المعادلة (١٧) أو (١٨). ومن ذلك يمكن تحديد الصيغة الرياضية لخط انحدار ص على س بالضبط إذا عُلِمَتْ قيمتا الثابتين ا، ب واللذين يمكن حسابهما باتباع طريقة المربعات الصغرى التي نوردها فيما يلي:

إذا كان الخطأ في تمثيل النقطة (س ر، ص ر) عن خط الانحدار هو خ ر فإن:

$$خ_ر = ص_ر - ا س_ر - ب$$

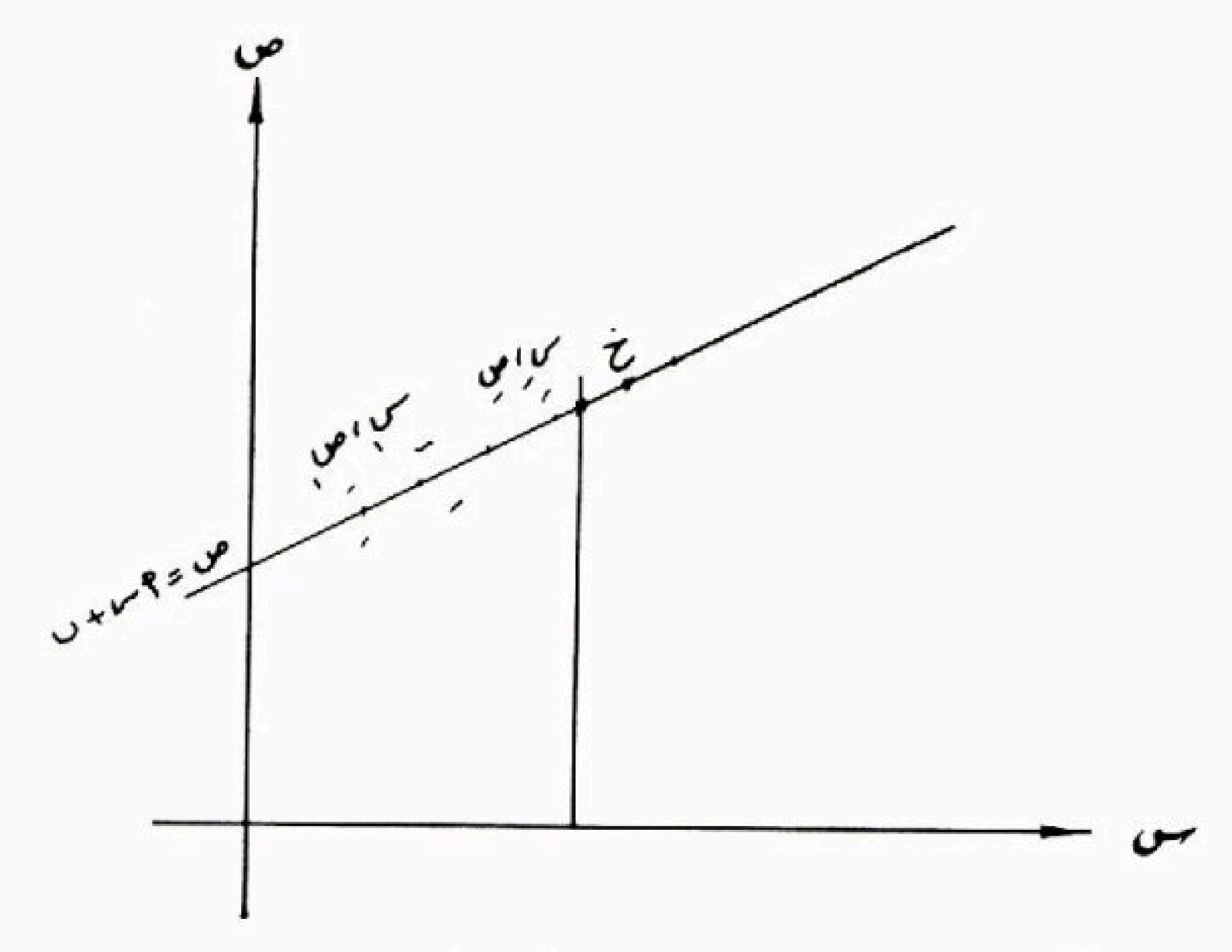
عندئذ يكون مجموع مربعات الأخطاء (م) هو:

$$م = مجـ خ_ر^٢ = مجـ (ص_ر - ا س_ر - ب)^٢$$

ولكي يكون (م) نهاية صغرى (أي أن الأبعاد الرأسية للنقطة عن الخط المقترح أصغر ما يمكن) فإننا نفاضل (م) بالنسبة لكل من (ا) و (ب) وتساوي نتيجة التفاضل في كل منهما بالصفر فنحصل على المعادلتين التاليتين:

$$مجـ ص = ا مجـ س + ن ب \qquad .... (١٩)$$

$$مجـ س ص = ا مجـ س^٢ + ب مجـ س \qquad .... (٢٠)$$



شكل (٥ - ٧): كيفية إيجاد معادلة خط انحدار ص على س

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على قيمتي الثابتين (ا) و (ب) كما يلي:

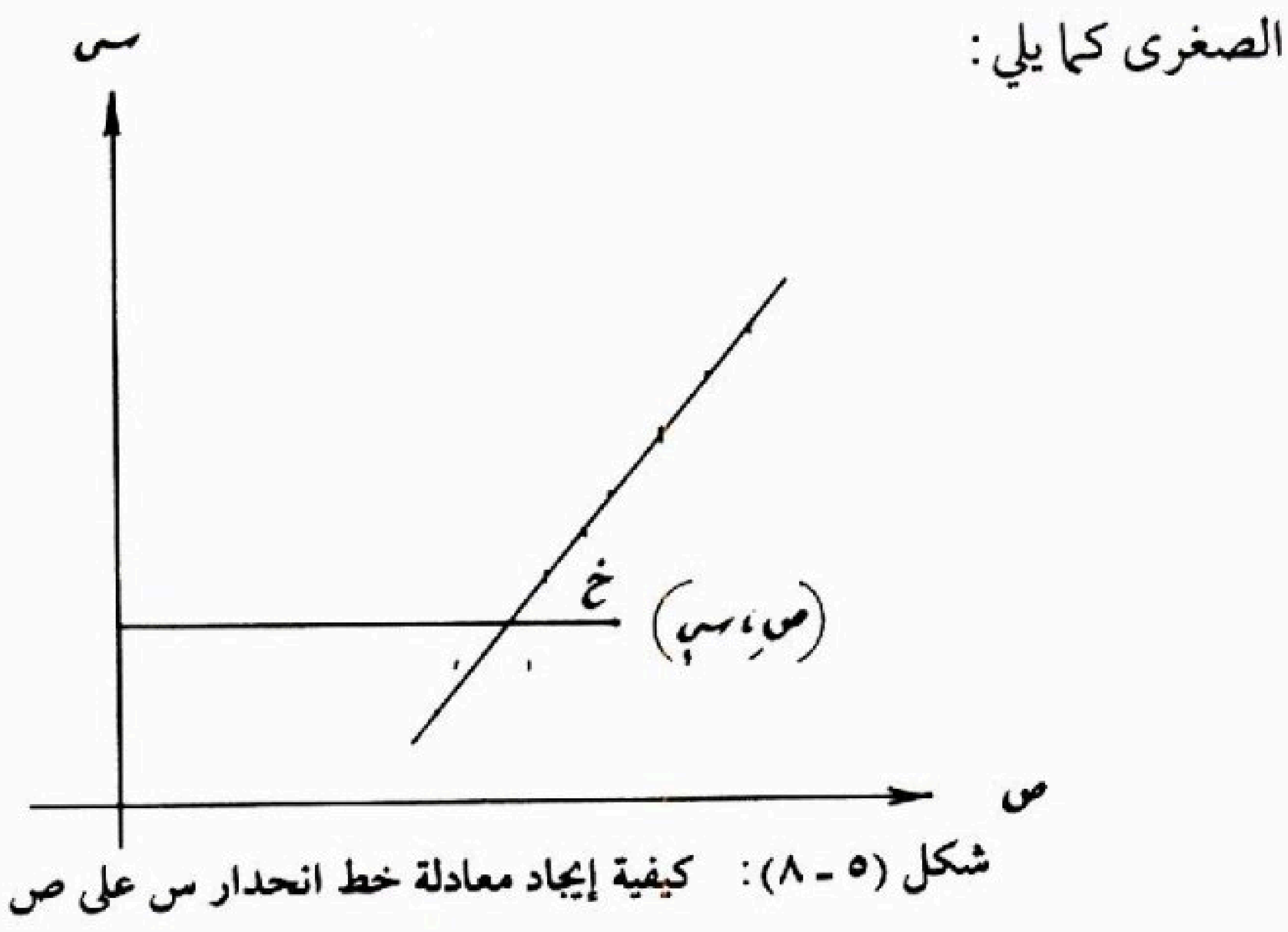
$$ا = \frac{ن مجـ س ص - مجـ س مجـ ص}{ن مجـ س^٢ - (مجـ س)^٢}$$

ويسمى الثابت (ا) عادة بمعامل انحدار ص على س.

$$ب = \frac{مج\ ص}{ن} - ا\ \frac{مج\ س}{ن}$$

حيث إن ب تمثل الجزء الذي يقطعه خط انحدار ص على س من محور ص.

ويمكن إعادة الخطوات السابقة لإيجاد معادلة خط انحدار س على ص المعطاة بالمعـادلـة (١٨) وكذلك حساب الثوابت ا و ب للمعادلة (١٨)، بطريقة المربعات الصغرى كما يلي:



شكل (٥ ـ ٨): كيفية إيجاد معادلة خط انحدار س على ص

$$خ_{ر} = س_{ر} - اص_{ر} - ب$$

عندئذ يكون مجموع مربعات الأخطاء (م) هو

$$م = مج\ خ^{٢}_{ر} = مج\ (س_{ر} - أ\ ص_{ر} - ب)^{٢}$$

ولكي يكون (م) نهاية صغرى فإننا نفاضل (م) بالنسبة إلى ا و ب على التوالي ونساوي الناتج في كل منهما بصفر فنحصل على المعادلتين التاليتين:

$$مج\ س = ا\ مج\ ص + ن\ ب \quad \ldots\ldots\ (٢١)$$

$$مج\ س\ ص = أ\ مج\ ص + ب\ مج\ ص \quad \ldots\ldots\ (٢١)$$

وبحل المعادلتين نحصل على قيمتي الثابتين ا و ب كما يلي:

$$ا = \frac{ن \text{ مجـ } س ص - \text{مجـ } س \text{ مجـ } ص}{ن \text{ مجـ } ص^٢ - (\text{مجـ } ص)^٢}$$

حيث ا يسمى معامل انحدار س على ص.

$$ب = \frac{\text{مجـ } س}{ن} - ا \frac{\text{مجـ } ص}{ن}$$

حيث إن ب تمثل الجزء المقطوع من محور س لخط انحدار س على ص.

مثـــال (١١)

أوجد معادلة خط انحدار الإنفاق (ص) على الدخل (س) ومن ثم أوجد مقدار الإنفاق عندما يكون الدخل ٣٠٠٠ ريال كما أوجد معادلة خط انحدار الدخل (س) على الإنفاق (ص) وذلك باستخدام البيانات المعطاة في مثال (١) السابق.

الحـــل

نلخص الحل في الجدول التالي:

س	ص	س ص	$س^٢$	$ص^٢$
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
١٠	٩	٩٠	١٠٠	٨١
١٢	١٢	١٤٤	١٤٤	١٤٤
١٢	١٠	١٢٠	١٤٤	١٠٠
١٣	١٠	١٣٠	١٦٩	١٠٠
١٥	١٣	١٩٥	٢٢٥	١٦٩
٢٠	١٩	٣٨٠	٤٠٠	٣٦١
٩٠	٨١	١١٢٣	١٢٤٦	١٠١٩

أولا

لإيجاد معادلة خط انحدار الإنفاق (ص) على الدخل (س) نحسب التالي :

$$\text{ا} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{\text{٢}} - (\text{مجـ س})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٧} \times \text{١١٢٣} - \text{٩٠} \times \text{٨١}}{\text{٧} \times \text{١٢٤٦} - (\text{٩٠})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٥٧١}}{\text{٦٦٢}} = \text{٠,٩٢}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - \text{ا} \; \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{٨١}}{\text{٧}} - \text{٠,٩٢} \times \frac{\text{٩٠}}{\text{٧}}$$

$$= \text{١١,٥٧} - \text{١١,٨٣}$$

$$= - \text{٠,٢٦}$$

معادلة خط انحدار ص على س تصبح

ص = ٠,٩٢ س + (−٠,٢٦)

= ٠,٩٢ س − ٠,٢٦

ويكون قيمة الإنفاق ص عندما يكون الدخل س = ٣٠٠٠ ريال هو

ص = ٠,٩٢ (٣٠) − ٠,٢٦

= ٢٧,٦٠ − ٠,٢٦

= ٢٧,٣٤

أي أن الإنفاق = ٢٧,٣٤ × ١٠٠ = ٢٧٣٤ ريالا

ثانيا

لإيجاد معادلة خط انحدار س على ص نحسب قيم « ا » و «ب» كما يلي :

$$\text{أ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^{\text{٢}} - (\text{مجـ ص})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{٨١ \times ٩٠ - ١١٢٣ \times ٧}{١٠٩١ \times ٧ - (٨١)^٢}$$

$$= \frac{٥٧١}{٥٧٢} = ٠,٩٩٨ \simeq ١$$

$$ب = \frac{مج\ س}{ن} - ١ \frac{مج\ ص}{ن}$$

$$= \frac{٩٠}{٧} - ١ \times \frac{٨١}{٧}$$

$$= ١٢,٨٦ - ١١,٥٧$$

$$= ١,٢٩$$

معادلة خط انحدار الدخل (س) على الإنفاق (ص) تكون كالتالي:

س = ص + ١,٢٩

(٥ ـ ٦) تمارين

١ ـ البيانات التالية تمثل الدخل لمجموعة من المزارعين مكونة من ٧ أفراد، وكذلك الإنفاق بآلاف الريالات مقربة لأقرب ألف.

الدخل والإنفاق لسبعة مزارعين

الدخل س	٥	٥	٦	٧	٧	٦	٨
الإنفاق ص	٤	٥	٥	٧	٦	٦	٧

ا) اوجد معامل الإرتباط لبيرسون وسبيرمان للدخل والإنفاق.

ب) اوجد معادلة خط الإنحدار ص على س.

جـ) اوجد الإنفاق عندما يصبح الدخل ١٠٠٠٠ ريال.

٢ ـ الجدول التالي يوضح سعر ثمانية من كتب الإحصاء التطبيقي، وعدد صفحات كل منها.

أسعار وعدد صفحات ثمانية كتب في الإحصاء

سعر الكتاب	٥٠	٧٠	٦٠	٨٠	٨٠	١٠٠	٩٠	١٢٠
عدد الصفحات	١٥٠	١٨٠	١٨٠	٢٠٠	٢٠٠	٢٥٠	٢٣٠	٣٠٠

ا) اوجد معامل الإرتباط بين سعر الكتاب وعدد صفحاته.

ب) اوجد معادلة خط الانحدار لسعر الكتاب على عدد الصفحات.

٣ ـ الجدول التالي يمثل عمر الزوج س وعمر الزوجة ص لعينة مكونة من ١٠ أسر.

أعمار الأزواج والزوجات في عشرة أسر

عمر الزوج س	٦٠	٢٥	٢٩	٤٠	٣٨	٢٨	٥١	٥٢	٥٥	٧٠
عمر الزوجة ص	٦٠	١٧	٢١	٤٠	٣٠	٢٠	٣٨	٥٠	٥٥	٦٥

ا) اوجد معامل ارتباط عمر الزوجة ص وعمر الزوج س بطريقتين مختلفتين.

ب) اوجد معادلة خط انحدار ص على س ثم معادلة انحدار س على ص.

جـ) اوجد عمر الزوجة عندما يكون عمر الزوج ٨٠ سنة.

٤ ـ الجدول التالي يمثل تقديرات ثمانية طلاب في مادتي الإحصاء والفيزياء.

تقديرات ثمانية طلاب في الإحصاء والفيزياء

الإحصاء	أ	هـ	د	د	جـ	ب	ب	هـ
الفيزياء	ب	هـ	جـ	د	هـ	ب	أ	د

اوجد معامل الارتباط بين تقديرات الإحصاء والفيزياء.

٥ ـ الجدول التالي يمثل تكاليف الدعاية س بمئات الريالات والمبيعات ص بمئات الريالات.

تكاليف الدعاية وقيمة المبيعات بمئات الريالات

تكاليف الدعاية س	٩	١٠	٩	١٠	٤	٥	٧
المبيعـــات ص	١٦٠	١٨٠	١٥٠	١٩٠	١٢٠	١٢٠	١٤٠

ا) ارسم شكل الانتشار للمتغيرين س، ص.

ب) احسب معامل الإرتباط بين تكاليف الدعاية والمبيعات.

جـ) اوجد معادلة خط انحدار ص على س.

د) اوجد المبيعات (ص) عندما تصير الدعاية ١٢٠٠ ريال.

٦ - البيانـات التـالية تمثل اختبار الذكاء واختبار مادة الإحصاء التي حصلنا عليها لمجموعة مكوّنة من ٦ طلاب.

درجة الذكاء ودرجة الإحصاء لستة طلاب

درجة الذكاء س	٧٠	٨٠	٩٠	٦٠	٧٥	٨١
درجة الإحصاء ص	٦٠	٨٠	٩٥	٦٥	٧٤	٨٠

ا) اوجد معامل الإرتباط بين س، ص بطريقتين مختلفتين.

ب) اوجد معادلة خط انحدار ص على س، وكذلك خط انحدار س على ص.

جـ) ارسم خطي الإنحدار وأوجد نقطة التقاطع.

٧ - الجدول التالي يمثل درجات أعمال السنة س، ودرجات الامتحان النهائي ص لعينة مكوّنة من سبعة طلاب.

درجات أعمال السنة والامتحان النهائي لسبعة طلاب

أعمال السنة س	١٥	٢٥	٣٠	٣٥	٣٣	٢٥	٢٨
الامتحان النهائي ص	٤٥	٤٠	٥٠	٤٦	٤٥	٣٥	٤٠

ا) اوجد معامل الإرتباط بين المتغيرين (س ، ص) .

ب) اوجد معادلة خط الإنحدار لدرجة الامتحان النهائي (ص) على درجة أعمال السنة (س) .

جـ) اوجد درجة الامتحان النهائي عندما تكون درجة أعمال السنة ٣٩ .

٨ - في تجربة لدراسة تأثير تطعيم مجموعة من الحيوانات ضد مرض معين كانت النتائج كما يلي .

التكرارات المشتركة للتطعيم والإصابة بالمرض

الإصابة / التطعيم	أصيب بالمرض	لم يصب بالمرض
طعم	٥	١٢
لم يطعم	٩	٤

أوضح مدى تأثير التطعيم في الوقاية من هذا المرض .

٩ - كانت نتيجة دراسة ألوان البشرة لمجموعة من الأمهات وأول أبنائهن أو بناتهن كما يلي

التكرارات المشتركة لألوان بشرة الأمهات وأوائل الأطفال

الأمهات / الأبناء / البنات	أبيض	قمحي	أسمر
أبيض	٢٧	٦	٧
قمحي	٨	١٧	٥
أسمر	٥	٧	١٨

بيّن فيما إذا كان هناك توافق بين لون بشرة الطفل الأول والأم وناقش ذلك .

١٠- أجري بحث في إحدى عيادات العلاج النفسي عن مدى ارتباط الوضع الاجتماعي ونوعية المرض فكانت النتائج كما يلي :

التكرارات المشتركة بين الأوضاع الاجتماعية والأمراض النفسية

نوع المرض / الوضع الاجتماعي	أعصاب	كآبة	اضطرابات شخصية	فصام شخصية
عالٍ	٢٥	٥	١٢	٨
متوسط	٨	٢٠	١٥	١٢
منخفض	٧	١١	٨	٩

ادرس الاقتران بين الوضع الاجتماعي، ونوع المرض.

١١ـ في دراسة لعينة من موظفي جامعة الملك سعود كانت العلاقة بين العمر (للأب) وعدد الأطفال كما يلي:

التكرارات المشتركة لفئات العمر للآباء وأعداد الأطفال

عدد الأطفال / العمر	٠ـ٢	٣ـ٥	٥ـ٧	٨ـ١١
٢٠ـ٢٥	١٢			
٢٥ـ٣٠	٧	٥		
٣٠ـ٣٥	٥	٨		
٣٥ـ٤٠		٧	٤	
٤٠ـ٤٥		٦	٣	
٤٥ـ٥٠		٤	٩	
٥٠ـ٥٥		٢	٧	٥
٥٥ـ٦٠			١٠	١٥

أوجد معامل الإرتباط بين عمر الأب وعدد الأطفال.

١٢ـ لدراسة العلاقة بين الدخل (س) بآلاف الريالات والمصروف (ص) بآلاف الريالات في إحدى المدن ـ أخذت عينة من الأسر فكانت لدينا النتائج الآتية:

$\bar{س} = ٥$ ، $\bar{ص} = ٤$ ، مجـ س ص = ٧٥٠ ، مجـ $س^{٢}$ = ١٤٨٠ ،

مجـ $ص^{٢}$ = ٥٠٠ ، مجـ ص = ٨٠

ا) اوجد معامل الارتباط بين س، ص وبيّن نوعه.

ب) اوجد خط انحدار س على ص.

جـ) قدّر قيمة الدخل عندما يكون الاستهلاك ٦ آلاف ريال.

١٣ـ البيانات التالية تمثل تقديرات ثمانية طلاب في مقررين دراسيين.

تقديرات ثمانية طلاب في مقررين

المقرر الأول	أ	ب	د	هـ	جـ	د	هـ	ب
المقرر الثاني	أ	جـ	هـ	د	جـ	د	هـ	ب

اوجد معامل الارتباط لتقديرات هذين المقررين.

الفصل السادس

الأرقام القياسية

(٦ - ١) مقدمـــة

لقد صاحب التقدم والتطور التكنولوجي المعاصر اتساع في التبادل التجاري بين الدول والشعوب، وزيادة في الإنتاج والاستهلاك، وربما رافق ذلك بعض الزيادة في الأسعار لبعض السلع، وارتفاع في تكاليف المعيشة بالنسبة لمستوى الدخل، مما يجب تغطيته بزيادة معقولة في الرواتب والأجور على المستويين العام والخاص. دفعت كل هذه العوامل المسئولين لبحث واستقصاء مقدار التغير في الأسعار ونفقات المعيشة مثلا، حتى يتمكنوا من تحديد زيادة مناسبة في الرواتب والأجور تتفق مع الزيادة التي تطرأ على أسعار السلع وتكاليف المعيشة، أو لدراسة كيفية معالجة مثل هذه الزيادة في بعض السلع على الأقل. ولـذلـك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقاييس إحصائية تعبر بصورة واضحـة ودقيقة عن مقدار التغيرات من حيث الزيادة أو النقص في الأسعار، أو في الكميات المنتجة، أو الكميات المستهلكة أو الكميات المعروضة، أو قيمة الصادرات أو الواردات بالنسبة لفترتين زمنيتين مختلفتين، أو بالنسبة لمكانين مختلفين.

وهذه المقاييس هي ما يسمى الأرقام القياسية، وسوف نكتفي بدراسة الأرقام القياسية للمتغيرات بالنسبة للزمن، وهي: عبارة عن مقياس نسبي لقيمة المتغير محل الدراسة في فترة زمنية معينة تسمى فترة المقارنة، بالنسبة إلى قيمة هذا المتغير في فترة زمنية أخرى تسمى فترة الأساس. ولتعريف الرقم القياسي نورد على سبيل المثال ما يلي:

إذا كان سعر سلعة ما في ١٣٩٥هـ هي ٤٠ ريالاً وسعرها في ١٤٠٠هـ هو ٥٠ ريالاً فإن الرقم القياسي لسعر هذه السلعة في عام ١٤٠٠هـ باعتبار أن عام ١٣٩٥هـ سنة الأساس: هو حاصل قسمة السعر في سنة المقارنة ١٤٠٠هـ مقسوما على السعر في سنة الأساس ١٣٩٥هـ مضروبًا في ١٠٠ أي أن:

$$\frac{٥٠}{٤٠} \times ١٠٠ = ١٢٥٪$$

ولقد جرت العادة على حذف النسبة المئوية، وكذلك التعبير عن سنة الأساس بالرقم ١٠٠ وعليه، ففي المثال السابق يمكن القول: إن سعر السلعة زاد في سنة المقارنة ١٤٠٠هـ بمقدار ٢٥٪ عما كان عليه سعر السلعة في سنة الأساس ١٣٩٥هـ.

ولكي تكون الأرقام القياسية معبرة بصورة صحيحة يجب أن تختار فترة الأساس بحيث تكون فترة طبيعية ومستقرة بعيدة عن الأحداث الطارئة، مثل الكوارث والحروب. . الخ.

وهناك عدة أنواع من الأرقام القياسية نذكر منها الأرقام القياسية البسيطة (التجميعية والنسبية)، والأرقام القياسية المرجحة (التجميعية والنسبية)، وكذلك الأرقام القياسية المثلى (التجميعية والنسبية). وسوف نتناول فيما يلي كلا من هذه الأنواع بالشرح مع بعض التفصيل موضحين ذلك بالأمثلة.

(٦ ـ ٢) الأرقام القياسية البسيطة

يتكون الرقم القياسي البسيط لسلعة ما بقسمة سعر السلعة في فترة المقارنة على سعر السلعة في فترة الأساس وضرب خراج القسمة في ١٠٠. فإذا كان سعر سلعة ما في سنة المقارنة هو $س_١$، وسعرها في سنة الأساس هو $س_٠$.

فإن الرقم القياسي البسيط لهذه السلعة يعرَّف كالتالي:

$$\text{الرقم القياسي البسيط} = \frac{س_١}{س_٠} \times ١٠٠ \qquad \ldots\ldots\ldots (١)$$

مثـــال (١)

إذا كان سعر سلعة ما عام ١٤٠٠هـ هو ٧٠ ريالاً وسعرها في عام ١٤٠٥هـ هو ١٠٥ ريالات، فاحسب الرقم القياسي البسيط لهذه السلعة لعام ١٤٠٥هـ باعتبار عام ١٤٠٠هـ سنة الأساس.

نفرض أن سعر سنة المقارنة ١٤٠٥هـ هو $س_١$ = ١٠٥ ريالات

وأن سعر سنة الأساس ١٤٠٠هـ هو $س_٠$ = ٧٠ ريالاً

فيكون الرقم القياسي البسيط للسلعة $= \frac{س_١}{س_٠} \times ١٠٠$

$= \frac{١٠٥}{٧٠} \times ١٠٠$

$= ١٥٠$

وإذا كان المطلوب حساب الرقم القياسي البسيط لأسعار مجموعة من السلع فإننا نستخدم في هذه الحالة نوعين من الأرقام القياسية البسيطة. النوع الأول يسمى الرقم القياسي التجميعي البسيط، والنـوع الثـاني يسمى الرقم القياسي النسبي البسيط، ويمكن تعريفهما كما يلي.

(٦ ـ ٢ ـ ١): الرقم القياسي التجميعي البسيط

هو مجموع أسعار السلع في سنة المقارنة مقسوما على مجموع أسعار السلع في سنة الأساس وضرب نتيجة القسمة في ١٠٠ أي أن:

الرقم القياسي التجميعي البسيط $= \frac{مج\ س_١}{مج\ س_٠} \times ١٠٠$ .... (٢)

(٦ ـ ٢ ـ ٢): الرقم القياسي النسبي البسيط

ويعرَّف بأنه متوسط الأرقام القياسية البسيطة لمجموعة من السلع وضرب الناتج في ١٠٠ أي أن:

الرقم القياسي النسبي البسيط $= \frac{1}{ن}$ مجـ $(\frac{س_1}{س_0}) \times ١٠٠$ .....(٣)

حيث إن «ن» عبارة عن عدد السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي النسبي البسيط ونوضح طريقة الحساب بالمثال التالي.

مثـــال (٢)

احسب الرقم القياسي التجميعي البسيط وكذلك الرقم القياسي النسبي البسيط لأسعار وحدة من السلع ا، ب، جـ «بالريالات» الموضحة بالجدول التالي:

جدول (٦ ـ ١): أسعار ٣ سلع في عامي ١٤٠١هـ و ١٤٠٥هـ

السلعة	أسعار عام ١٤٠١هـ بالريالات	أسعار عام ١٤٠٥هـ بالريالات
ا	٤٠	١٢٠
ب	٦٠	٩٠
جـ	٢٠	٤٠
المجموع	١٢٠	٢٥٠

سبق أن عرفنا الرقم القياسي التجميعي البسيط بالصيغة التالية:

الرقم القياسي التجميعي البسيط $= \frac{\text{مجـ } س_1}{\text{مجـ } س_0} \times ١٠٠$

وباستخدام بيانات الجدول السابق نجد أن

الرقم القياسي التجميعي البسيط $= \frac{١٢٠ + ٩٠ + ٤٠}{٤٠ + ٦٠ + ٢٠} \times ١٠٠$

$= \frac{٢٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠$

$= ٢٠٨,٣٣$

$$\text{الرقم القياسي النسبي البسيط} = \frac{١}{ن} \text{ مج } \left(\frac{س_١}{س_.}\right) \times ١٠٠$$

أي أن

$$= \frac{١}{٣}\left(\frac{١٢٠}{٤٠} + \frac{٩٠}{٦٠} + \frac{٤٠}{٢٠}\right) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣} \quad (٣ + ١,٥ + ٢) \times ١٠٠$$

$$= ٢١٦,٦٧$$

ونورد فيما يلي بعض الملاحظات على استخدام الرقمين القياسيين السابقين:

١ ـ عند استخدام الرقم القياسي التجميعي البسيط يجب ملاحظة كونه يتأثر بوحدات القياس، ولذلك يراعي عند استخدامه تساوي الوحدات لجميع السلع. بينما نجد أن الرقم القياسي النسبي البسيط لا يتأثر باختلاف الوحدات من سلعة إلى أخرى وذلك لأن النسبة تلغي الوحدات.

٢ ـ كما يلاحظ من الحسابات في مثال (٢) السابق بأن الرقم القياسي البسيط سواء التجميعي أو النسبي يشير إلى زيادة في أسعار السلع يفوق الضعف، وعند النظر إلى جدول أسعار ا، ب، جـ نجد أن السلعة ا زادت بمقدار ثلاثة أضعاف سعرها في سنة الأساس، وأن السلعة «ب» زادت بمقدار قليل يمثل نصف السعر، أما السلعة جـ فإنها زادت بمقدار الضعف، وهذا يفسر أن السلعة ا أثرت على زيادة الرقم القياسي للأسعار للسلع الثلاثة مما جعل قيمته تزيد عن الضعف.

ولذلك فإننا بحساب الرقم القياسي بهذه الطريقة نكون قد أعطينا نفس الأهمية. أو نفس الوزن لجميع السلع الداخلة في حساب الرقم القياسي وهذا ليس صحيحًا دائمًا. فهل السلعة « ا » من الأهمية بحيث تعطي أهمية أكبر من السلعتين ب، جـ، عند حساب الرقم القياسي البسيط؟

بالفرض الصحيح، عند حساب مستوى تكاليف المعيشة في منطقة ما لابد من إعطاء وزن للمواد أو السلع التي تدخل في استهلاك الفرد وهذه تختلف من منطقة إلى أخرى، وهذا ينطبق على الأرقام القياسية للمواد المستوردة أو المصنعة إلخ. مثل هذا التساؤل عن أهمية العناصر أو السلع الداخلة في حساب الأرقام القياسية يقودنا إلى دراسة ما يسمى الأرقام القياسية المرجحة.

(٦ ـ ٣) الأرقام القياسية المرجحة

تحسب الأرقام القياسية المرجحة بعد إعطاء كل سلعة وزنًا أو ترجيحًا يتناسب مع أهميتها في تكوين الرقم القياسي. وقد تكون هذه الأوزان هي الكمية المنتجة من هذه السلع، أو الكميات المستهلكة منها في إحدى السنوات، أو الكميات المعروضة منها أو. . . وذلك لتلافي تأثير إحدى السلع الداخلة في تكوين الرقم القياسي تأثيرًا أكبر من السلع الأخرى، مع أن هذه السلعة أقل أهمية من السلع الأخرى. وعندما نستخدم الأوزان لبيان أهمية السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي فإننا في هذه الحالة نسمي الأرقام القياسية بالأرقام القياسية المرجحة. وسوف نتناول دراسة الأرقام القياسية المرجحة بالنسبة لأوزان أو كميات سنة الأساس، وهي ما تسمى الأرقام القياسية للاسبير (Laspeyres). والأرقام القياسية المرجحة بالنسبة لأوزان أو كميات سنة المقارنة، وهي ما تسمى الأرقام القياسية لباش (Paasche). وكذلك الأرقام الناتجة من الوسط الهندسي لكل من الرقمين القياسيين السابقين للاسبير وباش، وهي ما تسمى الأرقام القياسية المثلى لفيشر (Fisher). وسنتناول تعريف كل من هذه الأرقام القياسية مع تطبيقها على مثال لتوضيح طريقة استخدامه.

(٦ ـ ٣ ـ ١) الرقم القياسي المرجح للاسبير

يستخدم الرقم القياسي المرجح للاسبير (Laspeyres) كميات أو أوزان سنة الأساس كأوزان مرجحة وذلك لحساب الرقم القياسي المرجح لأسعار مجموعة من السلع فإذا كانت الكميات النسبية لسنة الأساس $ك_{٠}$، والكميات النسبية لسنة المقارنة $ك_{١}$ (حيث إن المقصود بالكميات النسبية هو حاصل قسمة كمية السلعة على مجموع

الكميات في تلك السنة)، وأسعار سنة الأساس $س_.$ وأسعار سنة المقارنة $س_١$ لمجموعة من السلع فإننا نعرِّف **الرقم القياسي التجميعي المرجح للاسبير** على أنه: «***مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في الكميات النسبية لسنة الأساس مقسوما على مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في الكميات النسبية لسنة الأساس وضرب نتيجة القسمة في ١٠٠***» أي أن:

$$\text{الرقم القياسي التجميعي المرجح للاسبير} = \frac{مج\ س_١ ك_.}{مج\ س_. ك_.} \times ١٠٠ \quad .... \quad (٤)$$

أما **الرقم القياسي النسبي المرجح للاسبير** فهو: «***مجموع حاصل ضرب نسب سعر سنة المقارنة إلى سنة الأساس في الكميات النسبية لسنة الأساس وضرب حاصل الجمع في ١٠٠***».

أي أن:

$$\text{الرقم القياسي النسبي المرجح للأسبير} = مج\ (\frac{س_١}{س_.}) ك_. \times ١٠٠ \quad ...... \quad (٥)$$

(٦ ـ ٣ ـ ٢) الرقم القياسي المرجح لباش

يستخدم الرقم القياسي المرجح لباش (Paasche) أوزان أو كميات سنة المقارنة وذلك لحساب الرقم القياسي المرجح لأسعار مجموعة من السلع. وبذلك فإنه يمكن تعريف **الرقم القياسي التجميعي المرجح لباش** بأنه: «***مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كمياتها النسبية لسنة المقارنة مقسوما على مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في الكميات النسبية في سنة المقارنة وضرب حاصل القسمة في ١٠٠***»

أي أن

$$\text{الرقم القياسي التجميعي المرجح لباش} = \frac{مج\ س_١ ك_١}{مج\ س_. ك_١} \times ١٠٠ \quad ..... \quad (٦)$$

أمـا الـرقم النسبي المرجح لباش فهو: «*عبارة عن مجموع حاصل ضرب سعر سنة المقارنة على سعر سنة الأساس لكل سلعة مضروبا في الكمية النسبية لتلك السلعة في سنة المقارنة وضرب الناتج في ١٠٠*».

أي أن:

$$\text{الرقم القياسي النسبي المرجح لباش} = \text{مج} \left(\frac{س_١}{س_.}\right) ك_١ \times ١٠٠ \quad .... (٧)$$

(٦ ـ ٣ ـ ٣) الرقم القياسي الأمثل لفيشر

والرقم الأمثل لفيشر (Fisher) يشتق من الرقمين السابقين للاسبير وباش وهو عبارة عن الوسط الهندسي لهما.

ويعرَّف **الرقم القياسي التجميعي الأمثل لفيشر**: «*بأنه الجذر التربيعي لحاصل ضرب الرقمين القياسيين التجميعيين لكل من لاسبير وباش*».

$$\text{الرقم القياسي التجميعي الأمثل لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مج } س_١ ك_.}{\text{مج } س_. ك_.} \times \frac{\text{مج } س_١ ك_١}{\text{مج } س_. ك_١}} \times ١٠٠ \quad .... (٨)$$

أمـا الـرقم القيـاسي **النسبي الأمثل لفيشر**: فيعرَّف على أنه «*الجذر التربيعي لحاصل ضرب الرقمين القياسين النسبيين لكل من لاسبير وباش*».

$$\text{الرقم القياسي النسبي الأمثل لفيشر} = \sqrt{\text{مج} \left(\frac{س_١}{س_.}\right) ك_. \times \text{مج} \left(\frac{س_١}{س_.}\right) ك_١} \times ١٠٠ \quad ...... (٩)$$

ولتوضيح كيفية استخدام كل من الأرقام القياسية السابقة نورد المثال التالي.

مثـــال (٣)

إذا أعطيت السلع الثلاث ا، ب، جـ الموضحة في مثال (٢) أوزانا حسب أهمية كل منها كما هو مبين بالجدول:

جدول (٦ ـ ٢) : أسعار ٣ سلع لعامي ١٤٠١هـ و ١٤٠٥هـ وأوزانها المرجحة

السلعة	أسعار عام ١٤٠١ ($س_٠$)	أسعار عام ١٤٠٥ ($س_١$)	وزن المرجح لعام ١٤٠١ ($ك_٠$)	وزن المرجح لعام ١٤٠٥ ($ك_١$)
ا	٤٠	١٢٠	٠,١٩	٠,١٥
ب	٦٠	٩٠	٠,٥١	٠,٦٠
جـ	٢٠	٤٠	٠,٣٠	٠,٢٥

احسب الأرقام القياسية لكل من لاسبير وباش والأمثل لفيشر.

الحـــل

يمكن تلخيص الحسابات في الجدول التالي :

السلعة	$س_٠$	$س_١$	$ك_٠$	$ك_١$	$س_١ ك_٠$	$س_٠ ك_٠$	$س_١ ك_١$	$س_٠ ك_١$	$\frac{س_١}{س_٠}$	$\frac{س_١ ك_٠}{س_٠}$	$\frac{س_١ ك_١}{س_٠}$
أ	٤٠	١٢٠	٠,١٩	٠,١٥	٢٢,٨	٧,٦	١٨	٦	٣	٠,٥٧	٠,٤٥
ب	٦٠	٩٠	٠,٥١	٠,٦٠	٤٥,٩	٣٠,٦	٥٤	٣٦	١,٥	٠,٧٧	٠,٩٠
جـ	٢٠	٤٠	٠,٣٠	٠,٢٥	١٢,٠	٦,٠	١٠	٥	٢	٠,٦٠	٠,٥٠
المجمـــوع				١,٠٠	٨٠,٧	٤٤,٢	٨٢	٤٧	-	١,٩٤	١,٨٥

الرقم القياسي التجميعي للاسبير $= \frac{مج\ س_١ ك_٠}{مج\ س_٠ ك_٠} \times ١٠٠$ . . . . . (٦)

$= \frac{٨٠,٧}{٤٤,٢} \times ١٠٠$

$= ١٨٢,٥٨$

$$\text{الرقم القياسي النسبي المرجح للاسبير} = \text{مج}\ (\frac{\text{س}_1}{\text{س}_0})\text{ك}_0 \times ١٠٠$$

$$= ١,٩٤ \times ١٠٠$$

$$= ١٩٤$$

$$\text{الرقم القياسي التجميعي المرجح لباش} = \frac{\text{مج س}_1\text{ك}_1}{\text{مج س}_0\text{ك}_1} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٨٢}{٤٧} \times ١٠٠$$

$$= ١٧٤,٤٧$$

$$\text{الرقم القياسي النسبي المرجح لباش} = \text{مج}\ (\frac{\text{س}_1}{\text{س}_0})\text{ك}_1 \times ١٠٠$$

$$= ١,٨٥ \times ١٠٠$$

$$= ١٨٥$$

$$\text{الرقم القياسي النسبي الأمثل لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مج س}_1\text{ك}_0}{\text{مج س}_0\text{ك}_0} \times \frac{\text{مج س}_1\text{ك}_1}{\text{مج س}_0\text{ك}_1}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٨٢٥٨ \times ١,٧٤٤٧} \times ١٠٠$$

$$= ١,٧٨٤٨ \times ١٠٠$$

$$= ١٧٨,٤٨$$

$$\text{الرقم القياسي النسبي الأمثل لفيشر} = \sqrt{\text{مج}(\frac{\text{س}_1}{\text{س}_0})\text{ك}_0 \times \text{مج}\ (\frac{\text{س}_1}{\text{س}_0})\text{ك}_1} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٩٤ \times ١,٨٥} \times ١٠٠$$

$$= ١,٨٩٤٥ \times ١٠٠$$

$$= ١٨٩,٤٥$$

(٦ - ٣ - ٤) منســوب السعــر

سبق أن عرَّفنا الرقم القياسي للأسعار بأنه خارج قسمة سعر سلعة ما في فترة المقارنـة مقسـومـا على سعـر هذه السلعـة في فترة الأساس وضرب حاصل القسمة في ١٠٠ . وعادة ما يشار لخارج قسمة سعر السلعة في فترة المقارنة على سعرها في فترة الأساس بمنسوب السعر وسوف نرمز له بالرمز $م_{ق ا}$ أي أن

$$م_{ق ا} = \frac{\text{سعر سلعة ما في فترة المقارنة}}{\text{سعر هذه السلعة في فترة الأساس}} = \frac{س_{ق}}{س_{ا}}$$

وكذلك إذا علم $م_{ق ا}$ فإنه يمكن حساب الرقم القياسي بسهولة بأن نضرب هذا المنسوب في ١٠٠ أي أن :

$$\text{الرقم القياسي} = م_{ق ا} \times ١٠٠$$

(٦ - ٤) الأرقام القياسية ذات الأساس المتحرك

لقد سبق لنا حساب الأرقام القياسية وذلك بعد تثبيت فترة الأساس ، وأحيانا تكون المدة بين فترة الأساس وفترة المقارنة كبيرة نسبيا مما يجعل الرقم القياسي لأسعار مجموعة من السلع غير معبر تعبيرا صحيحا ، لأنه قد تظهر أنواع جديدة من السلع ، أو قد تختفي أنواع أخرى . كما قد تقل أهمية أو كمية بعض الأنواع ، وقد تزداد أهمية أو كمية بعضها الآخر . ولذا فإنه يلزم تكوين رقم قياسي دقيق يتطلب تقصير المدة بين فترتي الأسـاس والمقـارنـة . لأنه كلما قصرت المدة كانت ظروف التشابه للسلع محل الدراسة كبيرة ، من حيث أنواع السلع ، وكذلك أسعارها ، ولهذه الاعتبارات السابقة ، نشـأت الحاجة إلى تكوين أرقام قياسية ذات فترة أساس متحركة ، وفي نفس الوقت يمكن إرجاعها جميعا إلى أساس ثابت عند اللزوم . وبهذا نستطيع ادخال ما يستجد من أنواع جديدة من السلع ، وكذلك استبعاد السلع التي تختفي ، وكذلك أيضا تغيير أوزان السلع ، حسب ما يستجد من زيادة أو نقص في أهميتها .

وتتلخص طريقة الأساس المتحرك في أنه إذا كانت المدة بين فترة الأساس وفترة المقارنة كبيرة ، تقسم إلى مدد زمنية قصيرة تكون فيها ظروف السلع متشابة وأسعارها

متقاربة. وعند تكوين منسوب السعر لمجموعة من السلع لكل مدة زمنية، نعتبر بداية هذه المدة فترة أساس لها ونهايتها فترة المقارنة لها، وكذلك لحساب منسوب السعر للمدة التالية لنفس المجموعة من السلع، نأخذ فترة الأساس هي فترة المقارنة للمدة السابقة وهكذا... فعلى سبيل المثال إذا قسمنا مدة عشر سنوات إلى فترات كل منها سنة واحدة، وكانت الأسعار في هذه الفترات لسلعة ما كالتالي:

$$س_{٠} ، س_{١} ، \ldots\ldots\ldots ، س_{٩}$$

فإنه يمكن التعبير عن مناسيب هذه الأسعار كالتالي:

$$م_{٠١} ، م_{١٢} ، \ldots\ldots\ldots ، م_{٨٩}$$

حيث إن:

$$م_{٠١} = \frac{س_{١}}{س_{٠}} ، \quad م_{١٢} = \frac{س_{٢}}{س_{١}} ، \ldots\ldots\ldots ، م_{٨٩} = \frac{س_{٩}}{س_{٨}}$$

ومن المناسيب السابقة يمكن حساب التالي:

ا - الأرقام القياسية ذات الأساس المتحرك بضرب هذه المناسيب في ١٠٠.

ب - وإذا رغبنا في إيجاد رقم قياسي ذي أساس ثابت عند فترة ما، فإننا نضرب المناسيب ذات الأساسات المتحركة في بعضها لنحصل على المنسوب بأساس ثابت للمدة المطلوبة. ثم نضرب هذا المنسوب في ١٠٠ لنحصل على الرقم القياسي ذي الأساس الثابت.

ولتوضيح ذلك من المثال السابق. فإنه إذا أردنا حساب الرقم القياسي لمدة أربع سنوات يكون الرقم القياسي هو:

$$م_{٠٣} \times ١٠٠ = م_{٠١} \times م_{١٢} \times م_{٢٣} \times ١٠٠$$

$$= \frac{س_{١}}{س_{٠}} \times \frac{س_{٢}}{س_{١}} \times \frac{س_{٣}}{س_{٢}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{س_{٣}}{س_{٠}} \times ١٠٠$$

مثـــال (٤)

إذا كانت أسعار السلع ا، ب، جـ خلال خمس سنوات موضحة بالجدول التالي:

جدول (٦ - ٣): أسعار ٣ سلع للأعوام من ١٤٠١هـ حتى ١٤٠٥هـ

السلـــع	سعر عام ١٤٠١	سعر عام ١٤٠٢	سعر عام ١٤٠٣	سعر عام ١٤٠٤	سعر عام ١٤٠٥
ا	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠	١٢٠
ب	٦٠	٧٠	٧٥	٨٠	٩٠
جـ	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠
المجموع	١٢٠	١٥٥	١٨٥	٢١٥	٢٥٠

فيكون الرقم القياسي النسبي لأسعار عام ١٤٠٢هـ بالنسبة لعام ١٤٠١هـ

$$= \text{م}_{٠١} \times ١٠٠ = \frac{١}{\text{ن}} \ \text{مج} \left(\frac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٠}}\right) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\frac{٦٠}{٤٠} + \frac{٧٠}{٦٠} + \frac{٢٥}{٢٠}\right) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}\left(١,٥٠ + ١,١٧ + ١,٢٥\right) \times ١٠٠$$

$$= ١٣٠,٦٧$$

حيث إن $\text{م}_{٠١}$ = ١,٣٠٦٧ (وذلك بقسمة الرقم القياسي على ١٠٠)

الرقم القياسي النسبي لأسعار عام ١٤٠٣هـ بالنسبة لعام ١٤٠٢هـ

$$= \text{م}_{١٢} \times ١٠٠ = \frac{١}{\text{ن}} \ \text{مج} \left(\frac{\text{س}_{٢}}{\text{س}_{١}}\right) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\frac{٨٠}{٦٠} + \frac{٧٥}{٧٠} + \frac{٣٠}{٢٥}\right) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}\,(١,٣٣ + ١,٠٧ + ١,٢٠) \times ١٠٠$$

$$= ١٢٠$$

ويكون $م_{١٢} = ١,٢٠$

الرقم القياسي النسبي لأسعار عام ١٤٠٤هـ بالنسبة لعام ١٤٠٣هـ

$$م_{٢٣} \times ١٠٠ = \frac{١}{ن}\ مج\ (\frac{س_٣}{س_٢}) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}\,(\frac{١٠٠}{٨٠} + \frac{٨٠}{٧٥} + \frac{٣٥}{٣٠}) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}\,(١,٢٥ + ١,٠٧ + ١,١٧) \times ١٠٠$$

$$= ١١٦,٣٣$$

ويكون $م_{٢٣} = ١,١٦٣٣$

الرقم القياسي النسبي لأسعار ١٤٠٥هـ بالنسبة لعام ١٤٠٤هـ

$$م_{٣٤} \times ١٠٠ = \frac{١}{ن}\ مج\ (\frac{س_٤}{س_٣}) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}\,(\frac{١٢٠}{١٠٠} + \frac{٩٠}{٨٠} + \frac{٤٠}{٣٥}) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}\,(١,٢٠ + ١,١٣ + ١,١٤) \times ١٠٠$$

$$= ١١٥,٦٧$$

ويكون $م_{٣٤} = ١,١٥٦٧$

ومن الأرقام القياسية السابقة ذات الأوساط المتحركة يمكن حساب الرقم القياسي بالنسبة لمدة خمس سنوات باعتبار عام ١٤٠٥هـ سنة المقارنة، وعام ١٤٠١هـ

سنة الأساس وذلك بضرب المناسيب السابقة ذات الأساس المتحركة في بعضها، ثم ضربها جميعا في ١٠٠ كما يلي:

الـرقم القياسي النسبي لأسعـار عام ١٤٠٥هـ بالنسبـة لعـام ١٤٠١هـ على الأساس المتحرك

$$= م_{٠١} \times م_{١٢} \times م_{٢٣} \times م_{٣٤} \times ١٠٠$$

$$= ١,٣٠٦٧ \times ١,٢٠ \times ١,١٦٣٣ \times ١,١٥٦٧ \times ١٠٠$$

$$= ٢١٠,٩٩$$

ولقد سبق حساب الرقم القياسي النسبي لأسعار عام ١٤٠٥هـ بالنسبة لعام ١٤٠١هـ على الأساس الثابت وكان يساوي ٢٦١,٦٧، وذلك في مثال (٢)، ويختلف عن نظيره الرقم القياسي النسبي على الأساس المتحرك السابق وهو ٢١٠,٩٩.

(٦ ـ ٥) اختبار الأرقام القياسية

سبق لنا أن استعرضنا طرق حساب الأرقام القياسية سواء كانت أرقامًا قياسية تجميعية أم نسبية، أم أرقامًا قياسية مرجحة أم غير مرجحة وأرقامًا قياسية ذات أساس متحرك أم أساس ثابت. ومن الناحية العملية لا توجد قاعدة عامة تفضل طريقة على أخرى، ولكن طبيعة المواد الداخلة في الرقم القياسي من عناصر وأوزان وسنة أساس تجعلنا نختار طريقة الحساب التي تناسب وطبيعة تكوين الرقم القياسي المناسب لها.

ولكن توجد بعض الاعتبارات النظرية للمفاضلة بين الطرق المختلفة لحساب الأرقام القياسية. والرقم القياسي الجيد هو الذي يحقق اختبار الانعكاس في الأساس، وكذلك اختبار الانعكاس في المعامل، وسوف ندرس كلا من هذين الاختبارين مع إيراد مثال عن كل حالة.

(٦ ـ ٥ ـ ١) اختبار الانعكاس الزمني في الأساس

يتحقق اختبار الانعكاس (time reversal test) في الأساس لأي رقم قياسي إذا ضربنـا هذا الـرقم الذي يمثل أسعار مجموعة من السلع في الرقم القياسي لمجموعة

السلع نفسها، بعد أخذ فترة الأساس للمقارنة، وفترة المقارنة للأساس (وذلك بأخذ كل من الرقمين مقسوما على ١٠٠)، فإنه يكون ناتج الضرب هو الواحد الصحيح، ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثـــال (٥)

من البيانات في مثال (٢) أي الأرقام القياسية يحقق خاصية الانعكاس في الأساس؟

ا - سبق في مثال (٢) حساب الرقم القياسي التجميعي البسيط وهو:

$$= \frac{\text{مج س}_{١}}{\text{مج س}_{.}} \times ١٠٠ = ٢٠٨,٣٣$$

وبقسمة هذا الرقم على ١٠٠ فإننا نحصل على المنسوب السعري $\text{م}_{.١}$.

أي أن:

$$\text{م}_{.١} = ٢,٠٨٣٣$$

الرقم التجميعي البسيط باعتبار أسعار سنة ١٤٠٥هـ كسنة أساس وأسعار سنة ١٤٠١هـ كسنة المقارنة

$$= \frac{\text{مج س}_{.}}{\text{مج س}_{١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٢٠}{٢٥٠} \times ١٠٠$$

$$= ٤٨$$

وبقسمة هذا الرقم على ١٠٠ نحصل على $\text{م}_{١.}$

أي أن:

$$\text{م}_{١.} = ٠,٤٨$$

اختبار الانعكاس في الأساس = $م_{٠١} \times م_{١٠}$

$= ٢,٠٨٣٣ \times ٠,٤٨ = ١$

∴ الرقم القياسي التجميعي البسيط يحقق خاصية الانعكاس في الأساس.

ب - سبق في مثال (٢) حساب الرقم النسبي البسيط وهو:

$$= \frac{١}{ن} \text{ مج } (\frac{س_١}{س_٠}) \times ١٠٠ = ٢١٦,٦٧$$

منه $م_{٠١}$ = ٢,١٦٦٧ (وذلك بقسمة الرقم القياسي على ١٠٠)

وبحساب الرقم القياسي النسبي البسيط باعتبار عام ١٤٠٥هـ سنة أساس وعام ١٤٠٠هـ سنة المقارنة فيكون مساويًا

$$= \frac{١}{ن} \text{ مج } (\frac{س_٠}{س_١}) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣}(\frac{٤٠}{١٢٠} + \frac{٦٠}{٩٠} + \frac{٢٠}{٤٠}) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣} (٠,٣٣٣ + ٠,٦٦٧ + ٠,٥٠٠) \times ١٠٠$$

$$= ٥٠$$

ويكون $م_{١٠}$ = ٠,٥ (وذلك بقسمة الرقم القياسي على ١٠٠)

اختبار الانعكاس في الأساس = $م_{٠١} \times م_{١٠}$

$= ٢,١٦٦٧ \times ٠,٥$

$= ١,٠٨٣٤ \neq ١$

∴ الرقم القياسي النسبي البسيط لا يحقق خاصية الانعكاس في الأساس.

(٦ ـ ٥ ـ ٢) اختبار الانعكاس في المعامل

من المعلوم أن القيمة لأي سلعة (ق) = السعر × الكمية

أي أن

ق = س × ك

فإذا كان لدينا أسعار مجموعة من السلع معلوم لها كمياتها، وحسبنا الرقم القياسي للأسعار واستبدلنا في هذا الرقم سعر كل سلعة في فترة معينة بكمياتها في نفس الفترة، وكمية كل سلعة في فترة معينة بسعرها في نفس الفترة، فإن الرقم القياسي الناتج يسمى البديل في المعامل. وتنص قاعدة الانعكاس في المعامل بأن حاصل الضرب للرقم القياسي للأسعار في البديل المعاملي له يساوي الرقم القياسي للقيمة (وذلك بقسمة الأرقام السابقة على ١٠٠).

وعلى سبيل المثال الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار مجموعة من السلع

$$= \frac{\text{مجـ } س_١}{\text{مجـ } س_٠} \times ١٠٠$$

البديل في المعامل لهذا الرقم القياسي $= \frac{\text{مجـ } ك_١}{\text{مجـ } ك_٠} \times ١٠٠$

ويكون الرقم القياسي التجميعي البسيط لهذه المجموعة من السلع $= \frac{\text{مجـ } ق_١}{\text{مجـ } ق_٠} \times ١٠٠$

الرقم القياسي × البديل في العامل $= \frac{\text{مجـ } س_١}{\text{مجـ } س_٠} \times \frac{\text{مجـ } ك_١}{\text{مجـ } ك_٠} = \frac{\text{مجـ } ق_١}{\text{مجـ } ق_٠}$

(وذلك بعد قسمة الأرقام السابقة على ١٠٠)

ولقد وجد أن الرقم القياسي الأمثل هو الوحيد الذي يحقق خاصية الانعكاس في المعامل، وكذلك خاصية الانعكاس في الأساس، ولذلك سمي الأمثل.

مثـــال (٦)

الجدول التالي يبين أسعار ثلاث سلع ا، ب، جـ، وكذلك كمياتها في كل من عام ١٤٠٥هـ للمقارنة، وعام ١٤٠١هـ للأساس.

جدول (٦ ـ ٤): أسعار ٣ سلع في عامي ١٤٠١هـ و ١٤٠٥هـ وكمياتها

السلعــة	$س_.$	$ك_.$	$ق_. = س_. ك_.$	$س_١$	$ك_١$	$ق_١ = س_١ ك_١$
ا	٤٠	٦	٢٤٠	١٢٠	٨	٩٦٠
ب	٦٠	٨	٤٨٠	٩٠	١٦	١٤٤٠
جـ	٢٠	٤	٨٠	٤٠	١٢	٤٨٠
المجموع	١٢٠	١٨	٨٠٠	٢٥٠	٣٦	٢٨٨٠

ومن الجدول يمكن حساب المقادير التالية:

الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار $= \frac{مج\ س_١}{مج\ س_.} \times ١٠٠$

$= \frac{٢٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠$

$= ٢٠٨,٣٣$

الرقم القياسي البديل في المعامل $= \frac{مج\ ك_١}{مج\ ك_.} \times ١٠٠$

$= \frac{٣٦}{١٨} \times ١٠٠$

$= ٢٠٠$

الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة $= \frac{مج\ ق_١}{مج\ ق_.} \times ١٠٠$

$= \frac{٢٨٨٠}{٨٠٠} \times ١٠٠$

$= ٣٦٠$

بقسمة هذه الأرقام القياسية على ١٠٠ نحصل على

٣,٦ ، ٢ ، ٢,٠٨٣٣

فإن اختبار الانعكاس في المعامل = الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار

× الرقم القياسي البديل في المعامل

= ٢,٠٨٣٣ × ٢ = ٤,١٦٦٦

≠ ٣,٦

أي أن الرقم التجميعي البسيط لا يحقق خاصية الانعكاس في المعامل، وباتباع نفس الخطوات لباقي الأرقام القياسية المختلفة نجد أن الرقم القياسي الأمثل هو الذي يحقق خاصية الانعكاس في المعامل.

(٦ ـ ٦) تمارين

١ ـ الجدول التالي يوضح متوسط الأجر الأسبوعي بالريال للعمال في بعض الصناعات في الأسبوع الأول من محرم عام ١٣٩٢هـ ، ومحرم عام ١٣٩٥هـ .

الأجر الأسبوعي لعمال بعض الصناعات في عامي ١٣٩٢هـ و ١٣٩٥هـ

السنة	المواد الغذائية	المشروبات	الملابس	الأثاث	الإسمنت
١٣٩٢هـ	١٣٤	١٢٩	١١٧	١٣٧	١٣١
١٣٩٥هـ	١٦٩	١٨١	١٤٥	١٦٢	١٣٧

والمطلوب:

حساب رقم قياسي بسيط لأجور العمال في عام ١٣٩٥هـ بالنسبة لعام ١٣٩٢هـ كسنة أساس في الصناعات المذكورة على طريقة القياس للأسعار وذلك بطريقتين مختلفتين.

٢ ـ الجدول التالي يمثل بيانات الأسعار بالريالات، وكميات ثلاث سلع في إحدى البلدان.

أسعار ثلاث سلع وكمياتها في عامي ١٩٥٠م و ١٩٥٥م

السلع	الأسعار		الكمية	
	١٩٥٠م	١٩٥٥م	١٩٥٠م	١٩٥٥م
قمح	٤,٨	٩,٥	٩	١٠٠
أرز	٣,٦	٦,٨	١٠	١٢
شعير	٢,٧	٥,١	٣	٥

اوجد ما يلي:

ا) الرقم القياسي لكل من لاسبير وباش والأمثل لفيشر.

ب) اختبر خاصية الانعكاس في الأساس، وفي المعامل لكل من الأرقام القياسية السابقة.

٣ - أثبت جبريا أن الرقم القياسي الأمثل لفشر يحقق خاصة الانعكاس في المعامل، وكذلك خاصة الانعكاس في الأساس أيضا.

٤ - أسعار ثلاث سلع استهلاكية ا، ب، جـ من عام ١٩٧٧م حتى عام ١٩٨٢م في إحدى البلدان معطاة كما يلي:

أسعار ثلاث سلع في الأعوام من ١٩٧٧م حتى ١٩٨٢م

السلعة	سعر ١٩٧٧م	سعر ١٩٧٨م	سعر ١٩٧٩م	سعر ١٩٨٠م	سعر ١٩٨١م	سعر ١٩٨٢م
ا	١٢	١٣	١٣	١٥	١٦	١٦
ب	١٧	١٨	١٨	١٩	١٩	٢٠
جـ	٣٢	٣٣	٣٣	٣٤	٣٣	٣٥
المجموع	٦١	٦٤	٦٤	٦٨	٦٨	٧١

احسب الرقم القياسي البسيط باستخدام الأساس المتحرك لمدة عام وذلك لأسعار عام ١٩٨٢م بالنسبة لعام ١٩٧٧م وقارن هذا الرقم القياسي بالرقم القياسي لأسعار عام ١٩٨٢م بالنسبة لعام ١٩٧٧م وذلك باستخدام الأساس الثابت.

٥ - الجدول التالي يوضح الإنتاج وسعر البيع في إحدى المصانع لثلاثة أنواع من السلع ا، ب، جـ.

أسعار ثلاث سلع وكميات انتاجها في عامي ١٣٩٦هـ و ١٣٩٨هـ

السلع	عام ١٣٩٦هـ		عام ١٣٩٨هـ	
	السعر	الإنتاج	السعر	الإنتاج
ا	٦٢	٧١	٦١	٨٢
ب	٦٣	١٠٢	٦٥	٩٣
جـ	٦٢	٨١	٦٦	٧٧

باعتبار كمية الإنتاج هي مقياس لأهمية السلعة. أوجد الأوزان المرجحة لكل من السلع ا، ب، جـ ثم استخدم هذه الأوزان في حساب الرقم القياسي النسبي لكل من لاسبير وباش والأمثل لفيشر.

٦ - إذا كان متوسط أجر العامل في السنوات من عام ١٣٨٧هـ إلى ١٣٩١هـ في بلد ما هو كما يلي ٢٠، ٢٣، ٢٥، ٣٠ ريالاً في اليوم والأرقام القياسية للأسعار هي على التوالي ١٠٠، ١٠٧، ١٠٥، ١٠٩. فاحسب متوسط أجر العامل بأسعار عام ١٣٨٧هـ .

٧ - في إحدى الدول المتقدمة كانت الطاقة الكهربائية المباعة ببلايين الكيلو وات/ساعة كما في الجدول التالي:

كميات الطاقة الكهربائية بالكليوات/ ساعة المباعة في الأعوام من ١٣٨٧هـ وحتى ١٣٩٢هـ

السنـــة	١٣٨٧هـ	١٣٨٨هـ	١٣٨٩هـ	١٣٩٠هـ	١٣٩١هـ	١٣٩٢هـ
الطاقة الكهربية بليون كيلووات/ ساعة	٢,٦	٣,٢	٣,٥	٤,٥	٥,٥	٧,٢

- عبر عن البيانات باستخدام مناسيب الكمية مستخدما سنة ١٣٨٨هـ كسنة أساس.

٨ - في عام ١٣٩٠هـ زاد سعر سلعة ما بنسبة ٦٠٪ عن سعرها في عام ١٣٨١هـ بينما انخفضت كمية الإنتاج بنسبة ٣٥٪ ما هي النسبة المئوية للارتفاع أو الانخفاض من القيمة الإجمالية للسلعة في عام ١٣٩٠هـ بالنسبة للقيمة في عام ١٣٨١هـ ؟

الفصل السابع

السلاسل الزمنية

(٧ ـ ١) مقدمــة

من الملاحظ أن كثيرًا من الظواهر ذات علاقة بالزمن، وتسجل مشاهداتها على فترات زمنية محددة، وغالبًا ما تكون هذه الفترات الزمنية متساوية. قد تكون الفترات المقيدة: سنوية، أو نصف سنوية، أو ربع سنوية، أو شهرية، أو أسبوعية، أو يومية، أو كل ساعة . . . الخ. والأمثلة على ذلك كثيرة، الصادرات والواردات على مدار عدد من السنوات، أرقام التعداد للسكان التي تجري كل عشر سنوات في معظم الدول، الإنتاج السنوي للبترول في دول الأوبك على مدار عدة سنوات، أو أسعار الصادرات أو العائدات البترولية لدولة ما، استهلاك الكهرباء على مدار عدة شهور (قد يكون فصلاً في الشتاء مثلاً) مجموع المبيعات الشهرية لإحدى المؤسسات التجارية، درجات الحرارة المعلن عنها يوميا بواسطة مصلحة الأرصاد الجوية في مدينة أو منطقة ما وهكذا. وعادة ما تسمى القراءات لقيم الظواهر السابقة أو غيرها من الظواهر المرتبطة بالزمن السلاسل الزمنية.

(٧ ـ ١ ـ ١) تعريف السلسلة الزمنية

هي مجموعة من القراءات أخذت لقيم ظاهرة ما في فترات زمنية محددة وعادة ما تكون فترات زمنية متساوية (سنة ـ شهر ـ يوم ـ ساعة . . .) ورياضيا يمكن أن نرمز لقيم الظاهرة «ص» محل الدراسة أي السلسلة الزمنية بالقيم $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، . . . ، $ص_{ن}$

حيث إن هذه القيم مأخوذة عند الأزمنة التالية على الترتيب

$$ر_{١} ، ر_{٢} ، . . . . ، ر_{ن}$$

أي أن المتغير «ص» لقيم الظاهرة محل الدراسة دالة في الزمن ر ويعبر عن ذلك رياضيا بالعلاقة التالية :

ص = د (ر)

حيث إنَّ ر المتغير المستقل، ص المتغير التابع . ومن الأغراض الأساسية لدراسة السلاسل الزمنية لظاهرة ما هو تقدير قيمة هذه الظاهرة في المستقبل استنادا إلى دراسة التطور التاريخي لها . وكذلك تحديد وفصل العوامل المؤثرة على السلسة الزمنية لهذه الظاهرة ، ونأخذ المثال التالي لتوضيح قيم السلسلة الزمنية .

مثال (١)

الجدول التالي يمثل كمية الواردات عن طريق البر للمملكة العربية السعودية في الفترة من سنة ١٩٧٨م إلى سنة ١٩٨٣م بالكيلوجرام .

جدول (٧ ـ ١) : كميات الواردات بالبر للمملكة العربية السعودية في الأعوام من ١٩٧٨ وحتى ١٩٨٣م

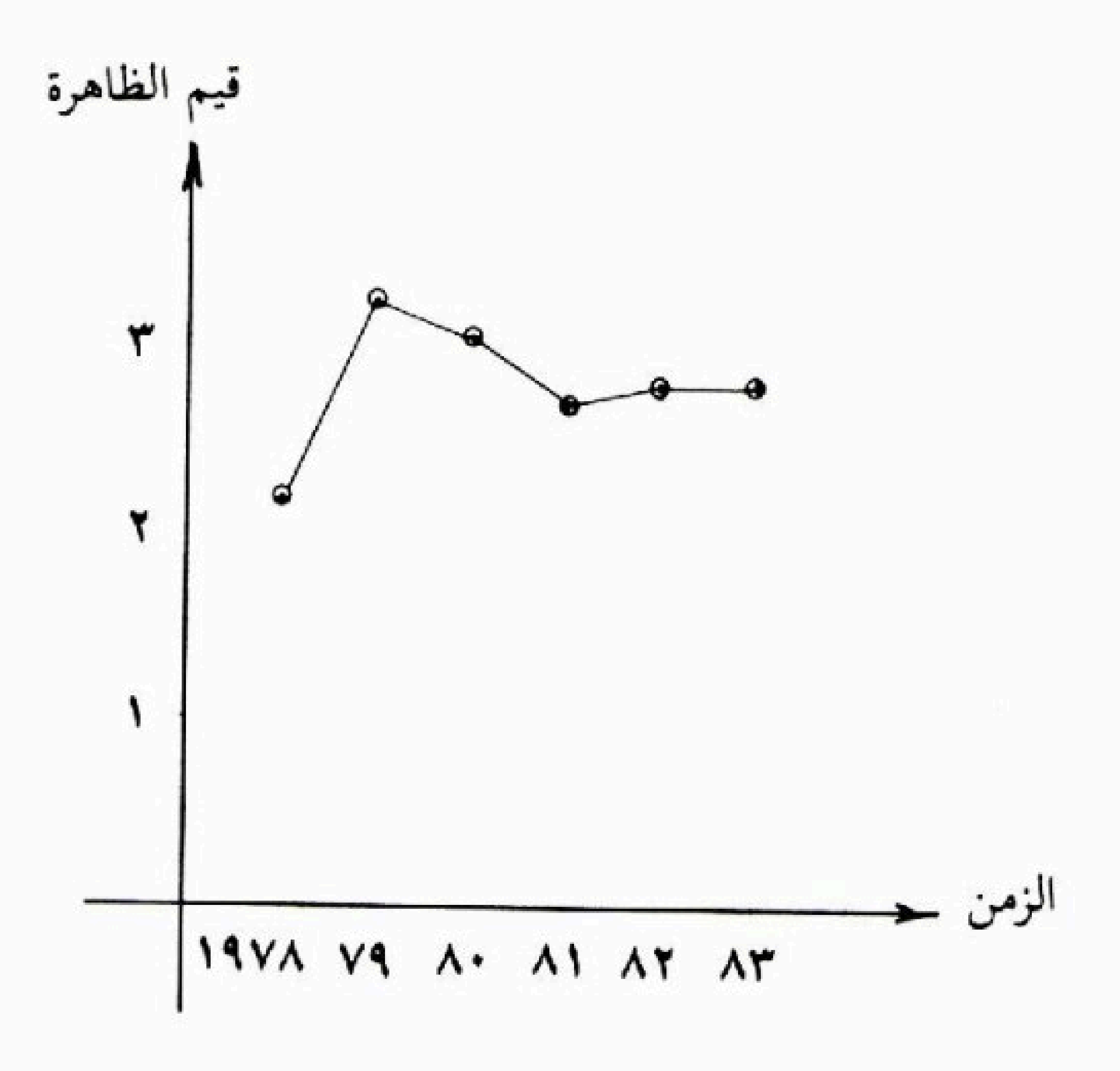
السنة (ر)	١٩٧٨م	١٩٧٩م	١٩٨٠م	١٩٨١م	١٩٨٢م	١٩٨٣م
الكمية بملايين الكجم (ص)	٢,١٨٢	٣,٢٠٧	٣,٠٧٨	٢,٦٣٤	٢,٦٧٦	٢,٧٤٩

المصدر:

التجارة الخارجية ـ مصلحة الإحصاءات العامة ـ وزارة المالية والاقتصاد الوطني .

(٧ ـ ١ ـ ٢) التمثيل البياني للسلسلة الزمنية

تمثل السلسلة الزمنية بحيث تكون قيم الزمن (ن) على المحور الأفقي ، وقيم الظاهرة (ص) محل الدراسة على المحور الرأسي ، وبعد تحديد أو رسم النقاط نصلها بمنحنى باليد فنحصل على ما يسمى المنحنى التاريخي للظاهرة ، كما هو موضح بالشكل التالي :



شكل (٧ ـ ١): السلسلة الزمنية لكمية الواردات للمملكة العربية السعودية بالبر

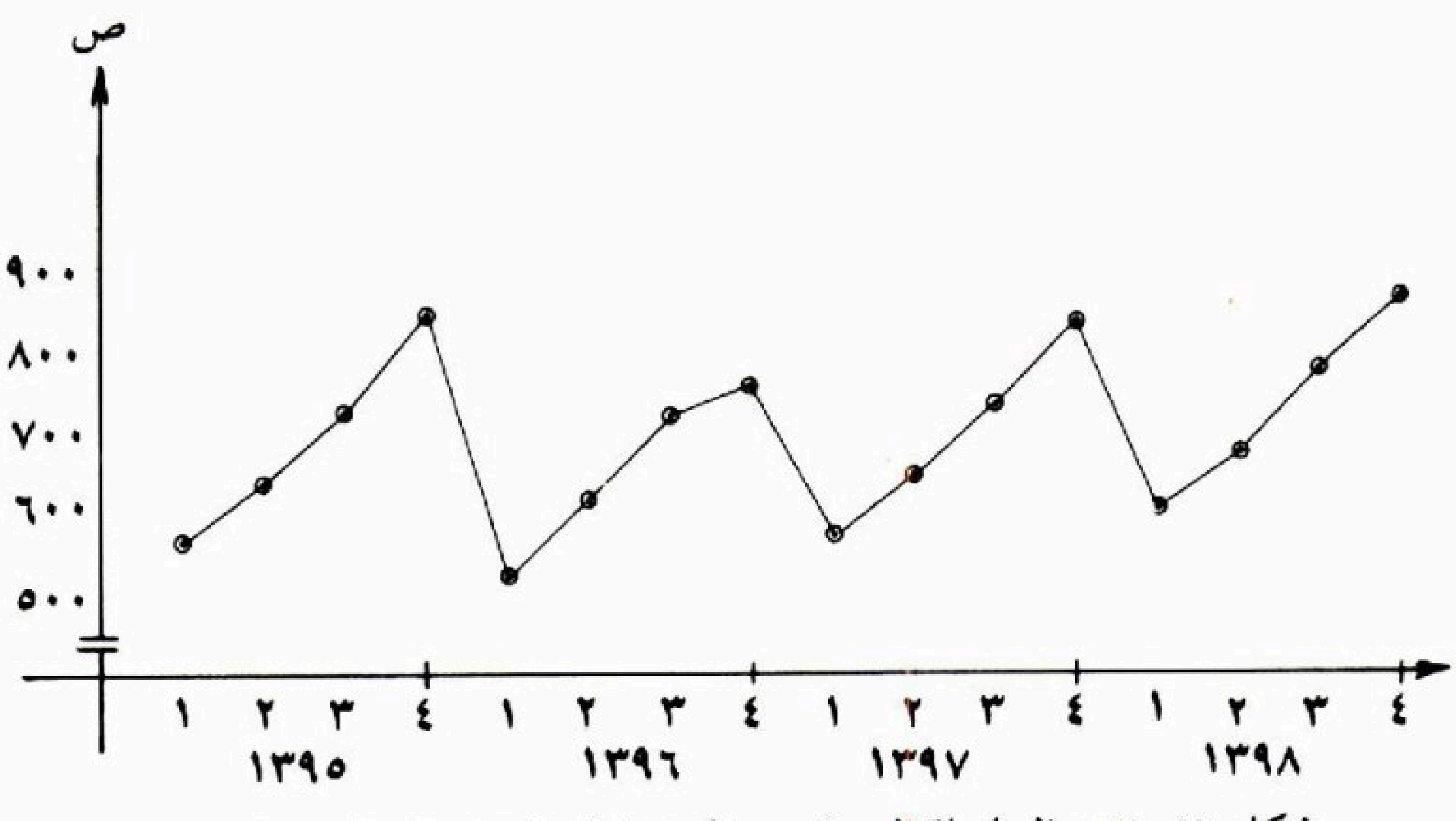
مثـــال (٢)

الجدول التالي يوضح مبيعات إحدى المؤسسات التجارية بآلاف الريالات خلال السنوات من **١٣٩٥**هـ إلى **١٣٩٨**هـ في فترات زمنية ربع سنوية كالتالي:

جدول (٧ ـ ٢): قيمة المبيعات الربع سنوية لإحدى المؤسسات في أربعة أعوام

السنوات	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع	المجمـوع
١٣٩٥	٥٦٢	٥٢٤	٥٧١	٦٠٣	٢٢٦٠
١٣٩٦	٦٣٣	٦٠٨	٦٤٥	٦٧٣	٢٥٥٩
١٣٩٧	٧١٨	٧١٥	٧٣٠	٧٧٠	٢٩٣٣
١٣٩٨	٨٢٦	٧٥٥	٨٣١	٨٦٢	٣٢٧٤

من الجدول السابق يكون المنحنى التاريخي لظاهرة المبيعات (ص) كالتالي:



شكل (٧ ـ ٢) : السلسلة الزمنية ربع السنوية لمبيعات إحدى المؤسسات

ملاحظـة :

عند تدريج المحور الرأسي بدأ بالرقم ٥٠٠ حتى تتضح التغيرات التي تطرأ على الظاهرة في المنحنى التاريخي السابق.

(٧ ـ ٢) مركبات السلسلة الزمنية

يمكن ملاحظة أن السلاسل الزمنية عرضة للتأثر بكل أو بعض المركبات التالية (وذلك من دراسة عدد كبير من السلاسل الزمنية) وهي :

ا) مركبة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

ب) مركبة التغيرات الموسمية للسلسلة الزمنية.

جـ) مركبة التغيرات الدورية للسلسلة الزمنية.

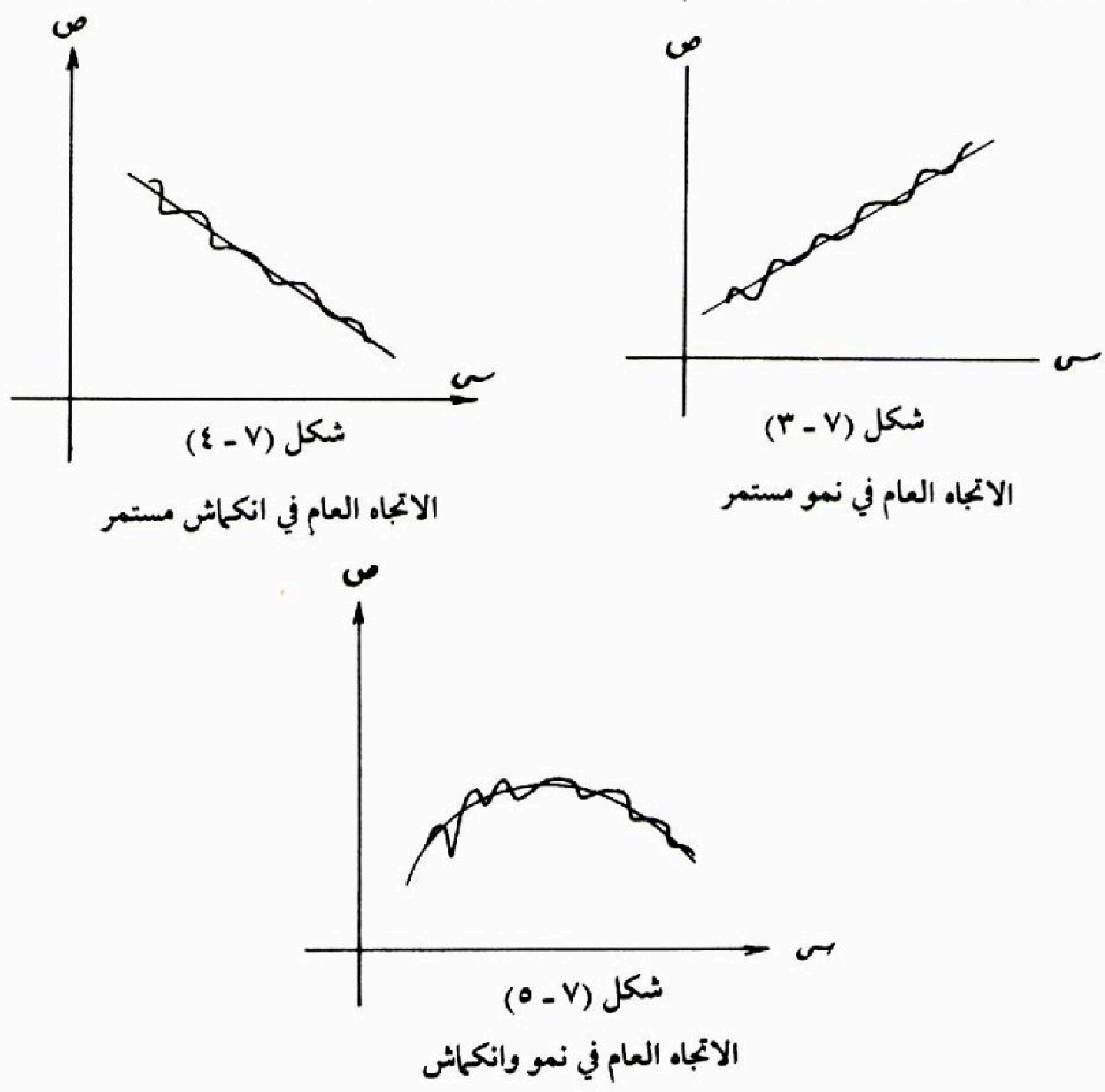
د) مركبة التغيرات العرضية (الفجائية) للسلسلة الزمنية.

وسوف نتناول بالشرح والتفصيل كل مركبة على حدة.

(٧ ـ ٢ ـ ١) مركبة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

والمقصود بالاتجاه العام هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة الزمنية لظاهرة ما تكون هي محل الدراسة، وذلك خلال فترة طويلة من الزمن. فيمكن تحديد الحركة العامة

للسلسلة الزمنية سواءا كانت لنمو مستمر مثل عدد السكان في بلد ما، عدد الطلاب في جامعة الملك سعود. . . أو انكماش أو نقص مستمر مثل عدد الأميين في دولة ما، نسبة البطالة في قطر ما أو تعاقب في حركة السلسلة من نمو في فترة زمنية وانكماش في فترة أخرى. . . يأخذ الاتجاه العام للسلسلة بعض الأشكال التالية



شكل (٧ ـ ٣)
الاتجاه العام في نمو مستمر

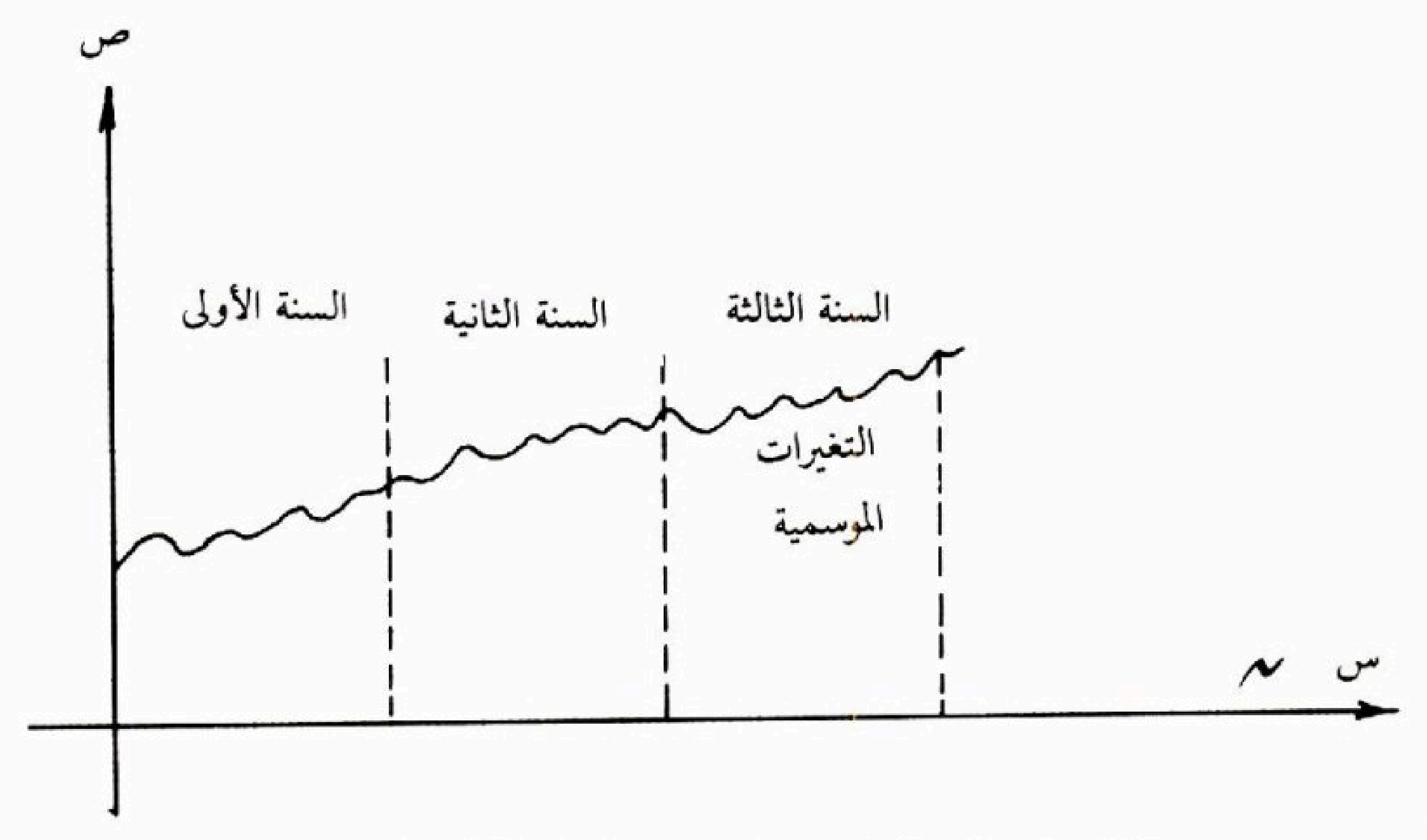
شكل (٧ ـ ٤)
الاتجاه العام في انكماش مستمر

شكل (٧ ـ ٥)
الاتجاه العام في نمو وانكماش

(٧ ـ ٢ ـ ٢) مركبة التغيرات الموسمية للسلسلة الزمنية

التغيرات الموسمية تحدث للظاهرة محل الدراسة في أوضاع متماثلة لحركة السلسلة الزمنية وذلك خلال فترات متقابلة لعدة سنوات متتالية (الفترات الزمنية قد تكون ربع سنوية أو شهرية أو. . . وذلك حسب طبيعة الظاهرة محل الدراسة). والأمثلة على

ذلك كثيرة، منها على سبيل المثال مبيعات المشروبات الغازية تزداد في الصيف وتقل في الشتاء من كل عام، وكذلك زيادة المبيعات في موسم الحج من كل عام، وزيادة حركة المواصلات في فترتي الصباح والظهيرة من كل يوم بإحدى المدن وهكذا. . . وتوضح بالشكل التالي.

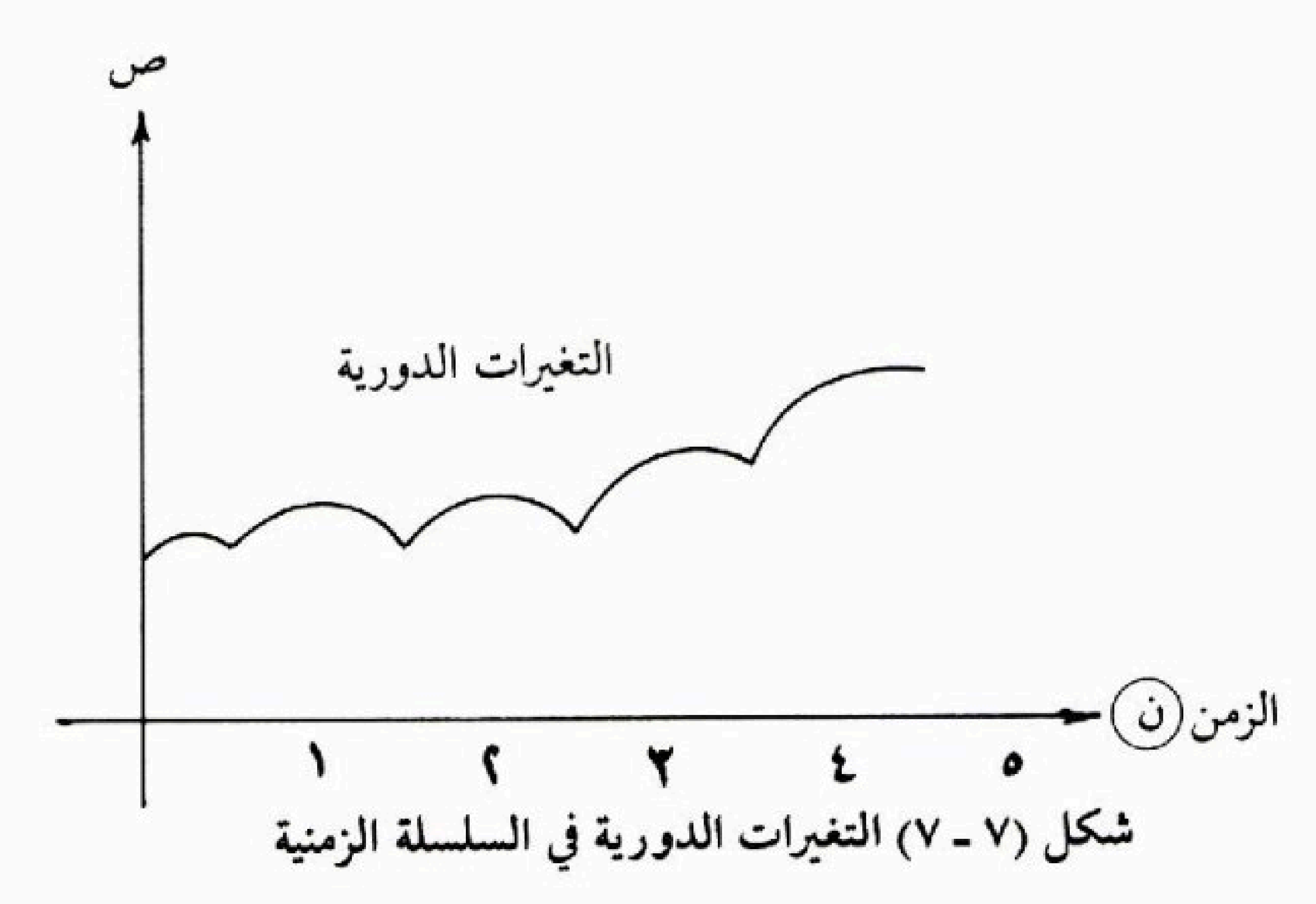


شكل (٧ ـ ٦): التغيرات الموسمية في السلسلة الزمنية

الشكل السابق يوضح الذبذبات داخل كل سنة وهي عبارة عن التغيرات الناتجة من مركبة التغيرات الموسمية للسلسلة الزمنية.

(٧ ـ ٢ ـ ٣) مركبة التغيرات الدورية للسلسلة الزمنية

وهي تغيرات تحدث للسلسلة الزمنية على فترات طويلة المدى وعادة ما تكون أكثر من سنة، وقد تكون أولاً على فترات زمنية متساوية. ومن الأمثلة المهمة للتغيرات الدورية ما يسمى دورات الأعمال في النظام الرأسمالي، التي تمثل فترات الرخاء الاقتصادي، وفترات الركود الاقتصادي، وفترات الكساد، ثم الانفراج من الأزمة الاقتصادية. . . ويمكن تمثيل التغيرات الدورية بيانيا كما يلي:



شكل (٧ ـ ٧) التغيرات الدورية في السلسلة الزمنية

نلاحظ أن الـذبـذبات في المنحنى على فترات أطول من سنة وتمثل التغيرات الدورية في السلسة الزمنية.

(٧ ـ ٢ ـ ٤) مركبة التغيرات العرضية (الفجائية) للسلسلة الزمنية

وهي تلك التغـيرات التي تحدث نتيجـة حدوث تغيرات فجائية مثل الزلازل والفياضانات والحروب التي تؤثر تأثيرا كبيرا على المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية. ولا يمكن التنبؤ عادة بهذه المتغيرات العرضية، لأنها لا تستمر طويلا مقارنة بطول السلسلة الـزمنية، ويطلق عليها أحيانا التغيرات قصيرة المدى... ويمكن توضيح التغيرات العرضية (الفجائية) في المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية بالشكل البياني التالي:



شكل (٧ ـ ٨): التغيرات الفجائية في السلسلة الزمنية

(٧ ـ ٣) تحليل السلاسل الزمنية

الغـرض من تحليل السلسلة الزمنية هو التعرف على مركبات السلسلة الزمنية (الاتجاه العام ـ التغيرات الموسمية ـ التغيرات الدورية ـ التغيرات الفجائية) منفصلة عن بعضها.

ويستخدم الإحصائيون عادة نموذجين للسلاسل الزمنية، هما نموذج حاصل الضرب، ونموذج حاصل الجمع للسلسلة الزمنية. وذلك بدلالة المركبات التي تؤثر فيها. فإذا رمزنا لقيمة الظاهرة بالرمز ص عند زمن معين فإن نموذج حاصل الضرب يكون كالتالي:

ص = ع × س × د × ج ...... (١)

حيث إن

ع هي مقدار مركبة الاتجاه العام.
س هي مقدار مركبة التغيرات الموسمية.
د هي مقدار مركبة التغيرات الدورية.
ج هي مقدار مركبة التغيرات الفجائية.

ونموذج حاصل الجمع يكون الشكل التالي:

ص = ع + س + د + ج

ويمكن استخدام كل من النموذجين السابقين في تحليل السلاسل الزمنية واتجاه مركباتها الأربع السابقة إن وجدت أو بعضها، وسوف نكتفي في هذا المستوى بدراسة مركبة الاتجاه العام.

(٧ ـ ٣ ـ ١) تقدير مركبة الاتجاه العام (ع)

تعتبر مركبة الاتجاه العام من أهم المركبات التي تتكون منها السلسلة الزمنية، وذلك لأنها تستخدم في عمليات التنبؤ بقيم الظاهرة للفترات الزمنية المستقبلية. ويمكن تقدير مركبة الاتجاه العام بعدة طرق نذكر منها: طريقة التمهيد باليد، وطريقة الأوساط المتحركة للتخلص من الذبذبات الموسمية، حتى يظهر بوضوح الاتجاه العام للظاهرة

محل الدراسة . كما يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى . وسنعرض لكل من هذه بالشرح والتفصيل والأمثلة فيما يلي :

طريقة التمهيد باليد

تستخدم هذه الطريقة التمهيد باليد للحصول على خط مستقيم مناسب ، أو منحنى مناسب من المنحنى البياني الذي يسمى بالمنحنى التاريخي للظاهرة ، وذلك للحصول على الاتجاه العام . وتعتبر طريقة التمهيد باليد غير دقيقة لأنها تعتمد على تقدير الشخص في التمهيد لخط الاتجاه العام ، وهذا يختلف من شخص إلى آخر .

طريقة الأوساط المتحركة

وتستخدم هذه الطريقة للحصول على سلسلة مرنة أو ملساء أكثر من السلسلة الأصلية ، وذلك بعد التخلص من ذبذبات التغيرات الموسمية ، وبعدها يتضح شكل الاتجاه العام . وسنتناول فيما يلي شرح طريقة الأوساط المتحركة .

إذا كانت لدينا مجموعة من القيم للظاهرة (ص) في فترات زمنية متتالية عددها ن هي $ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . . ، $ص_ن$

فإن الأوساط المتحركة لكل فترتين زمنيتين هي :

$$\frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ص_٢ + ص_٣}{٢} ، . . . . ، \frac{ص_{ن-١} + ص_ن}{٢}$$

وعددها (ن – ١) وسط أو قراءة جديدة .

والأوساط المتحركة لكل ثلاث فترات زمنية هي :

$$\frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} ، \frac{ص_٢ + ص_٣ + ص_٤}{٣} ، . . . . ، \frac{ص_{ن-٢} + ص_{ن-١} + ص_ن}{٣}$$

وعددها (ن – ٢) وسط أو قراءة جديدة ، وهكذا . . .

ولدراسة الاتجاه العام للظاهرة محل الدراسة تستخدم قيم الأوساط المتحركة في جدول القيم الأصلية. مثلاً في حالة حساب هذه الأوساط المتحركة لعدد فردي من الفترات الزمنية، نضع قيمة الوسط المتحرك أمام القراءة الوسيطية لهذا العدد من القيم، كما هو موضح في الجدول التالي حيث كانت الأوساط المتحركة لكل ثلاث فترات زمنية.

الفترات الزمنية	قيم الظاهرة	الأوساط المتحركة لثلاث فترات زمنية
الفترة الأولى	$ص_1$	ـــــ
الفترة الثانية	$ص_2$	$\frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3}$
الفترة الثالثة	$ص_3$	$\frac{ص_2 + ص_3 + ص_4}{3}$
الفترة الرابعة	$ص_4$	$\frac{ص_3 + ص_4 + ص_5}{3}$
الفترة الخامسة	$ص_5$	$\frac{ص_4 + ص_5 + ص_6}{3}$
الفترة السادسة	$ص_6$	$\frac{ص_5 + ص_6 + ص_7}{3}$
الفترة السابعة	$ص_7$	ـــــ

أما الأوساط المتحركة في حالة كون عدد الفترات الزمنية زوجيًّا فإننا نضع قيم الأوساط المتحركة في الجدول أمام قيمتي الظاهرة الممثلتين للحدين الأوسطين، أي في منتصف المسافة بينهما ثم بعد ذلك يحسب من الأوساط المتحركة ما يسمى الأوساط المتحركة المركزية: وهي عبارة عن الوسط الحسابي لكل وسطين متحركين متتاليين من الأوساط المتحركة التي سبق حسابها، كما يتضح في الجدول التالي وذلك بأخذ الأوساط المتحركة لعدد قدره ٤ فترات زمنية.

الفترة الزمنية	قيم الظاهرة	الأوساط المتحركة	الأوساط المتحركة المركزية
الفترة الأولى	$ص_{١}$		ــــــ
الفترة الثانية	$ص_{٢}$		ــــــ
		$\frac{ص_{١} + ص_{٢} + ص_{٣} + ص_{٤}}{٤}$	
الفترة الثالثة	$ص_{٣}$		$\frac{١}{٢}\left(\frac{ص_{١} + ص_{٢} + ص_{٣} + ص_{٤}}{٤} + \frac{ص_{٢} + ص_{٣} + ص_{٤} + ص_{٥}}{٤}\right)$
		$\frac{ص_{٢} + ص_{٣} + ص_{٤} + ص_{٥}}{٤}$	
الفترة الرابعة	$ص_{٤}$		$\frac{١}{٢}\left(\frac{ص_{٢} + \cdots + ص_{٥}}{٤} + \frac{ص_{٣} + \cdots + ص_{٦}}{٤}\right)$
		$\frac{ص_{٣} + ص_{٤} + ص_{٥} + ص_{٦}}{٤}$	
الفترة الخامسة	$ص_{٥}$		$\frac{١}{٢}\left(\frac{ص_{٣} + \cdots + ص_{٦}}{٤} + \frac{ص_{٤} + \cdots + ص_{٧}}{٤}\right)$
		$\frac{ص_{٤} + ص_{٥} + ص_{٦} + ص_{٧}}{٤}$	
الفترة السادسة	$ص_{٦}$		ــــــ
الفترة السابعة	$ص_{٧}$		ــــــ

نوضح طريقة حساب الأوساط المتحركة في كل من الفترات الزمنية الفردية والزوجية بالمثال التالي.

مثال (٣)

أوجد قيم الأوساط المتحركة للبيانات الواردة في مثال (١)، وذلك للواردات عن طريق البر للمملكة العربية السعودية، وذلك في الفترات الزمنية التالية:

ا) ٣ سنوات متحركة

ب) ٤ سنوات متحركة

الحل

لسهولة الوصول للمطلوب (ا) نكوّن الجدول التالي:

السنوات	الكمية بملايين الكجم	المجموع المتحرك لثلاث سنوات	الأوساط المتحركة لثلاث سنوات
١٩٧٨	٢,١٨٢	—	
١٩٧٩	٣,٢٠٧	٢,١٨٢ + ٣,٢٠٧ + ٣,٠٧٨ = ٨,٤٦٧	$\frac{٨,٤٦٧}{٣}$ = ٢,٨٢٢
١٩٨٠	٣,٠٧٨	٣,٢٠٧ + ٣,٠٧٨ + ٢,٦٣٤ = ٨,٩١٩	$\frac{٨,٩١٩}{٣}$ = ٢,٩٧٣
١٩٨١	٢,٦٣٤	٣,٠٧٨ + ٢,٦٣٤ + ٢,٦٧٦ = ٨,٣٨٨	$\frac{٨,٣٨٨}{٣}$ = ٢,٧٩٦
١٩٨٢	٢,٦٧٦	٢,٦٣٤ + ٢,٦٧٦ + ٢,٧٤٩ = ٨,٠٥٩	$\frac{٨,٠٥٩}{٣}$ = ٢,٦٨٦
١٩٨٣	٢,٧٤٩	—	

من الجدول السابق نلاحظ أن قيم الأوساط المتحركة تأخذ شكلاً متقاربا. أكثر من القيم الأصلية للكميات وإذا ما رسم المنحنى التاريخي للأوساط المتحركة فإن المنحنى يكون أملس أو أكثر تجانسا من المنحنى التاريخي للقيم الأصلية.

ولسهولة الوصول للمطلوب (ب) في المثال السابق نكوّن الجدول التالي :

السنوات	الكمية بملايين الكجم	المجموع المتحرك لأربع سنوات	الأوساط المتحركة لأربع سنوات	المجموع المركزي	الوسط المتحرك المركزي
١٩٧٨	٢,١٨٢				
١٩٧٩	٣,٢٠٧				
		١١,١٠١	٢,٧٧٥		
١٩٨٠	٣,٠٧٨			٥,٦٧٤	٢,٨٣٧
		١١,٥٩٥	٢,٨٩٩		
١٩٨١	٢,٦٣٤			٥,٦٨٣	٢,٨٤٢
		١١,١٣٧	٢,٧٨٤		
١٩٨٢	٢,٦٧٦				
١٩٨٣	٢,٧٤٩				

طريقة المربعات الصغرى

لقد سبق أن استعرضنا كيفية إيجاد الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بواسطة التمهيد باليد للمنحنى التاريخي . وكذلك بواسطة استخدام الأوساط المتحركة . والآن سوف نبحث طريقة إيجاد الاتجاه العام في حالة مستقيم (أو منحنى) وذلك باستخدام طريقة المربعات الصغرى، وهي عبارة عن توفيق خط مستقيم (أو منحنى) بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات النقاط الواقعة على المنحنى التاريخي عن هذا الخط الممثل للاتجاه العام أصغر ما يمكن .

مثلاً في حالة تغير قيم الظاهرة بمعدَّل ثابت، فإن الاتجاه العام عبارة عن خط مستقيم، ويحدث ذلك في كثير من الظواهر في الحياة العملية، وتكون معادلة الخط المستقيم الذي يمثل الاتجاه العام هي :

ص = ا س + ب .... (٣)

حيث إنّ ص قيمة الاتجاه العام للظاهرة، س الفترة الزمنية، أ، ب مقداران ثابتان، وقد سبق دراسة خط الانحدار وبيّنا كيفية حساب أ، ب حيث كانت كالتالي:

$$ا = \frac{ن مج س ص - مج س مج ص}{ن مج س^{٢} - (مج س)^{٢}} \quad .... (٤)$$

$$ب = \bar{ص} - ا \bar{س}$$

مثـــال (٤)

أوجد معادلة خط الاتجاه العام للكميات المنتجة من البترول بملايين البراميل في الشهر الأول من كل عام كما هو موضح بالجدول، ثم أوجد تقدير كمية الانتاج للشهر الأول من عام ١٩٨٧م.

جدول (٧ ـ ٣): كميات المنتجة من البترول في الشهر الأول من كل عام في الأعوام من ١٩٧٤م حتى ١٩٨٤م بملايين البرامل

السنـة	الإنتاج بملايين البراميل	السنـة	الإنتاج بملايين البراميل
١٩٧٤م	٣٣	١٩٨٠م	٣٩
١٩٧٥م	٤١	١٩٨١م	٤٥
١٩٧٦م	٤٢	١٩٨٢م	٤٣
١٩٧٧م	٣٩	١٩٨٣م	٣٧
١٩٧٨م	٣٣	١٩٨٤م	٥٠
١٩٧٩م	٣٨		

عنـد حسـاب معـادلة خط الاتجاه العام فإننا نعطي للسنوات أرقام ١، ٢، ٣، . . . . وهكـذا بحيث تأخـذ السنة الأولى ١، والسنة الثانية ٢، . . . وهكذا، ولتسهيل الحسابات نوضح الحل بالجدول التالي:

س	ص	س ص	س^2
١	٣٣	٣٣	١
٢	٤١	٨٢	٤
٣	٤٢	١٢٢	٩
٤	٣٩	١٥٦	١٦
٥	٣٣	١٦٥	٢٥
٦	٣٨	٢٢٨	٣٦
٧	٣٩	٢٧٣	٤٩
٨	٤٥	٣٦٠	٦٤
٩	٤٣	٣٨٧	٨١
١٠	٣٧	٣٧٠	١٠٠
١١	٥٠	٥٥٠	١٢١
٦٦	٤٤٠	٢٧٢٦	٥٠٦

$$\text{ا} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{١١} \times \text{٢٧٢٦} - \text{٦٦} \times \text{٤٤٠}}{\text{١١} \times \text{٥٠٦} - (\text{٦٦})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٩٤٦}}{\text{١٢١٠}}$$

$$= \text{٠,٧٨}$$

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{ا}\ \bar{\text{س}}$$

$$= \left(\frac{\text{٤٤٠}}{\text{١١}}\right) - \text{٠,٧٨} \left(\frac{\text{٦٦}}{\text{١١}}\right)$$

$$= \text{٤٠} - \text{٤,٦٨}$$

$$= \text{٣٥,٣٢}$$

فتكون معادلة خط الاتجاه العام هي :

ص = ٠,٧٨س + ٣٥,٣٢ .... (٥)

ولتقدير كمية الإنتاج (ص) في الشهر الأول من عام ١٩٨٧م أي عند س = ١٤ تكون

ص = ٠,٧٨ × (١٤) + ٣٥,٣٢

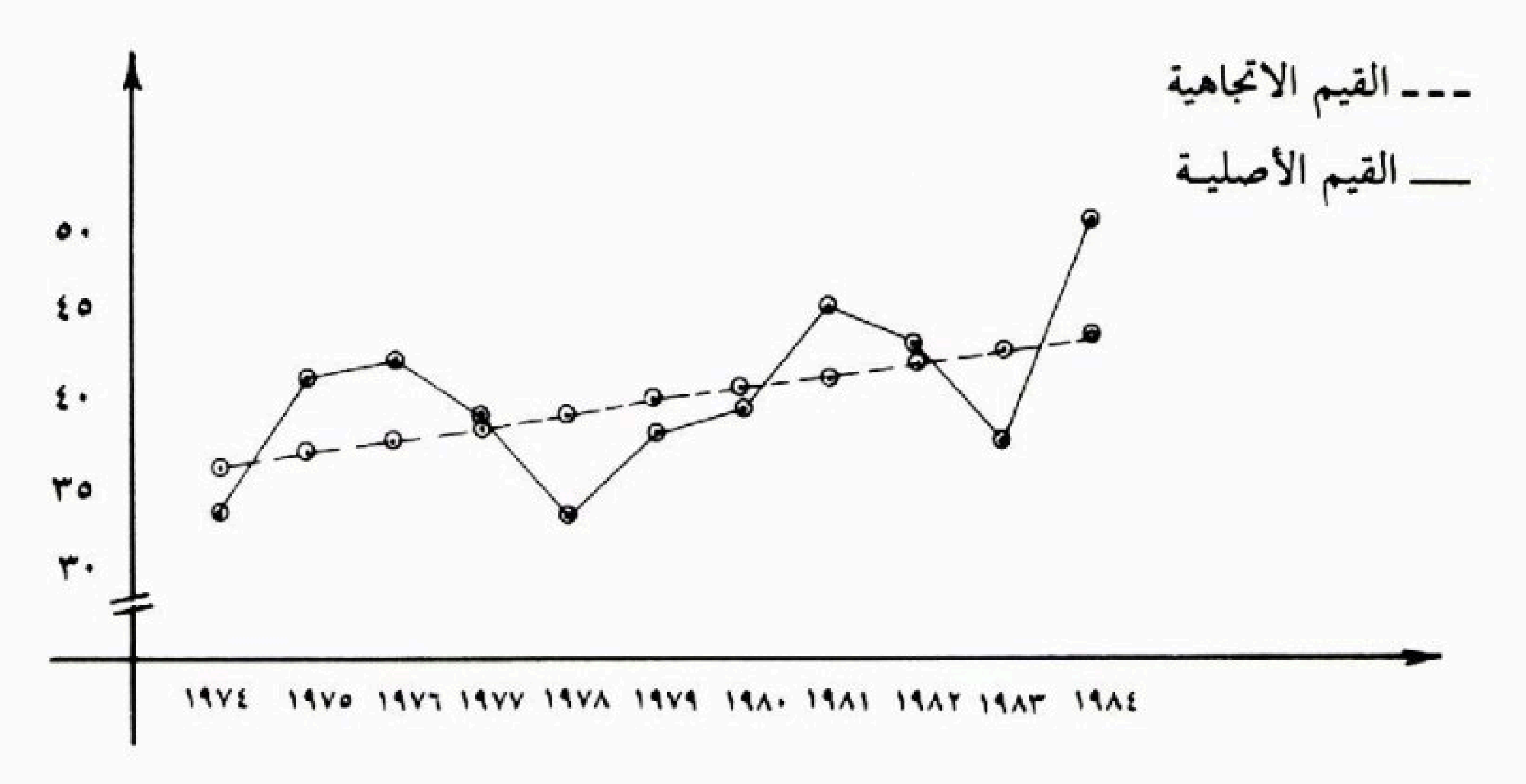
أي أن :

ص = ٤٦,٢٤ مليون برميل

ولإيجاد القيم الاتجاهية للظاهرة السابقة نعوض في المعادلة (٥) بقيم س السابقة وهي ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ٠ فنحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة التي يمكن وضعها في الجدول التالي مع القيم الأصلية للظاهرة.

السنوات	قيم الظاهرة	القيم الاتجاهية
١٩٧٤	٣٣	٣٦,١
١٩٧٥	٤١	٣٦,٩
١٩٧٦	٤٢	٣٧,٧
١٩٧٧	٣٩	٣٨,٤
١٩٧٨	٣٣	٣٩,٢
١٩٧٩	٣٨	٤٠
١٩٨٠	٣٩	٤٠,٨
١٩٨١	٤٥	٤١,٦
١٩٨٢	٤٣	٤٢,٣
١٩٨٣	٣٧	٤٣,١
١٩٨٤	٥٠	٤٣,٩

ويمكن تمثيل القيم الاتجاهية بيانيا مع المنحنى التاريخي للظاهرة محل الدراسة كما يلي :



شكل (٧ ـ ٩): الاتجاه العام لسلسلة انتاج البترول الزمنية

وهناك بعض الظواهر لا يكون التغير فيها بمعدَّل ثابت كما سبقت دراسته، وفي هذه الحالة يكون الاتجاه العام غير خطي (أي منحني) وهناك صور كثيرة تعتمد على قيم مثل هذه الظواهر، وسوف نكتفي بدراسة الظاهرة التي تكون قيمها متغيرة بنسب ثابتة مثـل نمـو السكـان، ونمـو الحيوانات والأسماك والطيور والبكتيريا. أما في النواحي الاقتصادية مثل زيادة الإنتاج للشركات ومبيعات هذه الشركات وأرباحها فإن منحنى الاتجاه العام لمثل هذه الظواهر عادة ما يتبع المعادلة الأسية التي تكون صيغتها الرياضية كالتالي:

ص = $ا^{س}$ • ب .... (٦)

حيث إن أ ، ب ثابتـان يتعينـان بأخذ اللوغاريثم لطرفي المعادلة (٦) فنحصل على الصيغة التالية

لو ص = س لو ا + لو ب .... (٧)

ويمكن كتابة المعادلة (٧) في الصورة التالية

ص = ا س + ب .... (٨)

والمعادلة (٨) هي صورة معادلة الخط المستقيم (٣) حيث تكون

ص = لو ص، ا = لو ا، ب = لو ب

وباستخدام طريقة مربعات الانحرافات الصغرى للمعادلة (٨) نحصل على قيم ا، ب كالتالي:

$$ا = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س\ مجـ\ ص}{ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}}$$

$$ب = \bar{ص} - ا\ \bar{س}$$

وبأخذ الأعداد المقابلة للوغارتمات لو ا، لو ب نحصل على قيم ا، ب، ونعوض بهما في المعادلة (٦)، فنحصل على معادلة الاتجاه العام المطلوبة، ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثـــال (٥)

الجدول التالي يمثل عدد السكان بالملايين في دولة ما.

جدول (٧ ـ ٤): عدد السكان بالمليون في إحدى الدول للأعوام لكل عشر سنوات ١٩٠٠ ـ ١٩٧٠م

السنة (س)	١٩٠٠	١٩١٠	١٩٢٠	١٩٣٠	١٩٤٠	١٩٥٠	١٩٦٠	١٩٧٠
عدد السكان بالملايين (ص)	٩,٧	١١,٢	١٢,٨	١٤,٢	١٦,١	١٩,١	٢٥,٩	٣٠,٥

اوجد معادلة الاتجاه العام وتقدير عدد السكان لهذه الدولة في عام ٢٠٠٠م.

في حالـة نمو السكان يقدر الاتجاه العام للسلسلة الزمنية باستخدام النموذج الأسي الذي معادلته (٦) السابقة وتكون

$$ص = ب \cdot ا^{س}$$

أو

$$\tilde{ص} = \tilde{آ}\ س + \tilde{ب}$$

حيث إن

$$\tilde{ص} = لو ص \ ،\ آ = لو ا \ ،\ \tilde{ب} = لو ب$$

ولتبسيط طريقة الحساب نكون الجدول التالي:

السنوات (س)	اي س	ص	صَ = لو ص	س صَ	س²
١٩٠٠	٠	٩,٧	٠,٩٨٧	٠	٠
١٩١٠	١	١١,٢	١,٠٤٩	١,٠٤٩	١
١٩٢٠	٢	١٢,٨	١,١٠٧	٢,٢١٤	٤
١٩٣٠	٣	١٤,٢	١,١٥٢	٣,٤٥٦	٩
١٩٤٠	٤	١٦,١	١,٢٠٧	٤,٨٢٨	١٦
١٩٥٠	٥	١٩,١	١,٢٨١	٦,٤٠٥	٢٥
١٩٦٠	٦	٢٥,٩	١,٤١٣	٨,٤٧٨	٣٦
١٩٧٠	٧	٣٠,٥	١,٤٨٤	١٠,٣٨٨	٤٩
المجموع	٢٨		٩,٦٨	٣٦,٨١٨	١٤٠

$$\text{ا} = \frac{\text{ن مج س صَ} - \text{مج س مج صَ}}{\text{ن مج س}^{٢} - (\text{مج س})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٨ × ٣٦,٨١٨} - \text{٢٨ × ٩,٦٨}}{\text{٨ × ١٤٠} - (\text{٢٨})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٢٩٤,٥٤٤} - \text{٢٧١,٠٤}}{\text{١١٢٠} - \text{٧٨٤}}$$

$$= \frac{\text{٢٣,٥٠٤}}{\text{٣٣٦}}$$

$$\text{ا} = \text{٠,٠٦٩٩٥}$$

أي أن:

$$\text{لو ا} = \text{٠,٠٦٩٩٥}$$

ومن ذلك يمكن إيجاد قيمة أ باستخدام جدول معكوس اللوغاريثم

$$\text{ا} = \text{١,١٧٤٨}$$

وحيث إنه يمكن حساب قيمة ب من العلاقة

ب = صَ - آسَ

$$= \frac{٩,٦٨}{٨} - ٠,٠٦٩٩٥ \times \frac{٢٨}{٨}$$

= ١,٢١ - ٠,٢٤٤٨

= ٠,٩٦٥٢

أي أن :

لو ب = ٠,٩٦٥٢

وباستخدام جدول معكوس اللوغاريثم فإن

ب = ٩,٢٢٩٩٦

ومن ذلك تكوّن علاقة النمو السكاني بدلالة الزمن هي .

ص = (١,١٧٤١) (٩,٢٢٩٩٦)^{س} .... (١٠)

لتقدير عدد السكان سنة ٢٠٠٠م تكون س = ١٠

صّ = آس + بّ

صّ = (٠,٠٦٩٩٥) (١٠) + ٠,٩٦٥٢

= ٠,٦٩٩٥ + ٠,٩٦٥٢

صّ = ١,٦٦٤٧

لوص = ١,٦٦٤٧

ومن جدول الأعداد المقابلة للوغاريثمات نجد أن

ص = ٤٥,٠٥ مليون نسمة

وباستخدام معادلة الاتجاه العام (١٠) وبوضع قيم س = ٠، ١، ٢، ...... ، ٧ نحصل على القيم الاتجاهية لظاهرة نمو السكان، ويمكن رسم منحنى الاتجاه العام، ومنحنى التاريخي بيانيا كما سبق في مثال (٤).

(٧ ـ ٤) تمارين

١ ـ الجدول التالي يمثل عدد الحجاج (بالآلاف) الوافدين للمملكة العربية السعودية.

أعداد الحجاج للأعوام ١٣٩٦هـ ـ ١٤٠١هـ

السنوات	١٣٩٦	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠	١٤٠١
عددالحجاج	٧١٩	٧٣٩	٨٣٠	٨٦٣	٨١٣	٨٧٩

والمطلوب إيجاد ما يلي.

ا) رسم المنحنى التاريخي لعدد الحجاج.

ب) حساب الاتجاه العام على أساس متوسط متحرك فترته ثلاث سنوات.

جـ) حساب معادلة الاتجاه العام (نفترض أنه خط مستقيم).

د) تقدير عدد الحجاج عام ١٤٠٨هـ.

٢ ـ الجدول التالي يوضح تطور عدد العمال (بالمائة) في إحدى المؤسسات الصناعية.

تطور أعداد العمال في إحدى المؤسسات في الأعوام ١٣٩٦ ـ ١٤٠٣هـ

السنوات	١٣٩٦	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠	١٤٠١	١٤٠٢	١٤٠٣
عددالعمال	٦	٧	٨	١٠	١٢	١٣	١٤	١٥

ا) اوجد معادلة خط الاتجاه العام للبيانات السابقة.

ب) اوجد القيم الاتجاهية للظاهرة من معادلة خط الاتجاه العام.

جـ) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة، وكذلك القيم الاتجاهية للظاهرة.

٣ ـ الجدول التالي يوضح قيم الواردات من الدقيق إلى المملكة العربية السعودية خلال الفترة من عام ١٩٧٨ إلى عام ١٩٨٣م.

واردات المملكة العربية السعودية من الدقيق ١٩٧٨ - ١٩٨٣م

السنوات	قيم الواردات
١٩٧٨	٤٥٢,٤٠٨
١٩٧٩	٦٠٧,٤٧٣
١٩٨٠	٧١٢,٢٦٢
١٩٨١	٣٠٠,٨٣٦
١٩٨٢	١٨٧,٣٢٣
١٩٨٣	١٩١,٨٠٦

المصدر: إحصاءات التجارة الخارجية بمصلحة الإحصاءات العامة.

ا) ارسم المنحنى التاريخي لقيم الواردات.

ب) احسب المتوسطات المتحركة لفترة ٣ سنوات.

جـ) اوجد معادلة الاتجاه العام.

د) اوجد قيم الاتجاه العام، وارسمها مع المنحنى التاريخي.

٤ - الجدول التالي يمثل النفقات لإحدى المؤسسات بآلاف الريالات.

إنفاق إحدى المؤسسات بآلاف الريالات للأعوام ١٣٩٠هـ - ١٤٠٠هـ

السنوات	١٣٩٠	١٣٩١	١٣٩٢	١٣٩٣	١٣٩٤	١٣٩٥	١٣٩٦	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠
الانفاق	١٠	١٢	١٣	١٥	١٦	١٧	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٥

ا) احسب المتوسطات المتحركة لفترة طولها ٣ سنوات ثم لفترة طولها ٤ سنوات، ثم أوجد المتوسطات المتحركة مركزيا بطول سنتين.

ب) اوجد معادلة الاتجاه العام.

جـ) احسب القيم الاتجاهية للظاهرة.

د) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة، وكذلك المتوسطات المتحركة والقيم الاتجاهية.

٥ ـ الجدول التالي يمثل عدد السكان (بالملايين) في الولايات المتحدة الأمريكية خلال الفترة من عام ١٩٠٠م إلى ١٩٦٠.

أعداد السكان في الولايات المتحدة الأمريكية بالملايين كل عشر سنوات في الأعوام ١٩٠٠م ـ ١٩٦٠م

السنوات	١٩٠٠	١٩١٠	١٩٢٠	١٩٣٠	١٩٤٠	١٩٥٠	١٩٦٠
عددالسكان	٧٦,٠	٩٢,٠	١٠٥,٧	١٢٢,٨	١٣١,٧	١٥١,١	١٧٩,٣

ا) اوجد معادلة الاتجاه العام (باستخدام النموذج الأسي).

ب) اوجد القيم الاتجاهية للظاهرة.

جـ) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة، وكذلك القيم الاتجاهية.

د) ما القيمة المتوقعة لعدد السكان عام ٢٠٠٠م.

٦ ـ الجدول التالي يبين أعداد الطلبة المتخرجين من إحدى الجامعات.

أعداد الخريجين في إحدى الجامعات في الأعوام ١٣٨٠/ ١٣٨١ ـ ١٤٠١/ ١٤٠٢هـ

العام الدراسي	٨٠/ ١٣٨١	٨١/ ١٣٨٢	٨٢/ ١٣٨٣	٨٣/ ١٣٨٤	٨٤/ ١٣٨٥	٨٥/ ١٣٨٦
عددالخريجين	٥٠	٧١	٦٠	١٣٠	٢٠١	١٧٠
العام الدراسي	٨٦/ ١٣٨٧	٨٧/ ١٣٨٨	٨٨/ ١٣٨٩	٨٩/ ١٣٩٠	٩٠/ ١٣٩١	٩١/ ١٣٩٢
عددالخريجين	٣٥٠	٢٥٦	٥٨١	٦٥١	٥١٢	٧١٧
العام الدراسي	٩٢/ ١٣٩٣	٩٣/ ١٣٩٤	٩٤/ ١٣٩٥	٩٥/ ١٣٩٦	٩٦/ ١٣٩٧	٩٧/ ١٣٩٨
عددالخريجين	٨٢٩	٨٠٤	١١٣٠	١٢٠٠	١٥٩٠	١٣٥٢
العام الدراسي	٩٨/ ١٣٩٩	٩٩/ ١٤٠٠	٤٠٠/ ١٤٠١	٤٠١/ ١٤٠٢		
عددالخريجين	١٥٦٠	١٧٣٣	١٩٠٠	٢١٠٠		

ا) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة.

ب) احسب الاتجاه العام للظاهرة على أساس متوسط متحرك فترته ٣ سنوات ثم ارسم خط الاتجاه العام.

جـ) ارسم خط الاتجاه العام على أساس متوسط متحرك فترته ٤ سنوات.

د) قارن بين خطي الاتجاه العام في الحالتين ب، جـ.

٧ ـ الجدول التالي يمثل الواردات من القمح بآلاف الأطنان لإحدى البلدان.

واردات القمح بآلاف الأطنان لإحدى البلدان في الأعوام ١٩٦١-١٩٧٠م

السنة	١٩٦١	١٩٦٢	١٩٦٣	١٩٦٤	١٩٦٥	١٩٦٦	١٩٦٧	١٩٦٨	١٩٦٩	١٩٧٠
الواردات	١٨٩	١٤٦	١٥٢	١٧٢	٢١٠	١٧٨	١٦٥	١٧٦	١٩٢	١٦٠

ا) ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة.

ب) احسب الاتجاه العام للظاهرة على أساس متوسط متحرك فترته سنتين.

جـ) ارسم خط الاتجاه العام.

الفصل الثامن

الإحصاءات الحيوية

(٨ ـ ١) مقدمـــة

سوف نتناول في هذا الفصل أحد التطبيقات المهمة لعلم الإحصاء، وهو تطبيقه على بعض مظاهر الحياة، وبالأخص حياة الإنسان منذ بداية مولده حتى مماته. تعداد السكان والمواليد والزواج والطلاق والقوى العاملة والهجرة والمرض والوفيات وحساب المؤشرات الإحصـائية المناسبة لذلك. وهذا النوع من التطبيقات الإحصائية يسمى الإحصـاءات الحيوية التي تفيد في دراسـة المستـوى الصحي والتعليمي والاجتماعي للجنس البشري، وكـذلك في تقدير معدَّل النمو السكاني للمجتمع محل الدراسة. ويفيد هذا النوع من الإحصاءات كذلك في عمل الخطط قصيرة المدى وطويلة المدى التي يمكن أن يتبعهـا المجتمـع في تطوره من النـاحية التعليمية، أو الصحية، أو الاقتصادية أو . . . . الخ .

والبيانـات الخـاصـة بالإحصاءات الحيوية تقوم بجمعها جميع الدول المتقدمة والنامية وذلك لأهميتها. وتساعد الأمم المتحدة بإرسال الخبراء والمختصين للدول النامية لمساعدتها في عمل التعداد السكاني الخاص بهذه الدول. وكذلك تصدر الأمم المتحدة النشرات الإحصـائية الحيوية لمعـظم دول العـالم، وذلـك للتعرف على مكامن القوة والضعف في المجتمع الدولي، وتقديم المساعدات اللازمة في هذا المجال من خلال منظماتها، مثل اليونسيف والصحة العالمية والأغذية والزراعة وغيرها .

وهذا النوع من الإحصاءات الحيوية له أسلوبه الخاص في طرق جمعه، وكذلك حساب المقاييس الخاصة به، مثل بعض النسب والمعدَّلات الحيوية. وسوف نتناول كل ظاهرة حياتية على حدة بالشرح والتفصيل، وقبل ذلك سوف نقوم بتعريف النسبة والمعدَّل.

(٨ ـ ١ ـ ١) النسبة والمعدَّل

ليس مُهمًا فقط معرفة عدد حالات الإصابة بمرض معين داخل المجتمع محل الدراسة بل الأكثر أهمية هو معرفة نسبة هذه الإصابة داخل المجتمع. نفرض أن (ا) تمثل عدد حالات الإصابة خلال فترة زمنية محددة وأن (ا + ب) يمثل عدد أفراد المجتمع المعرضين للإصابة خلال الفترة الزمنية نفسها، وعليه يكون المقدار ($\frac{ا}{ا + ب}$) ما يسمى نسبة الإصابة داخل هذا المجتمع، وإذا ضرب هذا المقدار في ١٠٠٠ فإنه يسمى بمعدَّل الإصابة داخل هذا المجتمع. أي أن معدَّل الإصابة بالمرض هو عدد الإصابات مقسوما على عدد الأفراد المعرضين للإصابة (سواء أصابهم المرض أم لا) من المجتمع مضروبا في ألف. أما النسبة فهي مقدار $\frac{ا}{ب}$ وليس من الضروري أن تكون ا جزءًا من ب.

(٨ ـ ٢) تعداد السكان

لقد عرفت معظم الشعوب منذ القدم عملية التعداد المنظم للسكان خلال فترة زمنية محددة. ومن هذه الشعوب قدماء المصريين والروم والإغريق والعرب وغيرهم. وذلك لتقدير القوة البشرية والأيدي العاملة اللازمة للإنشاءات العمرانية، وبناء السدود وأماكن العبادة، وكذلك لمعرفة عدد الذين يمكن تجنيدهم للدفاع عن المجتمع، أو مساعدة مجتمع آخر.

وفي العصر الحديث يعتبر تعداد السكان من أهم الأمور اللازمة في أي دولة لأغراض التخطيط الشامل اقتصاديًا واجتماعيًا، وكذلك جميع الخطط الأخرى اللازمة لهذه الدولة. ولقد جرى العرف في معظم دول العالم على إجراء التعداد السكاني بصفة دورية منتظمة كل عشر سنوات، وذلك لأن التغيرات الجوهرية في السكان لا تحدث في

فترات قصيرة، كما أن عملية التعداد تستلزم جهدًا وتكاليف كبيرة. والتعداد الحديث لايعـطينا عدد السكان فقط بل يمدنا بالإحصاءات الحيوية الأخرى للمجتمع مثل معـدَّلات النمو والتوالد والوفيات والهجرة والزواج والطلاق، والتوزيع الجغرافي على المناطق المختلفة، والتركيب النوعي والعمري للجنس، ومستويات التعليم، وتقدير القوى العاملة على النشاطات الاقتصادية المختلفة. . . الخ.

علاوة على ذلك فإن التعداد السكاني يبين أمورًا كثيرة في المجتمعات مثل الديانة والجنسية واللغة، والمستوى التعليمي والصحي والاقتصادي.

(٨ ـ ٢ ـ ١) تعريف تعداد السكان

يعرَّف التعداد السكاني بأنه عملية حصر جميع الأفراد في مجتمع معين، وذلك خلال لحظة زمنية معينة في مكان محدد. وتجمع البيانات الإحصائية عادة من كل فرد من هؤلاء الأفراد وذلك لمعرفة بعض الصفات الأساسية المهمة التي يراد دراستها في المجتمع.

(٨ ـ ٢ ـ ٢) طرق التعداد السكاني

ويتم التعداد السكاني عادة بإحدى الطريقتين التاليتين

الطريقة الأولى (التعداد الواقعي)

يتم بحصر الأفـراد حيث يقيمـون في اللحظة المحددة للتعداد سواء كان من سكان هذا المكان بصفة دائمة أو بصفة مؤقتة (مثل نزلاء الفنادق أو المستشفيات). وهذا ما يسمى التعداد الواقعي أو الفعلي، ومن أمثلة الدول التي تتبع مثل هذا التعداد إنجلترا ومصر. . .

الطريقة الثانية: (التعداد النظري)

وفي مثل هذا التعداد يتم عد الأفراد حسب المكان الذي تعودوا الإقامة الدائمة فيه بصرف النظر عن مكان وجودهم في اللحظة المحددة للتعداد. وتسمى هذه الطريقة

التعداد النظري أو الاعتيادي، ومن الدول التي تتبع مثل هذا التعداد الولايات المتحدة الأمريكية وكندا. . .

(٨ ـ ٣) تقدير عدد السكان

نحتاج في بعض الأحيان إلى تقدير عدد السكان في سنة ما بعد سنة التعداد، وذلك لمعرفة الزيادة أو النقص الذي طرأ على عدد السكان، ويفيد ذلك في عمل الخطط الخاصة بالدولة على أساس علمي سليم في مجالات التنمية الزراعية والصناعية ومختلف النشاطات الاقتصادية. بغرض توفير احتياجات السكان من المواد الغذائية وغيرها. وكذلك الارتفاع بمستوى المعيشة للسكان.

يمكن حساب الزيادة في عدد السكان من العلاقة التالية:
الزيادة في عدد السكان في بلد ما خلال فترة زمنية معينة
= عدد السكان في بداية الفترة الزمنية + عدد المواليد خلال هذه الفترة الزمنية + عدد المهاجرين إلى البلد خلال هذه الفترة − عدد الوفيات خلال هذه الفترة − عدد المهاجرين من البلد خلال هذه الفترة.

والصيغة السابقة تعطي الزيادة الحقيقية لنمو السكان، وذلك عندما تكون السجلات متوافرة ودقيقة للمواليد، والوفيات، والهجرة للبلد محل الدراسة. ولكن في معظم الأحوال تكون هذه السجلات غير دقيقة وذلك لتباطؤ بعض السكان في تسجيل كل من المواليد والوفيات، أو عدم تسجيل المواليد نهائيا، كما يحدث في بعض المناطق النائية في بعض الدول. لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد طرق إحصائية رياضية لتقدير عدد السكان في فترات زمنية مختلفة وأهمية هذه الطريقة في ثبات متوسط الزيادة السكانية من سنة إلى أخرى (طريقة المتوالية العددية) والطريقة الثانية هي افتراض ثبات معدَّل الزيادة السنوية من سنة إلى أخرى (طريقة المتوالية الهندسية) وسوف نتناول كل طريقة بالشرح والتفصيل والأمثلة فيما يلي.

(٨ ـ ٣ ـ ١) الطريقة الأولى: طريقة ثبات متوسط الزيادة السكانية

وتعتمد هذه الطريقة على ثبات متوسط الزيادة السنوية (المتوالية العددية) فإذا كان عدد السكان ($تق_{٠}$) في سنة التعداد السابقة، ء متوسط الزيادة السنوية فيكون تقدير عدد السكان بعد سنة $تق_{١}$ هو $تق_{٠}$ + ء وكذلك تقدير عدد السكان بعد سنتين $تق_{٢}$ هو $تق_{٠}$ + ٢ء وهكذا. . . وبوجه عام يكون تقدير السكان بعد «ن» من السنوات هو $تق_{ن}$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$تق_{ن}$ = $تق_{٠}$ + ن ء .... (١)

وتحسب (ء) بأنها تساوي خارج قسمة الزيادة بين التعدادين المتتاليين على الفترة الزمنية بين هذين التعدادين.

ملحوظة: $تق_{٠}$ تسمى أحيانا سنة الأساس.

مثـــال (١)

إذا كان تعداد السكان في بلد ما في مارس سنة ١٩٦٠م هو ٢١ مليون نسمة وفي سبتمبر سنة ١٩٧٠م هو ٢٩ مليون نسمة. فأوجد تقديرًا لعدد السكان في ديسمبر سنة ١٩٧٤م.

الحـــل

الفترة الزمنية بين التعدادين = سبتمبر سنة ١٩٧٠م ـ مارس سنة ١٩٦٠م

= ١٠,٥ سنـوات

الزيادة بين التعدادين = ٢٩ − ٢١ = ٨ ملايين نسمة

متوسط الزيادة السكانية (ء) = $\frac{٨}{١٠,٥}$

= ٠,٧٦٢ من المليون نسمة

نأخذ سنة الأساس تعداد سبتمبر سنة ١٩٧٠م فيكون

$تق_{.}$ = ٢٩ مليون نسمة

ن = ديسمبر سنة ١٩٧٤ ـ سبتمبر سنة ١٩٧٠

= ٤,٢٥ سنة

وبذلك يكون

$تق_{ن} = تق_{.} + ء ن$

أي أن :

$تق_{٤,٢٥}$ = ٢٩ + ٠,٧٦٢ × ٤,٢٥

= ٣٢,٢٣٩ مليون نسمة

أي أن تقدير عدد السكان في ديسمبر سنة ١٩٧٤م هو ٣٢,٢٣٩ مليون نسمة

(٨ ـ ٣ ـ ٢) الطريقة الثانية : طريقة ثبات المعدَّل السنوي للزيادة السنوية

وتعتمد هذه الطريقة على افتراض ثبات معدَّل الزيادة السكانية وهي عبارة عن متوالية هندسية.

فإذا كان $تق_{.}$ هو تعداد السكان في سنة الأساس، ر هي معدَّل الزيادة السكانية

فإن تقدير عدد السكان بعد سنة $تق_{١} = تق_{.} (١ + ر)$

وبعد سنتين هو $تق_{٢} = تق_{.} (١ + ر)^{٢}$ . . . وهكذا

وبعد ن سنة هو $تق_{ن} = تق_{.} (١ + ر)^{ن}$

وبذلك يكون تقدير عدد السكان بعد ن سنة بهذه الطريقة يعطى بالعلاقة التالية :

$تق_{ن} = تق_{.} (١ + ر)^{ن}$ . . . . (٢)

ويمكن تلخيص طريقة الحساب بهذه الطريقة بتطبيق العلاقة (٢) باعتبار ن الفترة الزمنية بين التعدادين، $تق_{.}$ هو تعداد السكان عند بداية الفترة الزمنية بين التعدادين، $تق_{ن}$ هو تعداد السكان عند نهاية الفترة الزمنية بين التعدادين، وبذلك يمكن حساب أولاً معدَّل الزيادة ر، ثم نطبق القانون (٢) مرة أخرى لحساب تقدير عدد السكان عند الفترة الزمنية المطلوبة كما يتضح من المثال التالي.

مثــال (٢)

أوجد تقدير عدد السكان في مثال (١) باستخدام طريقة ثبات المعدَّل (المتوالية الهندسية).

أولا : نوجد معدَّل الزيادة السنوية ر

باعتبار تق. هو تعداد السكان في مارس سنة ١٩٦٠م.

أي أن:

تق. = ٢١ مليون نسمة

ن = سبتمبر سنة ١٩٧٠م - مارس سنة ١٩٦٠م

= ١٠,٥ سنـة

أي أن:

$تق_{١٠,٥}$ = ٢٩ مليون نسمة

بتطبيق القانون (٢) كالتالي:

$تق_{١٠,٥} = تق. (١ + ر)^{١٠,٥}$

أي أن:

$٢٩ = ٢١ (١ + ر)^{١٠,٥}$

بأخـذ اللوغـاريثم للطرفين في العلاقة السابقة وباستخدام جدول رقم (٧) في نهاية الكتاب نحصل على

لو ٢٩ = لو ٢١ + ١٠,٥ لو (١ + ر)

ومن ذلك:

$$لو (١ + ر) = \frac{لو ٢٩ - لو ٢١}{١٠,٥}$$

$$= \frac{١,٤٦٢ - ١,٣٢٢}{١٠,٥}$$

$$= ٠,٠١٣٣$$

بأخذ الأعداد المقابلة للوغاريثم أو ما يسمى أحيانا اللوغاريثم العكسي نحصل على:

(١ + ر) = ١,٠٣١

أي أن :

ر = ٠,٠٣١

ثانيا : التقدير في ديسمبر سنة ١٩٧٤م (تق $_{ن}$)

نعتبر سنة ١٩٧٠م سنة الأساس فعلية يكون

تق$_{.}$ = ٢٩ مليون نسمة

ن = ديسمبر سنة ١٩٧٤م - سبتمبر ١٩٧٠م = ٤,٢٥ سنوات

فيكون تقدير عدد السكان في ديسمبر سنة ١٩٧٤م هو تق$_{٤,٢٥}$ ويعطي بالعلاقة التالية :

تق$_{٤,٢٥}$ = تق$_{.}$ (١ + ر)^{٤,٢٥}

تق$_{٤,٢٥}$ = ٢٩ (١ + ٠,٠٣١)^{٤,٢٥}

بأخذ لوغاريثم الطرفين واستخدام جدول (٧) نجد أن

لو تق$_{٤,٢٥}$ = لو ٢٩ + ٤,٢٥ لو (١,٠٣١)

= ١,٤٦٢ + ٠,٠٥٦

= ١,٥١٨

وباستخدام الجدول لإيجاد اللوغاريثم العكسي أو العدد المقابل لقيمة اللوغاريثم نحصل على :

تق$_{٤,٢٥}$ = ٣٢,٩٦ مليون نسمة

ملاحظة مهمة : معدَّلات الزيادة السكانية فضلا عن أنها تمكننا من حساب تقدير عدد السكان بين سنوات التعداد أو ما بعد سنوات التعداد فهي أيضا تمكننا من عمل المقارنات المختلفة بين الدول، وذلك في نفس الفترات الزمنية.

وتقدير السكان بالطرق السابقة يكون قريبًا إلى الحقيقة عندما يكون التقدير لفترات مستقبلية قصيرة، ويكون بعيدًا عن القيمة الحقيقية كلما كانت الفترات المستقبلية طويلة. مما يتطلب منا دراسة الظواهر المؤثرة في النمو السكاني وتقدير ومعرفة اتجاهاتها مثل دراسة معدَّلات الخصوبة، ومعدَّلات المواليد والوفيات ومعدَّلات الهجرة. وسوف نتناول إحصائيات المواليد والوفيات والهجرة والأمراض فيما يلي.

(٨ ـ ٤) إحصاءات المواليد

تعتبر إحصاءات المواليد عنصرًا أساسيًّا في الإحصائيات الحيوية، وكذلك في تقدير عدد السكان، ومعدَّلات النمو السكاني، ولذلك تهتم الدول في الوقت الحاضر بتسجيل المواليد في سجلات خاصة، وتختلف البيانات التي تسجل من بلد إلى بلد، ولكن يمكن تلخيص أهم البيانات المشتركة عادة وهي:

اسم المولود ـ تاريخ الميلاد ـ محل الميلاد ـ اسم الوالد ـ واسم الوالدة ـ ديانة الأب والأم ـ جنسية الأب والأم ـ مهنة الأب.

وتستخدم إحصائيات المواليد في حساب معدَّلات الولادة العام ومعدَّلات الخصوبة العام، ومعدَّل الخصوبة المحدد بالعمر، ومعدَّل التوالد وعادة ما تعرَّف هذه المعدَّلات بالعلاقات التالية.

$$\text{معدَّل الولادة العام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال عام}}{\text{عدد السكان عند منتصف العام}} \times ١٠٠٠ \quad \ldots\ldots (٣)$$

$$\text{معدَّل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال عام}}{\text{عدد النساء في سن الحمل (١٥ـ٤٩)}} \times ١٠٠٠ \quad . \quad (٤)$$

معدَّل الخصوبة المحدد بالعمر =

$$\frac{\text{عدد المواليد الأحياء من نساء في سن محدد خلال عام}}{\text{عدد النساء في ذلك السن في منتصف العام}} \times ١٠٠٠ \ldots\ldots (٥)$$

$$\text{معدَّل التوالد} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال عام}}{\text{عدد النساء المتزوجات في سن الحمل}} \times ١٠٠٠ \quad \ldots\ldots (٦)$$

مثـــال (٣)

احسب معدَّل الولادة العام، ومعدَّل الخصوبة العام، ومعدَّل الخصوبة المحدد بالعمر (٢٠ ـ ٢٤ سنة) ومعدَّل التوالد من البيانات التي بالجدول التالي، وذلك لبلد ما في عام ١٩٧٠.

جدول (٨ ـ ١): أعداد السكان والمواليد والنساء في سن معينة في إحدى القرى

عدد السكان في منتصف العام	عدد المواليد أحياء خلال العام	عدد النساء المتزوجات في سن الحمل	عدد النساء في سن الحمل	عدد المواليد من نساء من عمر (٢٠ ـ ٢٤)	عدد النساء في منتصف العام (٢٠ ـ ٢٤)
٤٢٣٧٥	٢٢٢٨	٨٤٣٥	٩٩٤٥	٣٦٠	٧١٨

$$\text{معدَّل الولادة العام} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء خلال عام}}{\text{عدد السكان عند منتصف العام}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢٢٢٨}{٤٢٣٧٥} \times ١٠٠٠$$

$$= ٥٢,٥٨ \text{ في الألف}$$

$$\text{معدَّل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء خلال عام ١٩٧٠م}}{\text{عدد النساء في سن الحمل}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢٢٢٨}{٩٩٤٥} \times ١٠٠٠$$

$$= ٢٢٤,٠٣٢ \text{ في الألف}$$

معدَّل الخصوبة المحدد بالعمر (٢٠ ـ ٢٤) =

$$\frac{\text{عدد المواليد الأحياء من نساء في عمر (٢٠ ـ ٢٤) خلال عام ١٩٧٠م}}{\text{عدد النساء في عمر (٢٠ ـ ٢٤) عند منتصف العام}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٣٦٠}{٧١٨} \times ١٠٠٠$$

= ٥٠١,٣٩٣ في الألف

$$\text{معدل التوالد} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء خلال عام ١٩٧٠}}{\text{عدد النساء المتزوجات في سن الحمل}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢٢٢٨}{٨٤٣٥} \times ١٠٠٠$$

= ٢٦٤,١٣٨ في الألف

(٨ ـ ٥) إحصاءات الوفيات والهجرة

(٨ ـ ٥ ـ ١) إحصاءات الوفيات

تعتبر إحصاءات الوفيات عنصرًا مهمًا في الإحصاء الحيوي فهي تعطي مؤشرًا لقياس المستوى الصحي للبلاد. كما أنها تعتبر إحدى العوامل المهمة التي تدخل في تقدير عدد السكان للدولة. ومن إحصاءات الوفيات يمكن حساب معدَّلات الوفيات لفئات السن المختلفة وكذلك للمهن المختلفة. وعادة ما تدوَّن البيانات الخاصة بالوفيات في سجلات قيد المتوفين بالبلديات، أو إدارات الأحوال المدنية، حيث تلزم الدولة الأفراد بالإخطار عن كل حالة وفاة فور وقوعها. وتختلف طريقة تسجيل الوفيات من بلد إلى آخر، ولكن توجد بيانات عامة نذكر منها التالي

اسم المتوفي ـ عنوان إقامته ـ الجنس ـ العمر ـ تاريخ الوفاة ـ مكان الوفاة ـ سبب الوفاة ـ مهنة المتوفي ـ جنسية المتوفي ـ حالته الاجتماعية.

وتوجد عدة أنواع من معدَّلات الوفيات نذكر منها:

معدَّل الوفاة الخام ـ ومعدَّل الوفاة المحدد بالعمر ـ ومعدَّل وفاة الأطفال حديثي الولادة، ومعدَّل وفيات الأطفال الرضَّع.

وسوف نعرِّف كل معدَّل من المعدَّلات السابقة:

$$\text{معدَّل الوفاة الخام} = \frac{\text{مجموع عدد الوفيات خلال السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

معدَّل الوفاة المحدد بفئة عمرية =

$$\frac{\text{عدد الوفيات في البلد خلال السنة في تلك الفئة من العمر}}{\text{عدد السكان في البلد في منتصف السنة في تلك الفئة من العمر}} \times ١٠٠٠$$

معدَّل وفيات الأطفال حديثي الولادة =

$$\frac{\text{عدد الوفيات في الأطفال الذين تقل أعمارهم عن ٢٨ يوما}}{\text{عدد الأطفال المولودين أحياء في العام نفسه}} \times ١٠٠٠$$

معدَّل وفيات الأطفال الرضع =

$$\frac{\text{عدد الوفيات في الأطفال الذين تقل أعمارهم عن سنة}}{\text{عدد الأطفال المولودين أحياء في العام نفسه}} \times ١٠٠٠$$

مثـــال (٤)

البيانات التالية خاصة بإحدى البلاد في سنة ما

أعداد السكان المواليد والوفيات في إحدى البلاد

عدد السكان في منتصف السنة بالآلاف	عدد الوفيات بالآلاف	عدد وفيات الأطفال الرضع أقل من سنة بالآلاف	عدد المواليد أحياء بالآلاف	عدد الوفيات في الأطفال الأقل من ٢٨ يوما بالآلاف
٤٢١٨٧	٥٨٧	٩٥	١٤٨٩	٢١

والمطلوب حساب معدَّل الوفاة الخام.

معدَّل وفيات الأطفال الرضع.

معدَّل وفاة الأطفال حديثي الولادة.

الحـــل

$$\text{معدَّل الوفاة الخام} = \frac{\text{مجموع عدد الوفيات خلال السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٥٨٧}{٤٢١٨٧} \times ١٠٠٠ = ١٣,٩ \text{ في الألف}$$

معدَّل وفيات الأطفال حديثي الولادة =

$$\frac{\text{عدد الوفيات في الأطفال الذين تقل أعمارهم عن ٢٨ يوما}}{\text{عدد الأطفال المولودين أحياء في العام نفسه}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢١}{١٤٨٩} \times ١٠٠٠ = ١٤,١ \text{ في الألف}$$

معدَّل وفيات الأطفال الرضع =

$$\frac{\text{عدد الوفيات في الأطفال الذين تقل أعمارهم عن سنة}}{\text{عدد الأطفال المولودين أحياء في العام نفسه}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٩٥}{١٤٨٩} \times ١٠٠٠$$

= ٦٣,٨ في الألف

(٨ ـ ٥ ـ ٢) إحصاءات الهجرة

وهي تشمل البيانات الخاصة بالأفراد الذي ينتمون للبلد (مواطنون)، والذين يغادرون هذا البلد نهائيا، وكذلك الأجانب القادمون لهذا البلد بقصد الإقامة لفترة معينة للعمل مثلاً.

وتقوم الإدارة المختصة بوزارة الداخلية مثل الجوازات في الموانىء والمطارات، ومداخل البلاد ومخارجها على الحدود بتسجيل حركة الهجرة. أما عن الهجرة الداخلية (وهي التحركات السكانية للمواطنين داخل البلد من مكان إلى مكان آخر بقصد الاستيطان) فإنه يمكن التعرف عليها عن طريق التعداد والبحوث الخاصة التي تجريها الجهات المختصة.

(٨ ـ ٦) إحصاءات الأمراض

تهتم الدول في الوقت الحاضر بالناحية الصحية للمواطنين، وكيفية الارتفاع بالمستوى الصحي داخل البلاد، وإنشاء المستشفيات المتخصصة. ومن ذلك كان لا بد من دراسة وتحليل الوضع الصحي في المجتمع. وموضوع إحصائيات الأمراض، ودراسة المعدَّلات المهمة لها يعتبر مؤشرًا مهمًا في هذا المجال ونذكر بعض معدَّلات الأمراض منها.

$$\text{معدَّل الإصابات} = \frac{\text{عدد الإصابات الجديدة من مرض معين خلال عام}}{\text{عدد السكان في منتصف العام}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{معدَّل الإنتشار} = \frac{\text{عدد الإصابات (الجديدة أو القديمة) في فترة معينة}}{\text{عدد السكان في تلك اللحظة}} \times ١٠٠٠$$

قد تكون الفترة يومًا أو أسبوعًا مثلاً.

$$\text{معدَّل حالات الهلاك} = \frac{\text{عدد الوفيات بسبب مرض معين}}{\text{عدد حالات الإصابة بهذا المرض}} \times ١٠٠٠$$

وهـذا المعـدَّل يبين مدى نجاح طرق مكافحة مرض معين من قبل المسئولين بالصحة العامة في البلاد.

مثـــال (٥)

الجدول التالي يمثل بيانات خاصة بالصحة في إحدى البلاد والمطلوب حساب معدَّل الإصابة بالبلهارسيا، ومعدَّل انتشار المرض (ا) ومعدَّل الهلاك للمرض (ا)

جدول (٨ ـ ٣): أعداد السكان والإصابات بالأمراض والوفيات في إحدى البلاد

عدد السكان في منتصف العام بالآلاف	عدد الإصابات بمـــرض البلهارسيا بالآلاف	عدد الإصابات بمرض (ا) قبل يناير ١٩٨٠م بالآلاف	عدد الإصابات بمرض (ا) في يناير ١٩٨٠م بالآلاف	عدد السكان في ينايـر ١٩٨٠م بالآلاف	عدد الوفيات من مرض (ا) بالآلاف
٤٢١٨٧	١٠٥٤٦	٢١	١٥	٤٣١٩٩	٢

الحـــل

$$\text{معدَّل الإصابات} = \frac{\text{عدد الإصابات الجديدة من مرض معين خلال عام}}{\text{عدد السكان في منتصف العام}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{معدَّل الإصابة بمرض البلهارسيا} = \frac{١٠٥٤٦}{٤٢١٨٧} \times ١٠٠٠$$

= ٢٤٩,٩٨ في الألف

$$\text{معدّل الانتشار لمرض (ا)} = \frac{\text{عدد الإصابات القديمة والجديدة في فترة معينة}}{\text{عدد السكان في تلك اللحظة}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{(٢١ + ١٥)}{٤٣١٩٩} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٣٦}{٤٣١٩٩} \times ١٠٠٠$$

= ٠,٨٣٠ في الألف

$$\text{معدّل حالات الهلاك للمرض (ا)} = \frac{\text{عدد الوفيات بسبب مرض ا}}{\text{عدد حالات الإصابة بهذا المرض}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢}{(٢١ + ١٥)} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢}{٣٦} \times ١٠٠٠$$

= ٥٥,٥٦ في الألف

(٨ ـ ٧) تماريـــن

١ ـ عرّف ما يلي:
معدّل الوفيات الخام ـ معدّل الخصوبة العام ـ معدّل التوالد ـ معدّل انتشار المرض ـ معدّل الهلاك.

٢ ـ الجدول التالي يمثل حالات الحمل في إحدى المدن مصنفة حسب أعمار الأمهات

حالات الحمل حسب أعداد الإناث في سن الحمل وفئات العمر في إحدى المدن

فئات العمر	عدد الإناث في سن الحمل	عدد حالات الحمل التي أدت إلى مواليــد أحيــاء
١٦ ـ ١٩	٦١٢١	٨١٢
٢٠ ـ ٢٥	٢٩١٢	٢١١١
٢٦ ـ ٣٥	٢٧٠٢	١٦٢١
٣٦ ـ ٤٥	٣٥٢١	٩٩٩

وإذا علم أن عدد السكان في هذه المدينة هو ٥١٢١٣ نسمة فاحسب:

ا) معدَّل الولادة العام في هذه المدينة.

ب) معدَّل الخصوبة المحدد بالعمر.

٣ ـ بلغ تعداد السكان في إحدى الدول ٤٠ مليون نسمة في منتصف عام ١٩٦٩م بينما كان تعداد السكان في هذه الدولة في منتصف عام ١٩٧٥م ٤٤ مليون نسمة والمطلوب، تقدير عدد السكان في هذا البلد في منتصف عام ١٩٧٧م باستخدام:

أ) طريقة ثبات مقدار الزيادة.

ب) طريقة ثبات معدَّل الزيادة.

٤ ـ البيانات التالية خاصة بإحدى الدول عام ١٩٦٠م:

عدد المواليد بالآلاف = ١١٠٠ ، عدد النساء في سن الحمل بالآلاف = ٧٠٠٠

عدد النساء المتزوجات في سن الحمل بالآلاف = ٤٥٠٠

تقدير عدد السكان في منتصف العام بالآلاف = ٢٧٠٠٠

ا) احسب معدَّل المواليد الخام.

ب) احسب معدَّل الخصوبـة.

جـ) أوجد معدَّل التوالد.

٥ ـ إذا كان تعداد السكان في إحدى البلاد في يونيو ١٩٥٧م هو ٢٠ مليون نسمة

وكـانت مقدار الزيادة السنوية هي ٠,٦ مليون نسمة . فأوجد عدد السكان التقديري في يونيو ١٩٦٧م.

٦ ـ إذا كان عدد سكان مصر ٢٦ مليون نسمة في ٢١ سبتمبر ١٩٦٠م و ٣٠ مليون في ٣١ مايو ١٩٦٦م فما هو تقـدير عدد السكان في منتصف الأعوام ١٩٦٧ ، ١٩٦٨ ، ١٩٦٩ ، ١٩٧٠م ، ١٩٧١م .

٧ ـ كان عدد سكان أسبانيا في ٣١ ديسمبر ١٩٤٠ يعادل ٢٥,٨٧٨ مليون نسمة ، وبعد عشر سنوات بلغ هذا العدد ٢٧,٩٧٧ مليون نسمة ، وكان عدد المواليد في عام ١٩٥١م يعادل ٥٦٤٥١٧ نسمة ، وعدد الوفيات في ذلك العام ٢٧٥٣٥٨ نسمة (مدني الدسوقي ١٩٧٥م) .

ا) أوجد عدد سكان أسبانيا في الأعوام ١٩٥١م ، ١٩٥٢م ، ١٩٥٣م ، ١٩٥٤م ، ١٩٥٥م .

ب) احسب معدَّل المواليد .

جـ) احسب معدَّل الوفيات .

الفصل التاسع

مبادئ الاحتمالات

(٩ - ١) مقدمــــة

من الكلمات الشائعة في حياتنا اليومية كلمة محتمل، ممكن وغالبًا، ربما، أحيانًا وكذلك مؤكد، مستحيل، فمثلاً يوجد كثير من التعبيرات المألوفة مثل نجاح أحد الطلاب في مقرر دراسي معين يكون محتملاً، كما يقال من المحتمل أن تمطر السماء اليوم أو من المحتمل أن يكون الجو باردًا في المساء . . . الخ . واستخدام كلمة محتمل يكون للتعبير عن تحقق حادث بذاته ويكون غير مؤكد، وغير مستحيل الوقوع . وعادة ما يستخدم عدد كبير من الناس كلمة محتمل أو ممكن في نفس الظروف بتعبيرات مختلفة مثل محتمل، محتمل جدًا، محتمل جدًا جدًا، الخ . حيث تكون درجة الميل إلى إمكانية سقوط المطر مثلاً مختلفة من شخص إلى آخر حسب المعلومات المتوافرة للشخص وخبرته . ومن هنا نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس رقمية بدلاً من التعبيرات التي يستدل منها على درجة الثقة في وقوع الحادث المعبر عنه . والعلم الذي يبحث في هذه المقاييس وعلاقتها بعضها ببعض يسمى علم الاحتمالات . وهذا العلم تطور تطورًا كبيرًا، وأصبح أساسًا لعلم الإحصاء وبحوث العمليات وغيرهما . وعلم الاحتمالات كسائر العلوم الأخرى يبدأ ببعض التعاريف والبديهيات، ويعتمد في تطوره على بعض المفهومات الأساسية في الرياضيات، مثل نظرية المجموعات وغيرها، وسوف نبدأ بتلخيص ما نحتاجه من نظرية المجموعات فيما يلي .

(٩ ـ ٢) المجموعـــات

المجموعة هي تجمع لأشياء معرَّفة تعريفًا جيدًا. والمقصود بالتعريف الجيد هو إعطاء الصفات المشتركة والمميزة للعناصر حيث يمكن الحكم على عنصر ما بأنه ينتمي إلى هذه المجمـوعة أو لا ينتمي إلى هذه المجموعة. وعادة يرمز للمجموعة بحروف هجـائية مكـبرة أو داكنة مثل **ا، ب، جـ**. . . وعناصر المجموعة بحروف هجائية مصغرة مثل ا، ب، جـ.

وإذا كان عنصر ما ا مثلا ينتمى إلى المجموعة **ا** فإنه يكتب على الصورة ا ∈ **ا** (ويقرأ العنصر **ا** ينتمي إلى المجموعة ا).

وإذا كان هذا العنصر لا ينتمي إلى المجموعة **ا** فيكتب على الصورة ا ∉ **ا** (ويقرأ العنصر ا لا ينتمي إلى المجموعة ا).

والأمثلة للمجموعات كثيرة فمثلاً مجموعة طلاب كلية الزراعة بجامعة الملك سعود. فإن كل طالب في كلية الزراعة بجامعة الملك سعود ينتمي إلى هذه المجموعة وإن أي طالب من كلية أخرى من جامعة الملك سعود أو غيرها لا ينتمي إلى هذه المجموعة.

(٩ ـ ٢ ـ ١) طريقة كتابة المجموعة

هناك طرق كثيرة لكتابة المجموعات نذكر منها ما يسمى طريقة جدولة العناصر أو طريقة الخاصة المميزة للعناصر أو أشكال فن (Venn) وسوف نتناول كل طريقة بالشرح والتفصيل والأمثلة كما يلي.

طريقة جدولة العناصر

وتتلخص هذه الطريقة في كتابة اسم المجموعة وليكن **ا**، ثم نكتب يساوي، ثم نفتح قوسين من النوع {   } وبين هذين القوسين نكتب جميع عناصر المجموعة،

وكل عنصر يفصل عن العنصر الآخر بفاصلة (،) فعلى سبيل المثال إذا كانت المجموعة ا عناصرها هي الأعداد ١، ٢، ٥ فإننا نعبر عنها بالصورة:

ا = { ١، ٢، ٥ }

ويهمنا في دراستنا للمجموعات معرفة عدد العناصر الموجودة في المجموعة ويرمز لعدد العناصر بالرمز ن (ا)، ويوضع بين القوسين اسم المجموعة، فمثلاً نلاحظ أن عدد عناصر المجموعة ا السابقة هو ٣ فنكتب عدد العناصر للمجموعة ا على الصورة التالية

ن (ا) = ٣

ويجب أن نعرف أنه ليس من الضروري أن تكون عناصر المجموعة أرقامًا فقط، فقد تكون حروفًا، أو صفات أو أسماءًا أو أشياء أخرى محددة، ونوضح ذلك بالمجموعات التالية:

ا = { ولد ، بنت } ويكون عدد العناصر لها ن (ا) = ٢ .
ب = { أ، ب، جـ، د } ويكون عدد العناصر لها ن (ب) = ٤ .
جـ = { صورة ، كتابة } ويكون عدد العناصر لها ن (جـ) = ٢ .

طريقة الخاصة المميزة للعناصر

تتلخص هذه الطريقة في كتابة المجموعة كالتالي:

ا = { س : س (ا) } حيث س (ا) الصفة المميزة للعناصر س ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (١)

ا = { س : س عدد زوجي }

وتكون المجموعة ا بطريقة جدولة العناصر على الصورة

ا = { . . . ، -٤، -٢، ٢، ٤، . . . }

طريقة أشكال فن

أشكال فن عبارة عن أشكال أو رسوم هندسية تحوي بداخلها نقاطًا تمثل عناصر المجموعة، وقد تكون هذه الأشكال مربعات، أو مثلثات، أو مستطيلات، أو دوائر،

أو أشكال بيضاوية مثلاً، وسوف نستخدم في هذا الكتاب الأشكال الدائرية والمستطيلة.

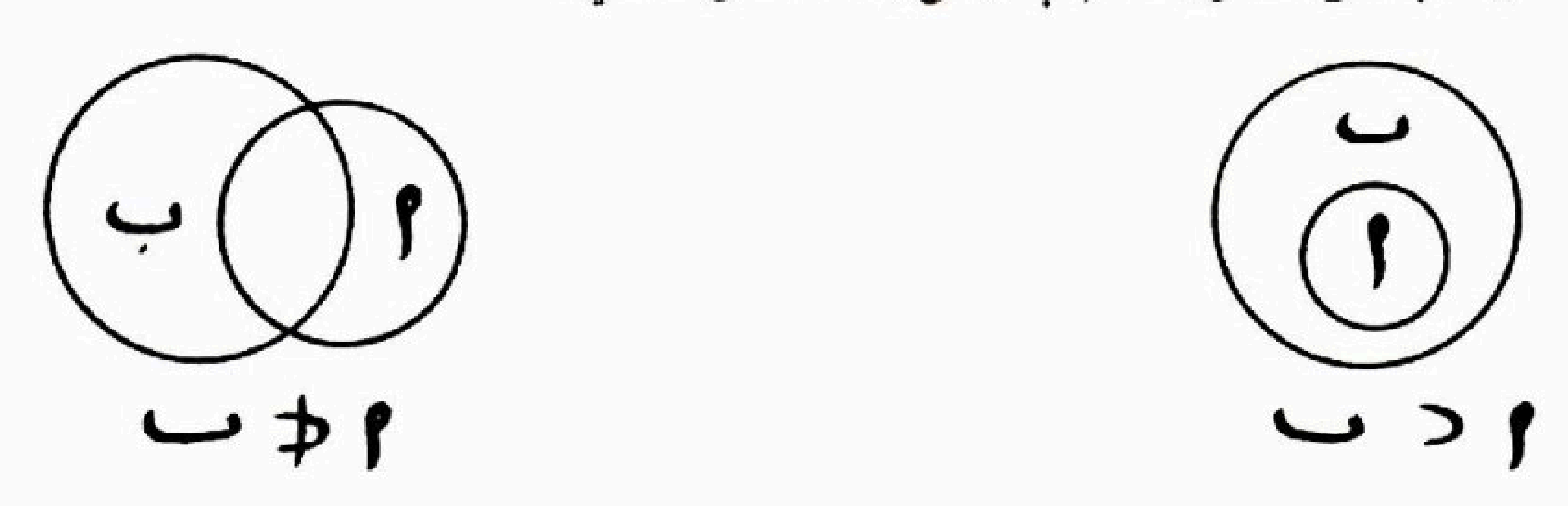
ويمكن تمثيل المجموعات السابقة أ، ب، جـ بأشكال فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ١): أشكال فن لبعض المجموعات

(٩ ـ ٢ ـ ٢) المجموعة الجزئية

إذا وقعت جميع عناصر المجموعة ا ضمن عناصر المجموعة ب فإنه يقال: إن المجموعة ا مجموعة جزئية من المجموعة ب ويرمز لها بالرمز ا ⊂ ب، وإذا كانت المجموعة ب لا تحوي جميع عناصر ا فإنه يقال إن ا ليست مجموعة جزئية من ب، وتكتب على الصورة ا ⊄ ب وتمثل بأشكال فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ٢): المجموعة الجزئية

مثال (٢)

ا = { ١ ، ٣ } ، ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ،
جـ = { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

نلاحظ أن :

ا ⊂ ب لأن جميع عناصر ا موجودة في المجموعة **ب** .

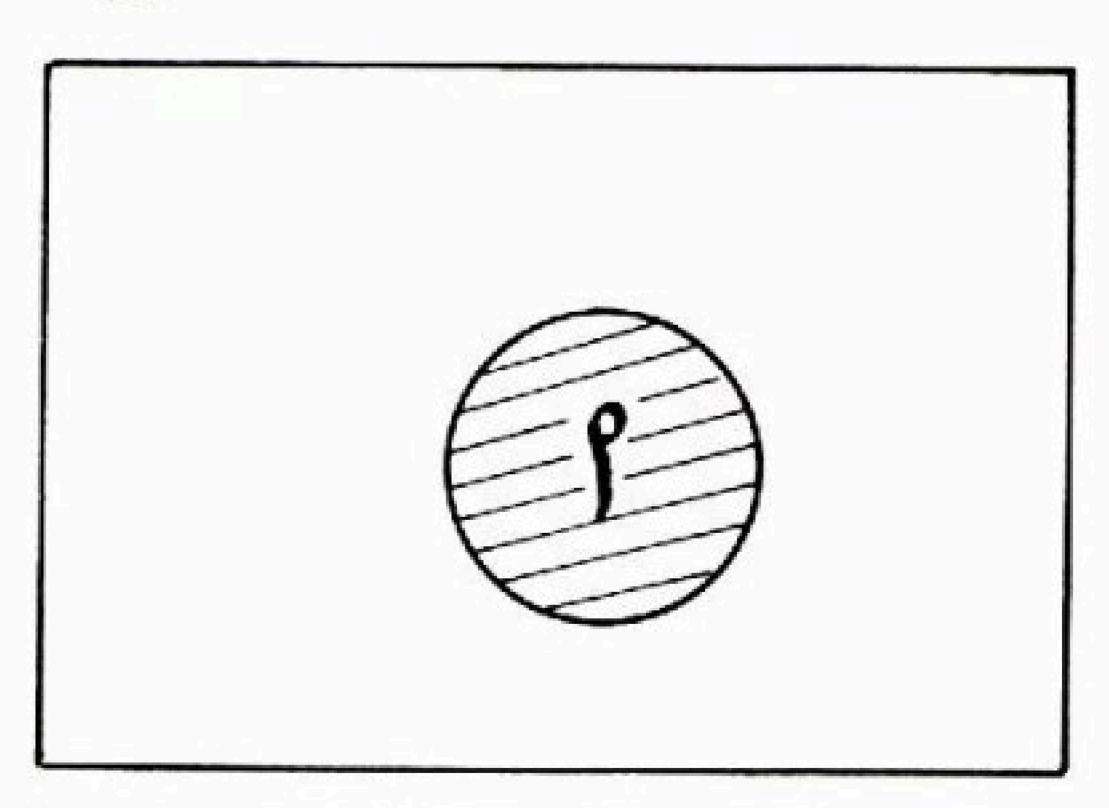
جـ ⊄ **ب** لأن العنصر ٧ ليس عنصرًا في المجموعة **ب** .

ا ⊄ **جـ** لأن العنصر ١ الموجود في المجموعة ا ليس عنصرًا في المجموعة **جـ** .

(٩ ـ ٢ ـ ٣) المجموعة الشاملة (ش)

لأي مجموعة من المجموعات يكون لها مجموعة أكبر منها وأعم وأشمل وتسمى المجموعة الشاملة ، ويرمز لها بالرمز **ش** ، والمثال على ذلك مجموعة طلاب كلية الآداب بجامعة الملك سعود، هي مجموعة جزئية من طلاب جامعة الملك سعود، ومجموعة طلاب جامعة الملك سعود مجموعة جزئية من طلاب جامعات المملكة العربية السعودية ، ومجموعة طلاب جامعات المملكة العربية السعودية هي مجموعة جزئية من طلاب جامعات الدول العربية ، وهكذا . . .

وسوف نمثل المجموعة الشاملة **ش** بشكل «فن» عبارة عن مستطيل ترسم داخله الأشكال الدائرية الممثلة للمجموعات الأخرى ، كما هو موضح بالرسم :



شكل (٩ ـ ٣) : المجموعة الشاملة

(٩ ـ ٢ ـ ٤) المجموعة الخالية (ϕ)

وهي مجموعة لا تحتوي على أية عناصر ، ويرمز لها بالرمز ϕ ، وتكتب على الصور التالية :

$$\phi = \{ \quad \}$$

والأمثلة على المجموعات الخالية كثيرة نذكر منها:
مجموعة الطلاب بجامعة الملك سعود الذين تقل أعمارهم عن عشر سنوات في الوقت الحالي مثلاً، مجموعة أيام السنة التي زادت فيها كمية الأمطار اليومية في مدينة الرياض عن متر.

ويجب أن نعرف أن عدد العناصر لها هو ن (ϕ) = صفر

مثـال (٣)

اذكر الفروق بين

ϕ ، صفر ، { صفـر }

نلاحظ أن:

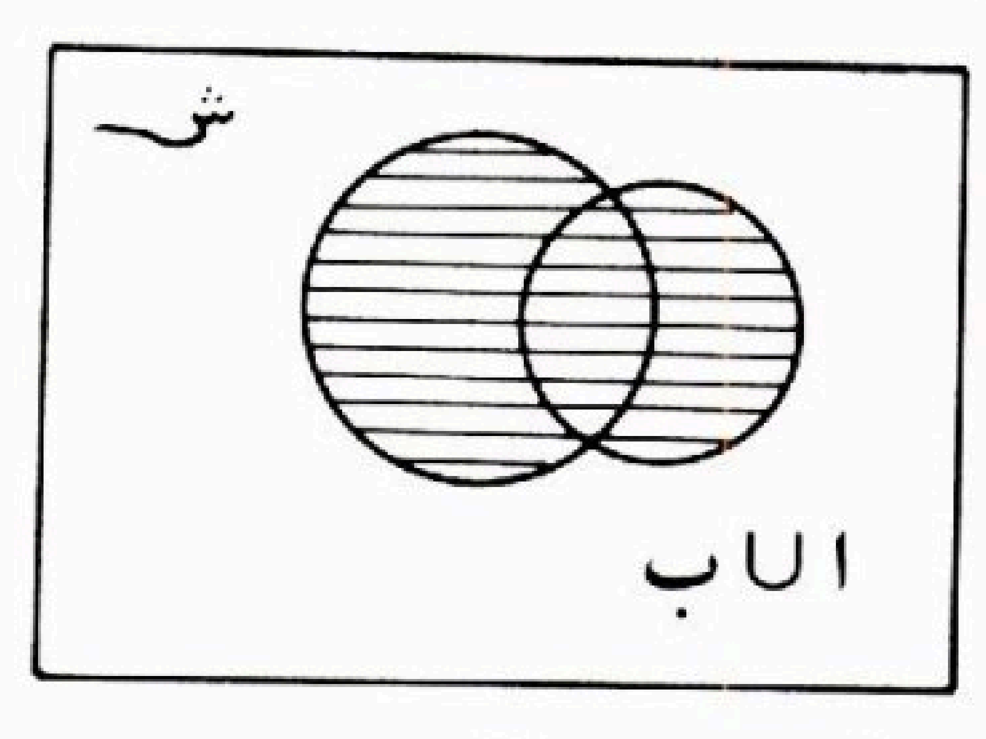
ϕ هي عبارة عن المجموعة الخالية التي لا توجد بها أية عناصر،
صفر هو رقم قيمته صفر.
{ صفـر } هي مجموعة تحتوي على عنصر واحد قيمته صفر.

(٩ ـ ٢ ـ ٥) اتحاد مجموعتين

يعرَّف اتحاد مجموعتين ا، **ب** بأنه المجموعة **جـ** مثلاً، وهي عبارة عن مجموعة العناصر الموجودة في **ا** أو **ب** أو كليهما معًا، ويرمز لها كالتالي:

جـ = ا ∪ ب (وتقرأ ا اتحاد ب)

وتمثل بشكل فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ٤): اتحاد مجموعتين

مثـال (٤)

إذا كانت المجموعات التالية

ا = { ١ ، ٢ } ، ب = { ١، ٣، ٤، ٧ } ، جـ = { ٨ }

فأوجد الآتي

ا ∪ ب ، ا ∪ جـ ، ب ∪ جـ

وعدد عناصر كل من

ن (ا ∪ ب) ، ن (ا ∪ جـ) ، ن(ب ∪ جـ)

الحــل

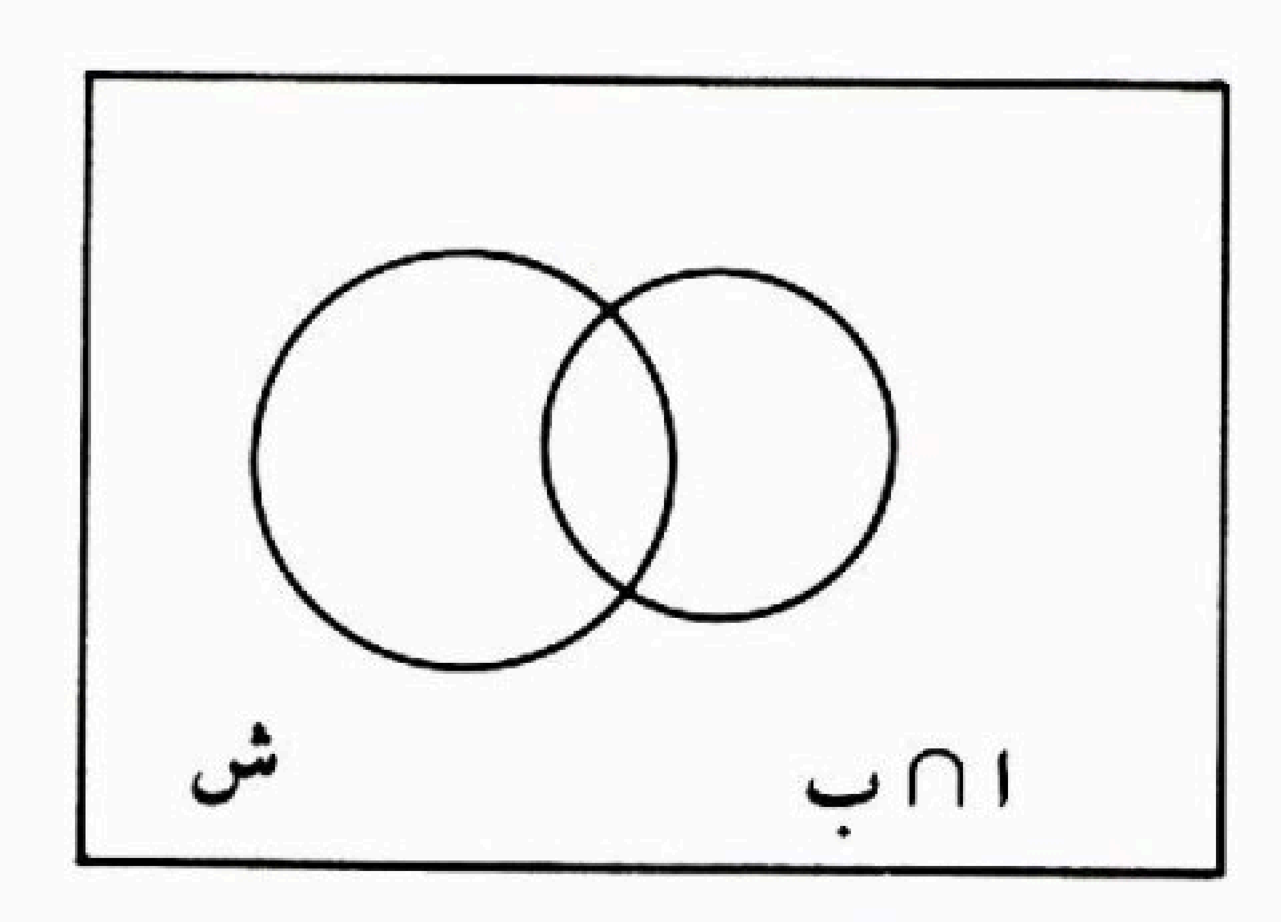
ا ∪ ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ } ، ن (ا ∪ ب) = ٥

ا ∪ جـ = { ١ ، ٢ ، ٨ } ، ن (ا ∪ جـ) = ٣

ب ∪ جـ = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨ } ، ن (ب ∪ جـ) = ٥

(٩ ـ ٢ ـ ٦) تقاطع المجموعات

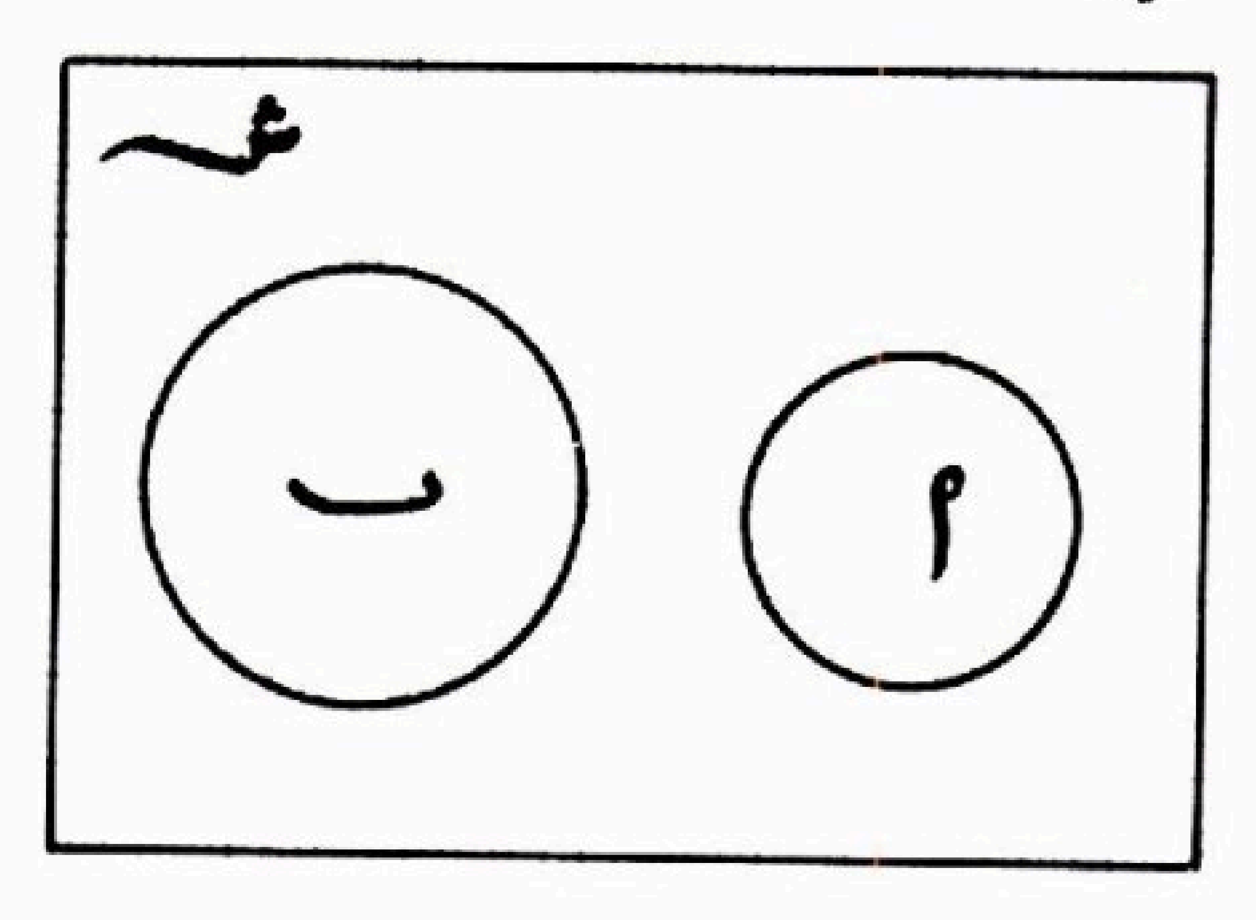
يعرَّف تقاطع مجموعتين ا، ب مثلاً بالمجموعة **د** حيث إن **د** عبارة عن مجموعة العناصر الموجودة في كل من ا، ب معًا، وتكتب: **د = ا ∩ ب** (وتقرأ **ا** تقاطع **ب**) وتمثل بشكل فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ٥): تقاطع مجموعتين

وفي حالة عدم وجود عناصر مشتركة في المجموعتين ا ، **ب** فيقال إن المجموعتين **ا**، **ب** منفصلتان أو متنافيتان أي أن **ا** ∩ ب = ϕ

وتمثل بشكل فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ٦): تنافي مجموعتين

مثـال (٥)

من مثال (٤) السابق أوجد **ا** ∩ **ب** ، **ا** ∩ **جـ** ، **ب** ∩ **جـ** وعدد عناصر كل منهم نلاحظ أن

ا ∩ **ب** = { ١ ، ٢ } ∩ { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٧ } = { ١ }

ا ∩ **جـ** = { ١ ، ٢ } ∩ { ٨ } = ϕ

ب ∩ **جـ** = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٧ } ∩ { ٨ } = ϕ

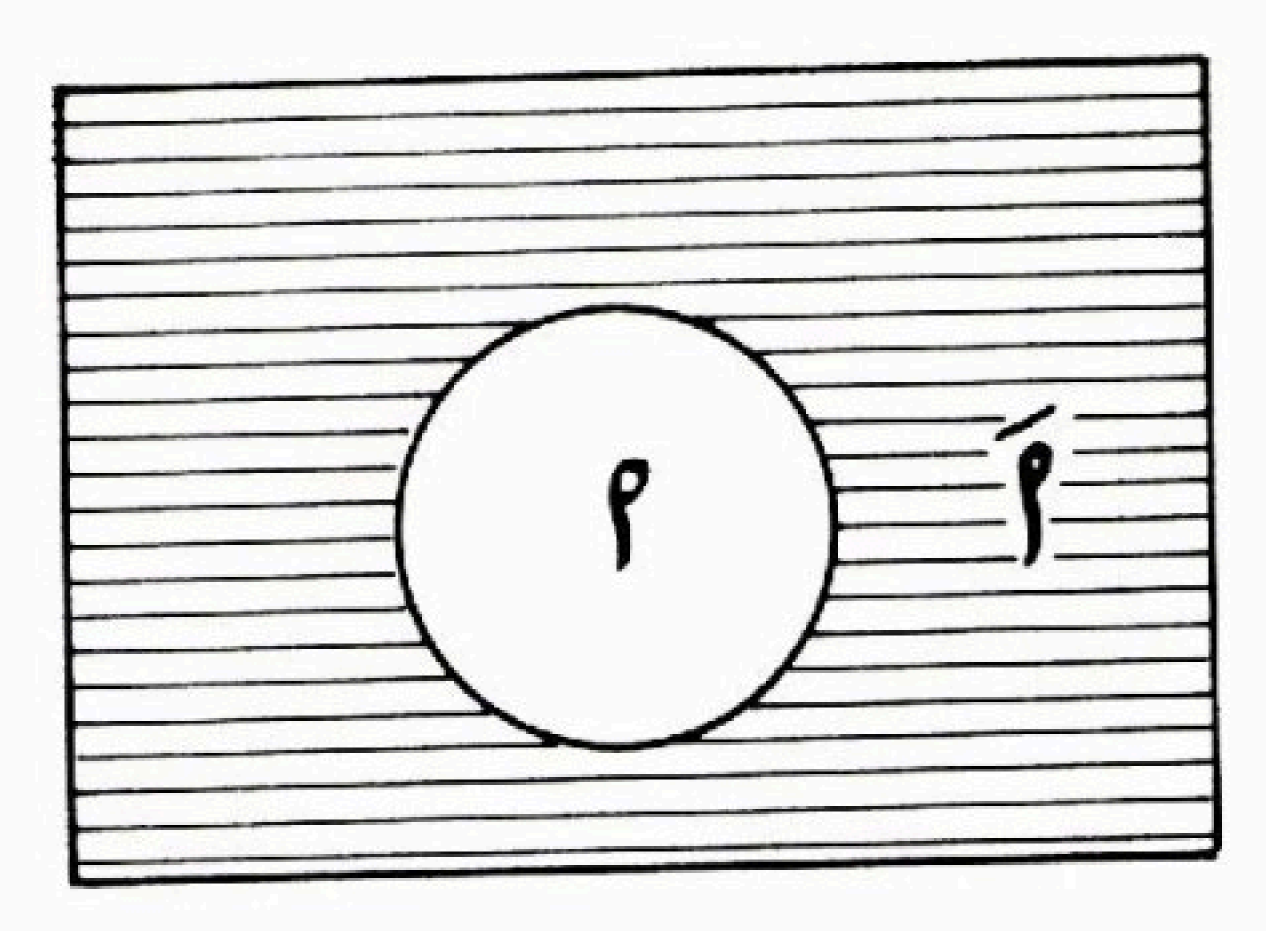
ن (ا ∩ **ب**) = ١ ، ن (ا ∩ **جـ**) = صفر ، ن (**ب** ∩ **جـ**) = صفر

(٩ ـ ٢ ـ ٧) المجموعة المكملة

تعرّف المجموعة المكملة للمجموعة ا بأنها مجموعة العناصر المجودة في المجموعة الشاملة وليست موجودة في المجموعة ا ، ويرمز لها بالرمز آ (وتقرأ مكملة ا) أي أن :

آ = ش − ا،

وباستخدام شكل فن نعبر عن ا كالتالي:



شكل (٩ - ٧): المجموعة المكملة

ونلاحظ أن

$$\bar{أ} \cup أ = \text{ش}$$
$$\bar{أ} \cap أ = \phi$$

مثـال (٦)

إذا كانت **ش** = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ا = { ١ ، ٣ ، ٥ }

فأوجد $\bar{ا}$، ن ($\bar{ا}$)

$\bar{ا}$ = ش - ا

$\bar{ا}$ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ن ($\bar{ا}$) = ٣

ملاحظة مهمة:

نلاحظ أن

$$\overline{(ا \cup ب)} = \bar{ا} \cap \bar{ب}$$
$$\overline{(ا \cap ب)} = \bar{ا} \cup \bar{ب}$$

ويسمى «**قانون ديمورجن**»، وله أهمية كبيرة في دراسة الاحتمالات.

مثال (٧)

ش = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ا = {١ ، ٢} ،

ب = {١ ، ٣ ، ٥} ، جـ = {٦}

أوجـــد

$\overline{\text{ا}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ ، $\overline{\text{جـ}}$ ، ا $\cup$ ب ، ا $\cup$ جـ

ا $\cup$ ب $\cup$ جـ ، ا $\cap$ ب ، $\overline{(\text{ا} \cap \text{ب})}$ ، $\overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$

$\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$ ، $\overline{(\text{ا} \cup \text{ب})}$ وعدد عناصر كل منهم

نجد أن

$\overline{\text{ا}}$ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن ($\overline{\text{ا}}$) = ٤

$\overline{\text{ب}}$ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ن ($\overline{\text{ب}}$) = ٣

$\overline{\text{جـ}}$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، ن ($\overline{\text{جـ}}$) = ٥

ا $\cup$ ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} ، ن (ا $\cup$ ب) = ٤

ا $\cup$ جـ = {١ ، ٢ ، ٦} ، ن (ا $\cup$ جـ) = ٣

ا $\cup$ ب $\cup$ جـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ، ن (ا $\cup$ ب $\cup$ جـ) = ٥

ا $\cap$ ب = {١} ، ن (ا $\cap$ ب) = ١

$\overline{\text{ا} \cap \text{ب}}$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن $\overline{(\text{ا} \cap \text{ب})}$ = ٥

$\overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن $(\overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}})$ = ٥

$\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$ = {٤ ، ٦} ، ن $(\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}})$ = ٢

$\overline{\text{ا} \cup \text{ب}}$ = {٤ ، ٦} ، ن $\overline{(\text{ا} \cup \text{ب})}$ = ٢

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$\overline{\text{ا} \cap \text{ب}} = \overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$$

$$\overline{\text{ا} \cup \text{ب}} = \overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$$

وهذا يحقق **قانون ديمورجَن** الذي سبقت الإشارة إليه .

(٩ - ٣) التجربة العشوائية

يستخدم علم الإحصاء في استقراء النتائج والمشاهدات والقياسات التي يسجلها العلماء والباحثون نتيجة إجراء التجارب. والتجربة العشوائية هي كل تجربة لا تكون نتيجتها معروفة مسبقا بشكل مؤكد، فمثلاً نسمى إلقاء قطعة نقود تجربة عشوائية، لأننا نعلم مسبقا نتائجها الممكنة وهي الصورة والكتابة ولكن لا نستطيع أن نتنبأ بأي من الصورة أو الكتابة يظهر بعد إلقائها. وكذلك فإن رمي زهرة النرد (مكعب سداسي الوجوه) مرة واحدة فهي تجربة عشوائية أيضًا، لأن جميع نتائج التجربة معروفة. ويكون الوجه الذي يظهر إلى أعلى يحمل أحد الأعداد الآتية: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.

(٩ - ٤) فراغ العينة والحادثة

فراغ العينة هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، وسنرمز لفراغ العينة بالرمز **ش**. لكن الحادثة **ا** هي مجموعة جزئية من فراغ العينة، أي أن ا ⊂ **ش**، ففي حالة رمي قطعة نقود تكون النتيجة صورة ص أو كتابة ك فإن فراغ العينة **ش** = { ص، ك } وإذا كان اهتمامنا بوجه معين من وجهي قطعة النقود، وليكن الصورة مثلاً فإن ظهور هذا الوجه يسمى حادثة، ونرمز لها بالرمز **ا** حيث **ا** = { ص } وتكون الحادثة **أ** مجموعة جزئية من فراغ العينة ش أي **ا** ⊂ **ش**.

وكذلك في حالة رمي زهرة النرد تكون النتيجة هي ظهور أحد الأوجه الستة الذي يحمل أحد الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، فإن فراغ العينة في هذه الحالة **ش** = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ } وإذا كان اهتمامنا بظهور وجه يحمل عددًا زوجيًا فإن ظهور أي وجه بعدد زوجي يسمى حادثة، ولتكن **ب** = { ٢، ٤، ٦ } والحادثة **ب** تكون مجموعة جزئية من **ش**. ونلاحظ أن الحادثة قد تحتوي على عنصر واحد، كما في حالة ظهور الصورة عند رمي قطعة النقود، أو تحتوي على أكثر من عنصر في حالة ظهور العدد الزوجي عند رمي زهرة النرد **ب** = { ٢، ٤، ٦ }.

هناك نوعان من فراغ العينة هما فراغ العينة المنتهي وفراغ العينة غير المنتهي، وسوف نكتفي في هذا الكتاب بدراسة الفراغ المنتهي، وهو فراغ العينة القابل للعد.

مثال (٨)

إذا رميت قطعة نقود مرتين متتاليتين فأوجد ما يلي:

(١) فراغ العينة لهذه التجربة العشوائية، وكذلك عدد عناصر فراغ العينة.

(٢) الحوادث التالية، وكذلك عدد عناصر كل حادثة.

ا = { ظهور صورة واحدة } ، **ب** = { ظهور صورة على الأقل }

جـ = { ظهور كتابة مرتين }

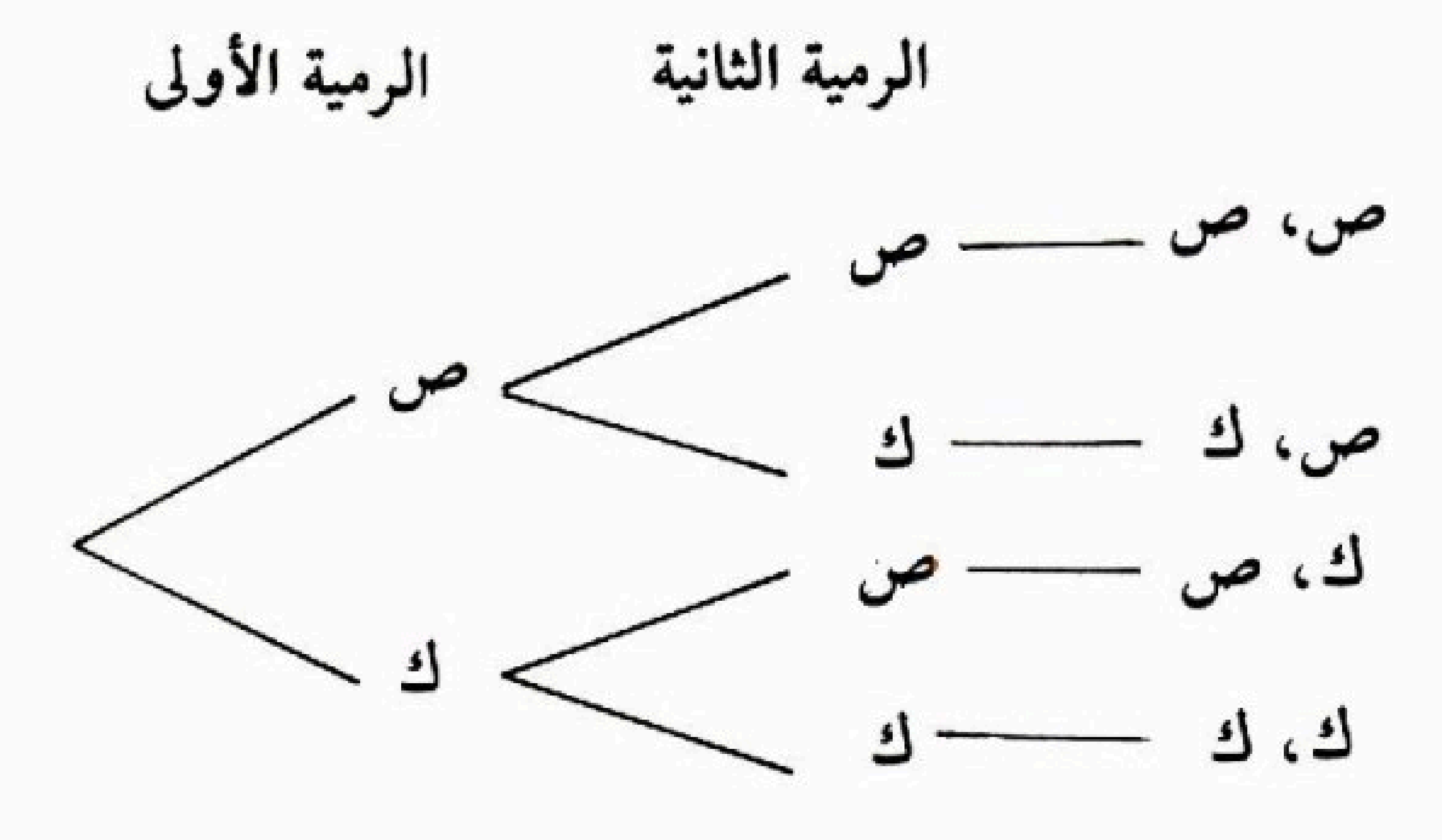
الحـــل

إذا رمزنا للصورة بالرمز (ص) وللكتابة بالرمز (ك) فإن فراغ العينة **ش** يكون كما يلي:

ش = { (ص، ص) ، (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ك، ك) }

ن (**ش**) = ٤

ويمكن إيجاد **ش** باستخدام الشجرة البيانية كما يلي:



شكل (٩ ـ ٨): الشجرة البيانية

وواضح من الشجرة البيانية أن كل فرع يحدد أحد النتائج الممكنة للتجربة العشوائية (ورمي قطعة النقود مرتين) فمثلا الفرع الأعلى يحدد النتائج (ص ، ص) وهو ظهور الصورة في الرمية الأولى، وظهور صورة في الرمية الثانية كذلك.

وبالمثل بقية الفروع تحدد بقية نتائج التجربة التي تمثل فراغ العينة ش التي سبقت كتابتها والموضحة بجوار الرسم

ا = { (ص ، ك) ، (ك ، ص) } ، ن (ا) = ٢

ب = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) } ، ن (ب) = ٣

جـ = { (ك ، ك) } ، ن (جـ) = ١

مثال (٩)

إذا ألقينا حجريْ نرد مرة واحدة فاكتب فراغ العينة **ش** والحوادث التالية:

ا = { ظهور رقمين متساويين } ، **ب** = { مجموع الرقمين يساوي عشرة } ،

جـ = { مجموع الرقمين أقل من ٢ } .

يمكن تمثيل نتائج الحجر الأول على المحور الأفقي، والحجر الثاني على المحور الرأسي، ونكتب نتائج الحجرين كما هو موضح بالشكل التالي:

الحجر الثاني						
٦	١ ، ٦	٢ ، ٦	٣ ، ٦	٤ ، ٦	٥ ، ٦	٦ ، ٦
٥	١ ، ٥	٢ ، ٥	٣ ، ٥	٤ ، ٥	٥ ، ٥	٦ ، ٥
٤	١ ، ٤	٢ ، ٤	٣ ، ٤	٤ ، ٤	٥ ، ٤	٦ ، ٤
٣	١ ، ٣	٢ ، ٣	٣ ، ٣	٤ ، ٣	٥ ، ٣	٦ ، ٣
٢	١ ، ٢	٢ ، ٢	٣ ، ٢	٤ ، ٢	٥ ، ٢	٦ ، ٢
١	١ ، ١	٢ ، ١	٣ ، ١	٤ ، ١	٥ ، ١	٦ ، ١
	١	٢	٣	٤	٥	٦ الحجر الأول

شكل (٩ ـ ٩): تمثيل فراغ العينة بواسطة شبكة التربيع

ومن الشكل يمكن كتابة فراغ العينة **ش** كالتالي

ش = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، . . . . ، (٦ ، ٦) }

ن (**ش**) = ٣٦

الحوادث ا ، **ب** كما هي موضحة بالشكل الممثل لفراغ العينة **ش** هي

ا = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ،(٤ ، ٤)،(٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

ب = { (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٤) }

جـ = ϕ

ن (ا) = ٦ ، ن (ب) = ٣ ، ن (جـ) = صفر

يمكن أن نستعرض بعض التعاريف، وبعض أنواع الحوادث فيما يلي.

(٩ ـ ٤ ـ ١) الحالات المواتية

هي النتائج أو الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي ندرس احتمال حدوثه، ففي حالة رمي قطعة النقود فإن ظهور الصورة يعتبر حالة مواتية، إذا كانت الحادثة المطلوبة هي ظهور الصورة كما يعتبر ظهور الكتابة حالة غير مواتية. وكذلك في حالة رمي زهرة النرد مثلاً إذا كانت الحادثة هي الحصول على عدد زوجي فإن الحصول على الأوجه ٢ ، ٤ ، ٦ حالات مواتية، أو حالات نجاح لحدوث العدد الزوجي في التجربة العشوائية.

(٩ ـ ٤ ـ ٢) الحالات المتماثلة (المتساوية الفرص)

إذا كان عندنا تجربة عشوائية وهي رمي زهرة النرد وكانت هذه الزهرة مصنوعة من مادة متجانسة الكثافة، وكان مكعب الزهرة منتظمًا وكان الرامي غير متحيز في رميته فإن كل الظروف مهيأة للحصول على أي وجه من الستة تماثل الظروف المهيأة لأي وجه آخر. ولذلك تعتبر هذه الحالات متكافئة الفرصة ومتماثلة. وكذلك في حالة رمي قطعة نقود أو سحب كرة من مجموعة كرات متساوية الوزن والحجم في صندوق تكون متساوية الفرصة عندما لا يكون هناك ما يدعو لأن نتوقع حدوث أحدهما دون حدوث أي حادثة أخرى، وتكون المصادفة وحدها هي التي تحدد ذلك.

(٩ ـ ٤ ـ ٣) الحوادث المتنافية

إذا استحال حدوث أي حادثتين معا. فإنه يقال إن هاتين الحادثتين متنافيتان أو مانعتان لبعضهما. ولتوضيح ذلك عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإنه يستحيل ظهور الصورة والكتابة في وقت واحد. فإذا كانت الحادثة **ا** تمثل ظهور الصورة والحادثة **ب** تمثل ظهور الكتابة فإن **ا** $\cap$ **ب** = ϕ .

(٩ ـ ٤ ـ ٤) الحوادث الشاملة

يطلق على مجموعة من الحوادث $ا_١$ ، $ا_٢$، . . . . . ، $ا_ن$ حوادث شاملة عند إجراء تجربة عشوائية معينة، إذا كان لا بد من حدوث أحد هذه الحوادث عند إجراء هذه التجربة. ومثال على ذلك عند رميْ حجر النرد فإن الحصول على الأرقام ١ ، ٢ ، ٣، ٤ ، ٥، ٦ تعتبر حوادث شاملة.

(٩ ـ ٤ ـ ٥) الحوادث المستقلة

إذا كان لدينا حادثتان ا، **ب** وكان حدوث أحدهما لا يؤثر في حدوث الأخرى أو عدم حدوثها فإنه يقال: إن الحادثتين ا، **ب** مستقلتان. فمثلاً عند إلقاء قطعتين من النقود فإن ظهور الصورة للقطعة الأولى لا يؤثر على ظهور الصورة أو عدم ظهورها على القطعة الثانية ويقال: إنهما حادثتان مستقلتان.

فيما يلي نورد بعض الأمثلة على الحوادث:

١) **ا** $\cup$ **ب** تعني حدوث **ا** أو حدوث **ب** أو حدوث كليهما، أو بمعنى آخر حدوث أحدهما على الأقل.

٢) **ا** $\cap$ **ب** تعني حدوث ا و ب معًا.

٣) $\bar{ا}$ عدم حدوث ا.

(٩ ـ ٥) تعريف الاحتمالات

سندرس فيما يلي نوعين من تعاريف الاحتمالات، وهما :

(٩ ـ ٥ ـ ١) التعريف التقليدي للاحتمال

إذا كان لدينا الحادثة ا وهذه الحادثة تحدث بعدد ن (ا) من المرات وكانت ن (**ش**) عدد جميع الحالات الممكنة التي لها نفس الفرصة في الحدوث. فإن احتمال حدوث الحادثة (نجاح حدوثها)، ويرمز له بالرمز ح (ا) يعطي بالعلاقة

$$ح\,(ا) = \frac{ن\,(ا)}{ن\,(\textbf{ش})} \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

ملحوظة :

التعريف التقليدي يصلح فقط عندما تكون نتائج التجربة العشوائية متماثلة أي متساوية الفرصة في الظهور.

مثال (١٠)

رميت زهرة نرد مرة واحدة أوجد احتمال أن يظهر رقم زوجي .

عند إلقاء زهرة النرد مرة واحدة فإن فراغ العينة **ش** يكون

ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، ن (**ش**) = ٦

ونفرض أن الحادثة ا تمثل ظهور رقم زوجي

ا = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ن (ا) = ٣

$$ح\,(ا) = \frac{ن\,(ا)}{ن\,(\textbf{ش})} = \frac{٣}{٦}$$

$$\therefore \quad ح\,(ا) = \frac{١}{٢} = ٠,٥$$

(٩ ـ ٥ ـ ٢) تعريف الاحتمال بالنسبة (أو التجريبي)

إذا ألقينا قطعة نقود ن من المرات، وحصلنا على عدد ى من الصور فإن نسبة ظهور عدد الصور يساوي $\frac{ى}{ن}$.

هذه النسبة من الناحية التجريبية تختلف عن المقدار الثابت $\frac{١}{٢}$ (وهو احتمال ظهور الصورة لقطعة منتظمة غير متحيزة) ولكن كلما زاد عدد الرميات لقطعة النقود أي زادت ن فإن النسبة $\frac{ي}{ن}$ تقترب كثيرًا إلى المقدار $\frac{١}{٢}$ ويمكن القول إن

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{ي}{ن} = \frac{١}{٢} .$$

وهذا هو التعريف التجريبي لاحتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة نقدية. وعلى ذلك يمكن تعريف الاحتمال بالنسبة كما يلي:

«إذا أجريت تجربة مرات متتالية عددها ن وكان عدد المرات التي تظهر فيها حادثة معينة هو ى فإن احتمال وقوع هذه الحادثة يساوي $\lim_{ن \to \infty} \frac{ى}{ن}$ ويسمى المقدار $\frac{ى}{ن}$ التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي».

(٩ ـ ٦) مسلمات الاحتمالات

إذا كانت **ش** فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكانت **ا** و **ب** أي حادثتين من **ش** عندئذ تسمى ح دالة احتمال ويسمى العدد ح (**ا**) احتمال الحادثة **ا** إذا تحققت المسلمات التالية:

(٩ ـ ٦ ـ ١) المسلمة الأولى

لأي حادثة **ا** فإن

$$ح (ا) \geqslant صفر$$

(٩ ـ ٦ ـ ٢) المسلمة الثانية

$$ح (ش) = ١ .$$

(٩ ـ ٦ ـ ٣) المسلمة الثالثة

لأي حادثتين متنافيتين **ا** و **ب** أي أن **ا** $\cap$ **ب** = ϕ فإن:

$$ح (ا \cup ب) = ح (ا) + ح (ب)$$

(٩ - ٦ - ٤) المسلمة الرابعة

إذا كانت $ا_١$، $ا_٢$، . . . متوالية من الحوادث المتنافية ثنائيًا أي أن

$$ا_ر \cap ا_ك = \phi$$

لأي ر $\neq$ ك يكون

$$ح(ا_١ \cup ا_٢ \cup \ldots) = ح(ا_١) + ح(ا_٢) + \ldots$$

وسنستخدم فيما يلي هذه البديهيات الاحتمالية في إثبات بعض النظريات وبعض العلاقات الاحتمالية.

نظريـة (١)

احتمال حدوث الحادثة الخالية ϕ يساوي صفرًا

أي أن:

$$ح(\phi) = صفر$$

البرهــان

الحادثتان الشاملة **ش** والخالية ϕ تحققان التالي:

$$\text{ش} \cap \phi = \phi \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$\text{ش} \cup \phi = \text{ش}$$

$$ح(\text{ش} \cup \phi) = ح(\text{ش}) \quad \ldots\ldots\ldots (٣)$$

من (٢) ينتج أن الحادثتين ش، ϕ متنافيتان وبتطبيق المسلمة الثالثة ينتج

$$ح(\text{ش}) + ح(\phi) = ح(\text{ش})$$

وبالتالي فإن:

$$ح(\phi) = صفر$$

نظريـة (٢)

احتمال حدوث الحادثة **ا** مضافًا إليه احتمال حدوث الحادثة المكملة **ا** يساوي الواحد الصحيح.

أي أن :

$$ح(ا) + ح(\overline{ا}) = ١$$

البرهـــان

الحادثتان ا ، $\overline{ا}$ يحققان التالي

$$ا \cap \overline{ا} = \phi$$

$$ا \cup \overline{ا} = ش \qquad \ldots\ldots\ldots (٤)$$

وفق ذلك نجد :

$$ح(ا \cup \overline{ا}) = ح(ش)$$

وبتطبيق المسلمة الثالثة للطرف الأيمن، والمسلمة الثانية للطرف الأيسر نحصل على

$$ح(ا) + ح(\overline{ا}) = ١$$

مثـال (١١)

إذا كان احتمال نجاح خالد في امتحان مادة الإحصاء التطبيقي $\frac{١}{٣}$ فأوجد احتمال رسوبه في هذا المقرر.

الحـــل

نفرض أن الحادثة ا تمثل نجاح خالد . فتكون الحادثة $\overline{ا}$ تمثل رسوبه .

$$\because ح(ا) = \frac{١}{٣}$$

ويكون المطلوب هو إيجاد ح ($\overline{ا}$)

$$\because ح(ا) + ح(\overline{ا}) = ١$$

هذا يكون على الصورة

$$\frac{١}{٣} + ح(\overline{ا}) = ١$$

ومنه نجد أن

$$ح(\overline{ا}) = \frac{٢}{٣} = ٠,٦٧$$

نظريـة (٣)

لأي حادثتـين ا، **ب** فإن احتمال حدوث **ا** وعدم حدوث **ب** يساوي احتمال حدوث **ا** مطروحا منه احتمال حدوث **ا** و **ب** معًا.

أي أن

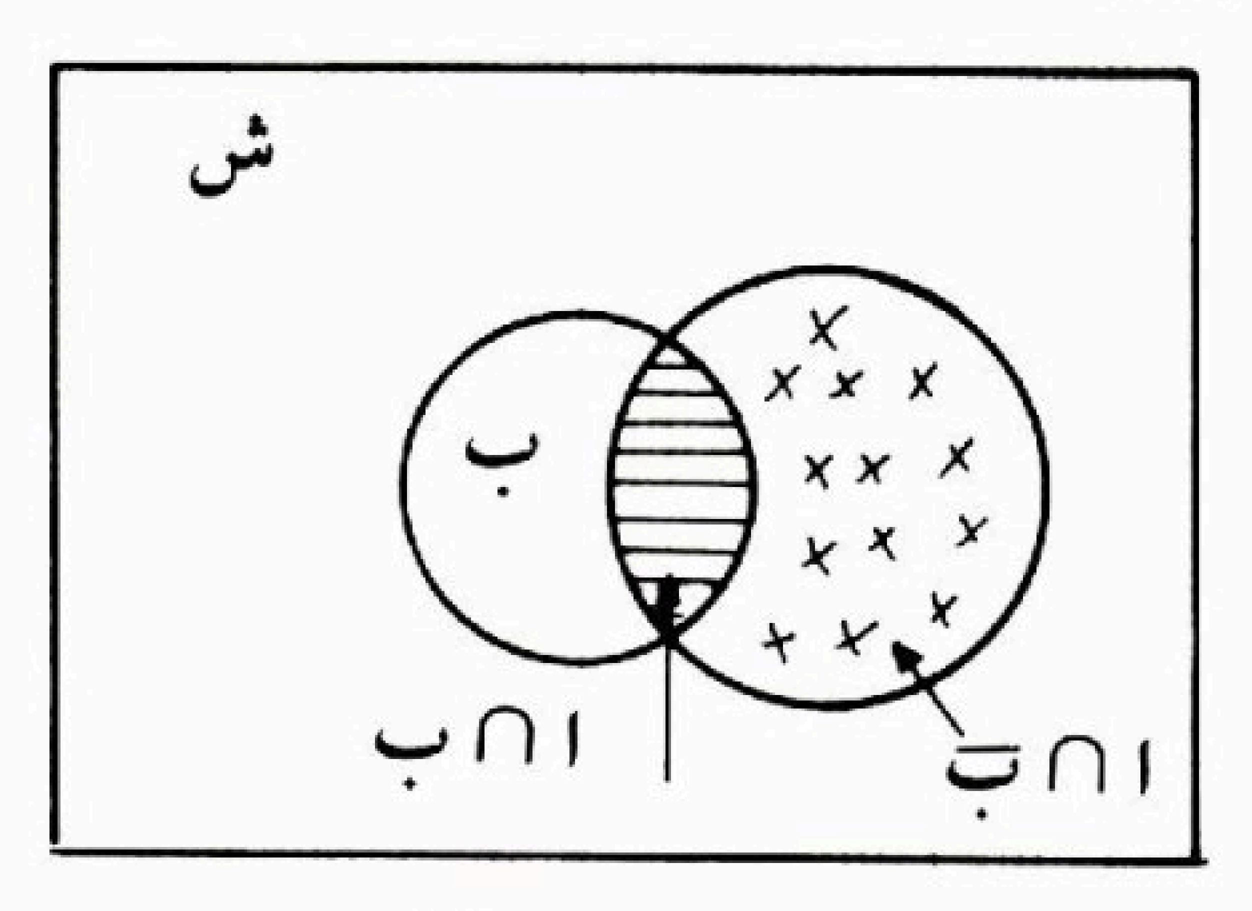
ح (ا ∩ ب̄) = ح (ا) − ح (ا ∩ ب)

البرهـــان

نوضح الحوادث

ا ، ب ، ش

بشكل فن كما هو مبين.



شكل (٩ ـ ١٠): تقاطع واتحاد مجموعتين

الحادثتان ا ∩ ب̄ ، ا ∩ ب متنافيتان كما هو موضح بشكل فن

(ا ∩ ب̄) ∩ (ا ∩ ب) = φ

(ا ∩ ب̄) ∪ (ا ∩ ب) = ا

ح {(ا ∩ ب̄) ∪ (ا ∩ ب)} = ح (ا) .... (٥)

وبتطبيق المسلمة الثالثة على **(٥)** نحصل على

ح (ا ∩ ب̄) + ح (ا ∩ ب) = ح (ا)

ح (ا ∩ ب̄) = ح (ا) − ح (أ ∩ ب)

مثـال (١٢)

إذا كان احتمال نجاح سامي في الامتحان النهائي في مقرر علم الاجتماع الإحصائي هو $\frac{١}{٣}$ واحتمال نجاح صالح وسامي في نفس المقرر هو $\frac{١}{٤}$ فأوجد احتمال نجاح سامي ورسوب صالح .

الحـل

نفرض أن الحادثتان **ا** ، **ب** كالتالي :

ا = { نجاح سامي } ، **ب** = { نجاح صالح }

$$ح\,(ا) = \frac{١}{٣} \quad ، \quad ح\,(ا \cap ب) = \frac{١}{٤}$$

فيكون المطلوب هو إيجاد $ح\,(ا \cap \bar{ب})$

من نظرية (٣)

$$ح\,(ا \cap \bar{ب}) = ح\,(ا) - ح\,(ا \cap ب)$$

وبالتالي يكون :

$$ح\,(ا \cap ب) = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٤ - ٣}{١٢}$$

$$= \frac{١}{١٢} = ٠,٠٨$$

نظريـة (٤)

إذا كانت **ا** ، **ب** حادثتين فإن احتمال حدوث إحداهما على الأقل يساوي احتمال حدوث **ا** مضافًا إليه احتمال حدوث **ب** مطروحًا منهما احتمال حدوث **ا** ، **ب** معًا .

أي أن :

$$ح\,(ا \cup ب) = ح\,(ا) + ح\,(ب) - ح\,(ا \cap ب)$$

البرهــان

الحادثتان ب، ا ∩ $\bar{ب}$ متنافيتان وبالتالي يحققان

$$ب \cap (ا \cap \bar{ب}) = \phi$$

$$ا \cup ب = (ا \cap \bar{ب}) \cup ب$$

أي أن

$$ح\ (ا \cup ب) = ح\ ((ا \cap \bar{ب}) \cup ب) \quad \ldots\ldots\ldots (٦)$$

بتطبيق المسلمة الثالثة على الطرف الأيسر في (٦) نحصل على

$$ح\ (ا \cup ب) = ح\ (ب) + ح\ (ا \cap \bar{ب}) \quad \ldots\ldots\ldots (٧)$$

بتطبيق نظرية (٣) على الطرف الأيسر من (٧) نحصل على

$$ح\ (ا \cup ب) = ح\ (ب) + ح\ (ا) - ح\ (ا \cap ب)$$

مثـال (١٣)

إذا كان احتمال نجاح عمر في مقرر النبات العام هو $\frac{١}{٣}$ واحتمال نجاح عمر وخالد في نفس المقرر هو $\frac{١}{٤}$ واحتمال نجاح أحدهما على الأقل هو $\frac{١}{٢}$ فأوجد احتمال نجاح خالد في ذلك المقرر.

الحـل

نفرض أن الحادثة ا تمثل نجاح عمر والحادثة ب تمثل نجاح خالد

$$ح\ (ا) = \frac{١}{٣} \quad ، \quad ح\ (ا \cap ب) = \frac{١}{٤} \quad ، \quad ح\ (ا \cup ب) = \frac{١}{٢}$$

فيكون المطلوب هو ح (ب)

نعلم أن

$$ح\ (ا \cup ب) = ح\ (ا) + ح\ (ب) - ح\ (ا \cap ب)$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٣} + ح\ (ب) - \frac{١}{٤}$$

وبالتالي يكون :

$$ح\,(ب) = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} = \frac{٦ - ٤ + ٣}{١٢} = \frac{٥}{١٢} = ٠,٤٣$$

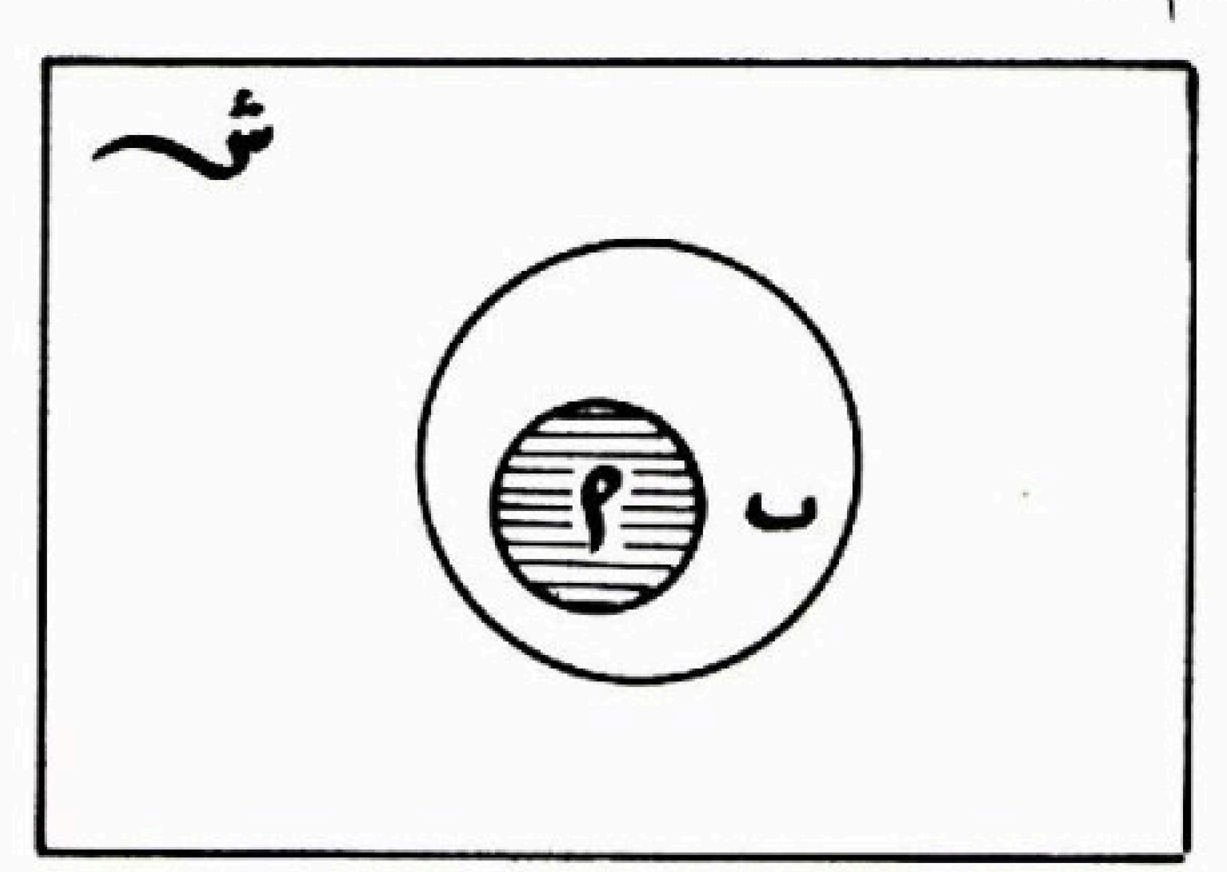
نظريـة (٥)

إذا كانت الحادثة **ا** مجموعة جزئية من الحادثة **ب** فإن احتمال حدوث الحادثة (ا) أقل من أو يساوي احتمال حدوث الحادثة **ب** أي أن ح (ا) $\leqslant$ ح (**ب**).

البرهـــان

نرسم شكل فن كما هو موضح

ونلاحظ من الرسم أن



شكل (٩ ـ ١١): المجموعة الجزئية

ا $\subset$ ب

وأن ا $\cap$ ب = ا

$\therefore$ ح (ب $\cap$ $\overline{ا}$) = ح (**ب**) ـ ح (ا $\cap$ **ب**)

$\therefore$ ح (ب $\cap$ $\overline{ا}$) = ح (**ب**) ـ ح (ا)

ولكن ح (ب $\cap$ $\overline{ا}$) $\leqslant$ صفر

$\therefore$ ح (**ب**) ـ ح (ا) $\leqslant$ صفر

ح (**ب**) $\leqslant$ ح (ا)

مثـال (١٤)

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وكرتين لونهما أبيض، مرقمة من ١ إلى ٥، فأرقام الكرات الحمراء هي ١، ٢، ٣ ورقما الكرتين اللتين لونهما أبيض هما ٤، ٥. سحبت عينة من كرتين واحدة بعد الأخرى بدون إرجاع.

أوجـــد:

أولًا: احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء.

ثانيًا: احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض.

ثالثًا: احتمال أن تكون الكرتان لونهما أحمر.

رابعًا: احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون.

الحـــل

إذا فرضنا أن السحبة الأولى كانت الكرة رقم ١ فيبقى في الصندوق الكرات ذوات الأرقام ٢، ٣، ٤، ٥ وبذلك تكون السحبة الثانية واحدة من الأرقام الباقية السابقة. أما إذا كانت السحبة الأولى الكرة رقم ٢ فتكون السحبة الثانية من الأرقام الباقية ١، ٣، ٤، ٥ وهكذا، ويمكن كتابة فراغ العينة **ش** كالتالي:

ش = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) }

عدد عناصر فراغ العينة هو

ن (**ش**) = ٢٠ عنصرًا

أولًا: نفرض أن ا هي الحادثة بأن تكون الكرة الأولى بيضاء عندئذ يكون:

ا = { (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) }

عدد عناصر الحادثة ا هو

ن (ا) = ٨ عناصر

ح (ا) = $\frac{\text{ن (ا)}}{\text{ن (ش)}}$ = $\frac{٨}{٢٠}$ = $\frac{٢}{٥}$ = ٠,٤

ثانيًا: نفرض أن **ب** هي الحادثة التي يكون فيها لون الكرتين أبيض

ب = { (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) }

ن (**ب**) = ٢ عنصرًا

ح (**ب**) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ش)}}$

= $\frac{٢}{٢٠}$ = $\frac{١}{١٠}$ = ٠,١

ثالثًا: نفرض أن **حـ** هي الحادثة التي يكون فيها لون الكرتين أحمر

حـ = { (١ ، ٢)، (١ ، ٣)، (٢ ، ١)، (٢ ، ٣)، (٣ ، ١)، (٣، ٢) }

ن (**حـ**) = ٦

ح (**حـ**) = $\frac{\text{ن (حـ)}}{\text{ن (ش)}}$

= $\frac{٦}{٢٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣

رابعًا: الكرتان من نفس اللون معناه هو أن الكرتين لونهما أبيض أي أن الحادثة **ب** أو الكرتان لونهما أحمر أي أن الحادثة **حـ**، ولأن ب ، حـ حادثتان متنافيتان فيكون إيجاد المطلوب كما يلي:

ح (ب ∪ حـ) = ح (ب) + ح (حـ)

= ٠,١ + ٠,٣

= ٠,٤

مثـال (١٥)

إذا كانت الحادثتان ا، ب بحيث كان

ح (ا) = ٠,٢ ، ح (ب) = ٠,٤ ، ح (ا ∪ ب) = ٠,٥

أوجـد:

ح (ا ∩ ب) ، ح ($\overline{\text{ا}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$) ، ح ($\overline{\text{ا}}$ ∩ ب)

أولًا: ح (ا ∩ ب) = ح (ا) + ح (ب) − ح (ا ∪ ب)

= ٠,٢ + ٠,٤ − ٠,٥

= ٠,١

ثانيًا: ح (ا ∩ ب) = ح ($\overline{\text{ا ∪ ب}}$)

= ١ − ح (أ ∪ ب)

= ١ − ٠,٥

= ٠,٥

ثالثًا: ح ($\overline{\text{ا}}$ ∩ ب) = ح (ب) − ح (ا ∩ ب)

= ٠,٤ − ٠,١

= ٠,٣

(٩ ـ ٧) الاحتمال الشرطي والاستقلال

(٩ ـ ٧ ـ ١) الاحتمـال الشرطـي

إذا كان لدينا الحادثتان ا، ب فإن احتمال حدوث الحادثة ا إذا علمنا بحدوث الحادثة ب يسمى الاحتمال الشرطي ويرمز له بالرمز ح (ا | ب) ويعطى بالعلاقة الآتية:

ح (ا | ب) = $\dfrac{\text{ح (ا ∩ ب)}}{\text{ح (ب)}}$ . . . . (٨)

ويمكن من تعريف الاحتمال أن تكتب المعادلة (٨) على الصورة التالية:

$$ح(ا|ب) = \frac{\frac{ن(ا \cap ب)}{ن(ش)}}{\frac{ن(ب)}{ن(ش)}} = \frac{ن(ا \cap ب)}{ن(ب)}$$

مثال (١٦)

إذا كان احتمال أن ينجح عمر هو $\frac{١}{٣}$ واحتمال أن ينجح عمر وخالد هو $\frac{١}{٤}$ فأوجد احتمال نجاح خالد إذا علم أن عمر قد نجح.

الحل

نفرض أن الحادثة ا هي نجاح عمر والحادثة ب تمثل نجاح خالد فيكون

$$ح(ا) = \frac{١}{٣} ، ح(ا \cap ب) = \frac{١}{٤}$$

ويكون المطلوب هو إيجاد ح (ب | ا) وهذا الاحتمال الشرطي يعطى بالعلاقة التالية:

$$ح(ب|ا) = \frac{ح(ا \cap ب)}{ح(ا)} = \frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$$

(٩ ـ ٧ ـ ٢) الاستقلال

يقال: إن الحادثتين ا، ب مستقلتان إذا كان حدوث أي منهما لا يؤثر على حدوث الأخرى أي أن الاحتمال الشرطي يساوي الاحتمال غير الشرطي أي أن

$$ح(ا|ب) = ح(ا) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٩)$$

ويمكن وضع هذا الشرط بصورة أخرى إذا ما طبقنا تعريف الاحتمال الشرطي للطرف الأيمن في المعادلة (٩) أي

$$\frac{ح(ا \cap ب)}{ح(ب)} = ح(ا)$$

$\therefore$ ح (ا ∩ ب) = ح (ا) ح (ب) . . . . (١٠)

والتعريف (١٠) يسمى شرط استقلال الحادثتين ا ، ب وتطبق هذه المعادلة (١٠) فقط في حالة استقلال الحادثتين ا ، ب كما أنه إذا تحققت المعادلة (١٠) تكون الحادثتان ا ، ب مستقلتين عن بعضهما.

نلاحظ مما سبق أنه يمكن القول: إن الحادثتين ا، ب مستقلتان إذا تحققت علاقة واحدة فقط من العلاقات التالية:

ح (ا | ب) = ح (ا)

أو ح (ب | ا) = ح (ب)

أو ح (ا ∩ ب) = ح (ا) ح (ب)

ومعنى ذلك أنه إذا طلب منا إثبات استقلال حادثتين فسنكتفي بتوضيح أن إحدى هذه العلاقات الثلاث محققة. وبالتالي فإن العلاقات الثلاث السابقة تكون صحيحة ويمكن استخدام هذه العلاقات إذا لزم الأمر.

مثال (١٧)

إذا كان احتمال نجاح عمر في امتحان قيادة السيارة هو $\frac{١}{٣}$ واحتمال نجاح خالد في نفس الامتحان هو $\frac{٥}{١٢}$ واحتمال نجاحهما معا هو $\frac{١}{٤}$ فهل نجاح عمر مستقل عن نجاح خالد أم لا.

الحل

كما سبق نفرض أولاً أن الحادثتين ا ، ب يمثلان نجاح عمر وخالد على الترتيب فيكون.

ح (ا) = $\frac{١}{٣}$ ، ح (ب) = $\frac{٥}{١٢}$ ، ح (ا ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ ،

وحيث إن

ح (ا) ح (ب) = $\frac{١}{٣} \times \frac{٥}{١٢} = \frac{٥}{٣٦}$

وبما أن

$$\frac{١}{٤} \neq \frac{٥}{٣٦}$$

أي أن

ح (ا ∩ ب) ≠ ح (ا) ح (ب)

∴ الحادثتين ا، **ب** غير مستقلتين أي أن نجاح عمر ليس مستقلاً عن نجاح خالد.

مثـال (١٨)

أثبت أن

ح (ا ∩ **ب**) = ح (**ب** ∩ ا) = ح (ا | **ب**) ح (**ب**) = ح (**ب** | ا) ح (ا)

حيث إن

ا ∩ **ب** = **ب** ∩ ا

∴ ح (ا ∩ **ب**) = ح (**ب** ∩ ا) .... (١)

ح (ا / ب) = $\frac{\text{ح (ا ∩ ب)}}{\text{ح (ب)}}$

أي أن:

ح (ا / ب) ح (**ب**) = ح (ا ∩ ب) .... (٢)

ح (ب / ا) = $\frac{\text{ح (ب ∩ ا)}}{\text{ح (ا)}}$

ح (ب / ا) ح (ا) = ح (**ب** ∩ ا) .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج المطلوب.

مثـال (١٩)

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وكرتين لونهما أبيض أخذت عينة مكونة من كرتين واحدة بعد الأخرى بدون إرجاع. أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض.

الحـــل

نفرض أن الحادثة $ا_١$ هي أن الكرة الأولى بيضاء، الحادثة $ا_٢$ هي أن الكرة الثانية بيضاء ولكي تكون الكرتان لونهما أبيض لابد أن تكون الأولى بيضاء والثانية بيضاء أيضًا.

أي أن المطلوب ح ($ا_١ \cap ا_٢$)

$$ح(ا_١) = \frac{٢}{٥} \quad فيكون\ ح(ا_٢ / ا_١) = \frac{٢ - ١}{٥ - ١} = \frac{١}{٤}$$

ويكون:

$$ح(ا_١ \cap ا_٢) = ح(ا_١)\, ح(ا_٢ / ا_١)$$

$$= \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٢}{٢٠} = \frac{١}{١٠} = ٠,١$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في مثال (١٤) عند كتابة فراغ العينة.

مثـال (٢٠)

بفرض أن ا ، ب حادثتان بحيث ح (ا) = ٠,٥ ، ح ($\bar{ب}$) = ٠,٦٢٥ ، ح (ا $\cup$ ب) = ٠,٧٥

احسب ح (ب) ، ح ($\bar{ا} \cap \bar{ب}$) ، ح (ا / $\bar{ب}$).

الحـــل

لحساب هذه الاحتمالات السابقة نتبع الخطوات التالية:

$$ح(ب) = ١ - ح(\bar{ب})$$

$$= ١ - ٠,٦٢٥$$

$$= ٠,٣٧٥$$

$\because$ ح (ا ∪ ب) = ح (ا) + ح (ب) − ح (ا ∩ ب)

٠,٧٥ = ٠,٥ + ٠,٣٧٥ − ح (ا ∩ ب)

$\therefore$ ح (ا ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٣٧٥ − ٠,٧٥

= ٠,١٢٥

ح ($\bar{ا}$ ∩ $\bar{ب}$) = ح ($\overline{ا ∪ ب}$) = ١ − ح (ا ∪ ب)

= ١ − ٠,٧٥

= ٠,٢٥

ح (ا / $\bar{ب}$) = $\frac{\text{ح (ا ∩ } \bar{\text{ب}}\text{)}}{\text{ح (}\bar{\text{ب}}\text{)}}$

• = $\frac{\text{ح (ا) − ح (ا ∩ ب)}}{\text{ح (}\bar{\text{ب}}\text{)}}$

= $\frac{٠,٥ − ٠,١٢٥}{٠,٦٢٥}$

= $\frac{٠,٣٧٥}{٠,٦٢٥}$

= ٠,٦

(٩ ـ ٨) طــرق العـــد

في هذا الجـزء سوف نتعـرض لطرق جديدة لإيجاد عدد نقاط (عناصر) فراغ العينة، وعدد نقاط الحادثة دون الحاجة لكتابة فراغ العينة أو كتابة الحادثة. وتسمى هذه الطرق طرق العد وتساعدنا في إيجاد قيم الاحتمال بسهولة خاصة في بعض الحالات التي يكـون فيهـا عدد نقاط فراغ العينة كبيراً مما يجعلها عرضة للخطأ أثناء حصرها وكتابتها. وسوف نذكر بعض التعاريف التي سبق للطالب دراستها في المراحل الدراسية السـابقـة، وذلك لمساعدتنا كثيراً في استيعاب هذا الجزء، وهي فكرة مضروب عدد ومفهوم التباديل والتوافيق.

(٩ ـ ٨ ـ ١) مضـــروب العـــدد

يعرف مضروب أي عدد صحيح موجب بأنه حاصل ضرب الرقم ١ في الرقم ٢ إلى أن نصل إلى الرقم نفسه فمثلاً مضروب ن يكتب على الصورة لـن (ويقرأ مضروب ن) يعرّف كما يلي:

لـن = ١ × ٢ × .... × ن

مثـال (٢١)

أوجـد مضـروب ٧ (لـ٧)

لـ٧ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ × ٧ = ٥٠٤٠

(٩ ـ ٨ ـ ٢) التبـاديـــل

إذا كان لدينا ثلاث أحرف أ ب جـ. فإذا أردنا كتابة هذه الأرقام مع إجراء تبديل حرفين فقط فإننا نحصل على التباديل التالية:

أ ب جـ ، أ جـ ب ، جـ أ ب ، جـ ب أ ، ب جـ أ ، ب أ جـ أي نحصل على ٦ حالات

ويكون عدد الطرق ٦ = ٣ × ٢ ويرمز لها بالرمز $^{٣}ل_{٢}$

وبوجه عام فإن $^{ن}ل_{ى}$ يعطي بالعلاقة التالية

$^{ن}ل_{ى}$ = ن (ن − ١) .... (ن − ى + ١) ....(١١)

ويمكن كتابتها باستخدام صفة المضاريب على الصورة التالية:

$$^{ن}ل_{ى} = \frac{لـن}{لـ(ن-ى)} \quad .... (١٢)$$

مثـال (٢٢)

أوجد كل من $^{٥}ل_{٣}$ ، $^{٥}ل_{٢}$

$$^{٥}ل_{٣} = \frac{لـ٥}{لـ(٥-٣)} = \frac{لـ٥}{لـ٢}$$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} = ٦٠$$

$$^{٥}ل_{٢} = \frac{٥!}{(٥-٢)!} = \frac{٥!}{٣!}$$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} = ٢٠$$

(٩ ـ ٨ ـ ٣) التوافيـــق

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار (ى) من الأشياء من بين ن من هذه الأشياء ويرمز لها بالرمز $^{ن}ق_{ى}$ وتعطى بالعلاقة:

$$^{ن}ق_{ى} = \frac{ن!}{ى! \; (ن-ى)!} \qquad \text{.........} \; (١٣)$$

مثـال (٢٣)

أوجـــد $^{٥}ق_{٣}$ ، $^{٤}ق_{٢}$

$$^{٥}ق_{٣} = \frac{٥!}{٣! \; (٥-٣)!} = \frac{٥!}{٣! \; ٢!}$$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{(٣ \times ٢ \times ١)(٢ \times ١)} = ١٠$$

$$^{٤}ق_{٢} = \frac{٤!}{٢! \; (٤-٢)!} = \frac{٤!}{٢! \; ٢!}$$

$$= \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{(٢ \times ١)(٢ \times ١)} = ٦$$

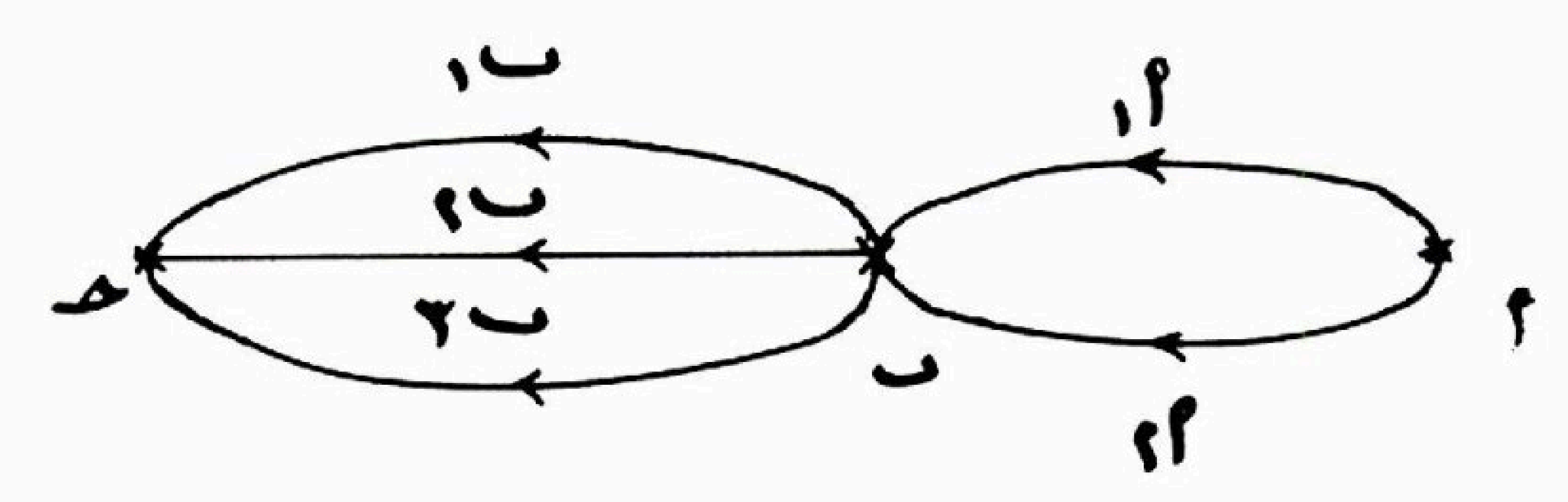
ملاحظــة :

يمكن تقسيم العناصر لفراغ العينة أو الحادثة من حيث الترتيب أو عدم الترتيب إلى نوعين هما ما يسمى العناصر المرتبة، وهي التي فيها العنصر (أ ، ب) مثلاً ليس هو نفس العنصر (ب ، أ) أما في حالة العناصر غير المرتبة فإنه يعتبر العنصر (أ ، ب) هو نفسه العنصر (ب ، أ) وسوف نتناول طرق العد في كل من النوعين كما يلي.

(٩ ـ ٨ ـ ٤) العناصـر المرتبـة

تحدث هذه العناصر عندما يكون السحب بإحلال أو بدون إحلال وقبل التعرض لإيجاد القوانين في كل حالة من الحالات السابقة ندرس المثال التالي:

نفرض أن لدينا ثلاث مدن أ ، ب ، جـ وأنه يوجد طريقان بين أ ، ب هما $ا_١$ ، $ا_٢$ كما هو موضح ويوجد ثلاث طرق بين المدينتين ب ، جـ، هم $ب_١$ ، $ب_٢$ ، $ب_٣$.



شكل (٩ ـ ١٢): طرق الإنتقال من أ إلى جـ

فإذا قام شخص ما من المدينة أ ليصل إلى المدينة جـ مارا بالمدينة ب فإن عدد الطرق الممكنة هي :

$$ا_١ ب_١ ، ا_١ ب_٢ ، ا_١ ب_٣ ، ا_٢ ب_١ ، ا_٢ ب_٢ ، ا_٢ ب_٣$$

نلاحظ في هذا المثال أن عدد الطرق الممكنة هي ٦ = ٢ × ٣ ومعنى ذلك إذا كان لدينا عملية تتم على مرحلتين الأولى تتم بعدد $ن_١$ والثانية تتم بعدد $ن_٢$ فإن عدد الطرق التي

تتم بها العملية = $ن_{١} \times ن_{٢}$ ، وبوجه عام إذا كان لدينا عملية تتم بعدد ى من المراحل وعدد الطرق لهذه المراحل هي $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ ، . . . . . . $ن_{ى}$ فإن:

عدد الطرق كلها = $ن_{١} \times ن_{٢} \times \ldots \times ن_{ى}$ . . . . (١٤)

وهـذه العلاقة (١٤) سوف تساعدنا في طرق العد لهذا النوع من العناصر (وتسمى بقاعدة الضرب).

السحب بإحلال (أو إرجاع)

إذا كان لدينا عدد ن من العناصر ثم تم السحب بإحلال (أو إرجاع) لعدد ى من العناصر. فبالنسبة للعنصر الأول يمكن أن يتم السحب بطرق عددها ن وكذلك بالنسبة للعنصر الثاني يمكن أن يتم السحب بطرق عددها ن أيضًا وهكذا، وبذلك يكون عدد طرق سحب ى من العناصر هو

عدد طرق سحب ى عنصر بإحلال من ن عنصرا = ن × ن . . . × ن = $ن^{ى}$

مثـال (٢٤)

يحتوي صندوق على ٤ كرات مرقمة بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣، ٤ سحبت عينة بإرجاع مكونة من كرتين واحدة بعد الأخرى. أوجد عدد عناصر فراغ العينة بكتابة فراغ العينة وكذلك باستخدام طرق العد.

الحـــل

أولاً: بكتابة فراغ العينة يكون كالتالي

ش = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤)
(٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤)
(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤)
(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

ويكون عدد العناصر ن (**ش**) = ١٦ عنصرًا.

ثانيًا: باستخدام طرق العد

عدد الطرق الممكنة = ن ^ى^ = ٤^٢^ = ١٦

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في «أولًا» دون كتابة فراغ العينة

إذا كان السحب بدون إحلال (بدون إرجاع)

نفرض أن لدينا عددًا ن من العناصر، وتم السحب منه لعدد ى من العناصر بدون إحلال (بدون إرجاع) ففي هذه الحالة يتم السحب بالنسبة للعنصر الأول بطرق عددها ن طريقة، وبالنسبة للعنصر الثاني بطرق عددها (ن – ١) طريقة وهكذا وبذلك يكون عدد طرق سحب ى عنصرًا من ن عنصرًا هو

عدد الطرق الممكنة = ن (ن – ١) (ن – ٢) . . . (ن – ى + ١)

$$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ى}} = {}^{ن}ل_{ى}$$

مثال (٢٥)

أوجد عدد عناصر فراغ العينة في مثال (٢٤) السابق إذا كان السحب بدون إحلال بطريقتين: الأولى كتابة فراغ العينة، والثانية بطرق العد.

الحل

أولا: بكتابة فراغ العينة **ش** يكون لدينا

ش = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤)
(٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤)
(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤)
(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) }

ويكون عدد العناصر ن (**ش**) = ١٢ عنصرًا.

ثانيًا: باستخدام طرق العد

عدد الطرق الممكنة $= {}^{4}\text{ل}_{2} = \frac{\underline{|4}}{\underline{|4-2}} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$

وهي نفس النتيجة بكتابة فراغ العينة.

(٩ ـ ٨ ـ ٥) العينات غير المرتبة

في هذه الحالة يكون عدد الطرق

$${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ى}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ى}}\ \underline{|\text{ن}-\text{ى}}}$$

مثال (٢٦)

أوجد عدد العناصر لفراغ العينة في مثال (٢٤) إذا كانت العناصر المسحوبة غير مرتبة بطريقتين، الأولى كتابة فراغ العينة، والثانية باستخدام طرق العد

الحل

أولًا: بكتابة فراغ العينة

ش = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤) }

ن (**ش**) = ٦

ثانيًا: باستخدام طرق العد

ن (**ش**) $= {}^{4}\text{ق}_{2} = \frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\ \underline{|4-2}} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 6$

وهي نفس القيمة السابقة بكتابة فراغ العينة.

(٩ ـ ٨ ـ ٦) أمثلـة متنوعـة

مثـال (٢٧)

أثبت أن :

ح (ا ∩ ب ∩ حـ) = ح (ا) ح (ب / ا) ح (حـ / ا ∩ ب)

بشكل عام عند إثبات أن الطرفان متساويان إما أن تجري العمليات الرياضية على الطرف الأيمن حتى نحصل منه على الطرف الأيسر، وإما أن تجري العمليات الرياضية على الطرف الأيسر حتى نحصل على الطرف الأيمن، وإما أن تجري بعض العمليات الرياضية على كل من الطرفين حتى نحصل على قيمة معينة لكل منهما، ففي هذا المثال نجري التعويض في الطرف الأيسر لنحصل على الطرف الأيمن كالتالي

الطرف الأيسر = ح (ا) ح (ب / ا) ح (حـ / ا ∩ ب)

= خ (ا) [ح (ا ∩ ب) / ح (ا)] [ح (ا ∩ ب ∩ حـ) / ح (ا ∩ ب)]

= ح (ا ∩ ب ∩ حـ)

= الطرف الأيمن

وهو المطلوب

مثـال (٢٨)

سلة بها ٤ برتقالات، و ٦ تفاحات أخذت عينة مكونة من ثلاث حبات فاكهة

ا) إذا كان السحب بإرجاع فأوجد احتمال أن تكون العينة برتقالاً .

ب) إذا كان السحب بدون إرجاع فأوجد احتمال أن تكون العينة برتقالاً .

جـ) إذا كانت العينة غير مرتبة فأوجد احتمال أن تكون العينة برتقالاً .

الحـــل

نفرض أن ا الحادثة العينة كلها برتقال

أ) السحـــب بإرجـــاع

$$ح(ا) = \frac{٤}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = ٠,٠٦٤$$

ب) السحـب بدون إرجـــاع

$$ح(ا) = \frac{٤}{١٠} \times \frac{٣}{٩} \times \frac{٢}{٨} = ٠,٠٣٣$$

جـ) السحـب بعينـة غيـر مرتبـة

$$ح(ا) = \frac{{}^{٤}ق_{٣}}{{}^{١٠}ق_{٣}} = ٠,٠٣٣$$

(٩ ـ ٩) نظريـــة بيـــز

نفرض أن لدينا مجموعة من الحوادث الشاملة $ا_١$ ، $ا_٢$ ، . . . . ، $ا_ن$

أي أن $ا_١ \cup ا_٢ \ldots\ldots\ldots\ldots \cup ا_ن =$ **ش**

ولأي ل $\neq$ م فإن

$ا_ل \cap ا_م = \phi$ حيث ل، م = ١ ، ٢ ، . . . ، ن

وإذا كانت الحادثة **ب** معرفة على نفس فراغ العينة **ش** وجميع الاحتمالات الشرطية ح (**ب** / $ا_م$) حيث م = ١ ، ٢ ، . . . ، ن معلومة.

فإن ح ($ا_م$ / **ب**) يعطى بالعلاقة

$$ح(ا_م / ب) = \frac{ح(ب / ا_م)\, ح(ا_م)}{\sum_{ل=١}^{ن} ح(ب / ا_ل)\, ح(ا_ل)}$$

البرهـــان

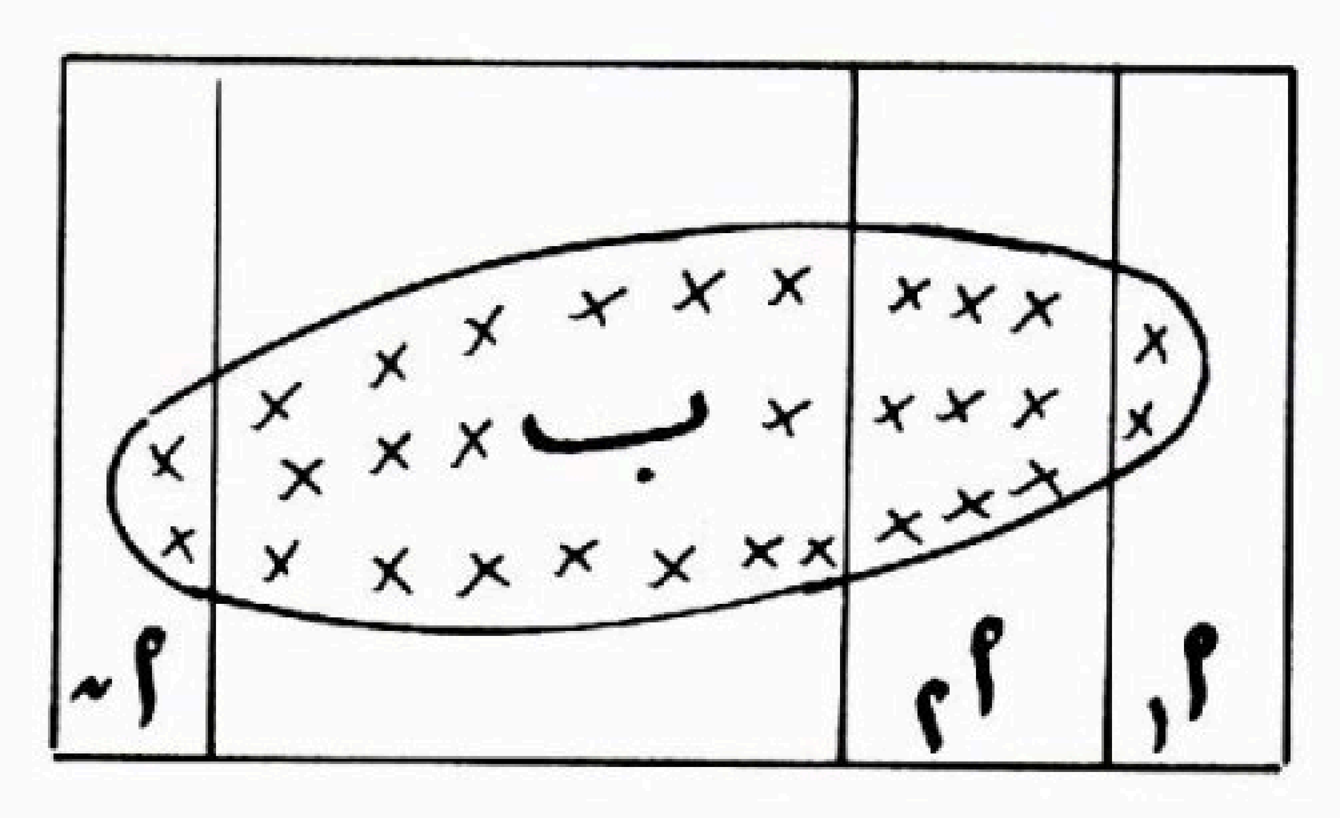
نرسم شكل فن كالتالي

وحيث إن

$$ح\,(ا_م / ب) = \frac{ح\,(ا_م \cap ب)}{ح\,(ب)}$$

$$ح\,(ا_م / ب) = \frac{ح\,(ب / ا_م)\,ح\,(ا_م)}{ح\,(ب)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٥)$$

$$\because\ ا_١ \cup ا_٢ \ldots\ldots\ldots\ldots \cup ا_ن = ش$$



شكل (٩ ـ ١٣): تجزيء المجموعة

$$ب \cap (ا_١ \cup ا_٢ \ldots\ldots \cup ا_ن) = ب \cap ش$$

$$(ب \cap ا_١) \cup (ب \cap ا_٢) \ldots\ldots \cup (ب \cap ا_ن) = ب$$

$$ح\,((ب \cap أ_١) \cup (ب \cap ا_٢) \ldots\ldots \cup (ب \cap ا_ن)) = ح\,(ب)$$

$$ح\,(ا_١ \cap ب) + ح\,(ا_٢ \cap ب) + \ldots\ldots + ح\,(ا_ن \cap ب) = ح\,(ب)$$

$$\sum_{ل=١}^{ن} ح\,(ب / ا_ل)\,ح\,(ا_ل) = ح\,(ب) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٦)$$

من (١٥) ، (١٦) ينتج أن

$$ح\,(ا_م / ب) = \frac{ح\,(ب / ا_م)\,ح\,(ا_م)}{\sum_{ل=١}^{ن} ح\,(ب / ا_ل)\,ح\,(ا_ل)}$$

وهـو المطلـوب

مثـال (٢٩)

صندوقان الأول به ٤ تفاحات و ٦ برتقالات، والصندوق الثاني به ٨ تفاحات و ٣ برتقالات. اختير أحد الصناديق عشوائيًا، واختيرت منه ثمرة بطريقة عشوائية أوجد:

ا) احتمال أن تكون الثمرة المسحوبة برتقالة.

ب) إذا اختيرت الثمرة ووجدت أنها برتقالة ما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني.

الحــل

نفرض أن الحادثة $أ_١$ تمثل سحب الثمرة من الصندوق الأول، الحادثة $أ_٢$ تمثل سحب الثمرة من الصندوق الثاني ويكون $ح(أ_١) = ح(أ_٢) = \frac{١}{٢}$

نفرض أن ب تمثل الحادثة بأن الثمرة المسحوبة برتقالة

$\therefore ح(ب / أ_١) = \frac{٦}{١٠}$ ، $ح(ب / أ_٢) = \frac{٣}{١١}$

$\because ح(ب) = ح(ب / أ_١)\, ح(أ_١) + ح(ب / أ_٢) \cdot ح(أ_٢)$

$$= \frac{٦}{١٠} \times \frac{١}{٢} + \frac{٣}{١١} \times \frac{١}{٢}$$

$$= ٠,٣ + ٠,١٣٦$$

$$= ٠,٤٣٦$$

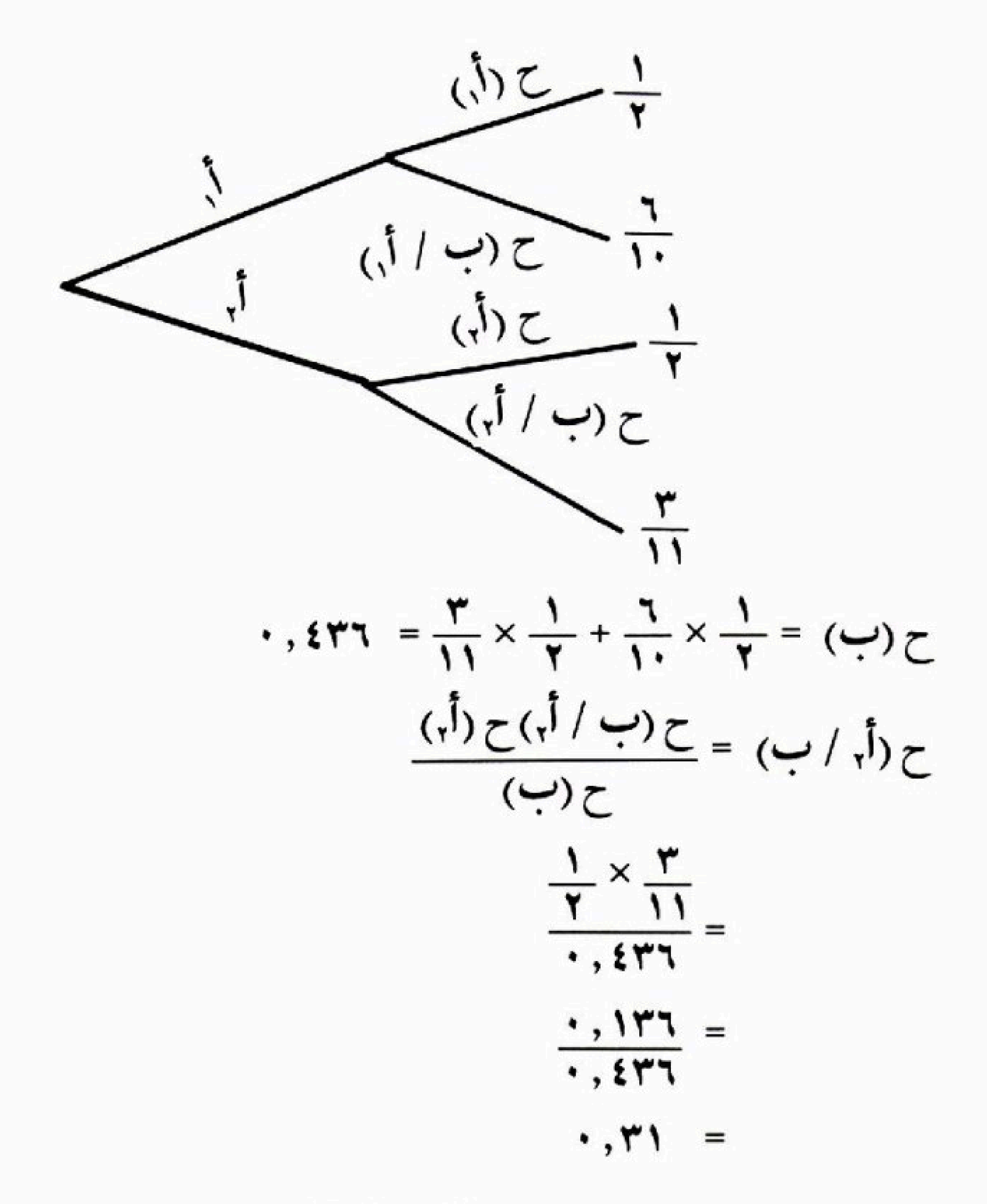
المطلوب الثاني هو إيجاد $ح(أ_٢ / ب)$ فيكون حسب نظرية بيز كالتالي

$$ح(أ_٢ / ب) = \frac{ح(ب / أ_٢)\, ح(أ_٢)}{ح(ب)}$$

$$= \frac{\frac{٣}{١١} \times \frac{١}{٢}}{٠,٤٣٦}$$

$$= \frac{٠,١٣٦}{٠,٤٣٦} = ٠,٣١$$

ويمكن إيجاد الحل باستخدام الشجرة البيانية كالتالي



$$ح\,(ب) = \frac{١}{٢} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{١١} = ٠,٤٣٦$$

$$ح\,(أ_٢ / ب) = \frac{ح\,(ب / أ_٢)\,ح\,(أ_٢)}{ح\,(ب)}$$

$$= \frac{\frac{٣}{١١} \times \frac{١}{٢}}{٠,٤٣٦}$$

$$= \frac{٠,١٣٦}{٠,٤٣٦}$$

$$= ٠,٣١$$

(٩ ـ ١٠) تمارين

١ ـ اكتب عناصر المجموعات التالية

ا) مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.

ب) مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة التي تقل عن ٢٠ .

جـ) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن ٢٠ ، وتقبل القسمة على ٣.

د) مجموعة الأعداد الفردية.

٢ ـ اكتب عناصر المجموعات التالية

ا = { س : س عدد صحيح يحقق ١٤ $\geqslant$ س $\geqslant$ ٩ }

ب = { س : س تعطى بالعلاقة س = $\text{ن}^{٢}$ + ١ ، ن = ١ ، ٢ ، . . . }

جـ = { ص : ص تعطى بالعلاقة ص = ٢ن + ٣ ، ن = ١، ٢، . . . }

٣ ـ اكتب جميع المجموعات الجزئية لكل من المجموعات التالية

ش = { س ، ص ، ع }

ا = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ }

٤ ـ إذا كانت المجموعات **ش** ، **ا** ، **ب** ، **جـ** كالتالي

ش = { ٢ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ }

ا = { ٦ ، ٧ ، ١٠ }

ب = { ٢ ، ١٠ ، ١٣ }

جـ = { ٢ ، ٧ ، ١٣ ، ١٤ }

فأوجـــد :

$\overline{\text{ا}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ ، ا $\cup$ ب، ا $\cap$ ب، ($\overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$)، $\overline{(\text{ا} \cap \text{ب})}$، $\overline{(\text{ا} \cup \text{ب})}$، ($\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$)،
أ $\cap$ (ب $\cup$ جـ)، (أ $\cup$ ب) $\cap$ جـ، أ $\cap$ ب $\cap$ $\overline{\text{جـ}}$، (أ $\cap$ $\overline{\text{ب}}$ $\cap$ $\overline{\text{جـ}}$)،
($\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}} \cap \overline{\text{جـ}}$)، (أ $\cup$ ب $\cup$ $\overline{\text{جـ}}$)

٥ ـ صندوق به ١٠ كرات حمراء، و ٨ كرات بيضاء، و ٧ كرات زرقاء سحبت منه عشوائيا كرة واحدة اوجد احتمال أن تكون الكرة :

ا) حمراء — د) حمراء أو بيضاء

ب) ليست زرقاء — هـ) بيضـــــاء

جـ) ليست حمراء ولا زرقاء

٦ ـ سُحبت كرتان عشوائيا من صندوق في المسألة (٥) اوجـــد

ا) احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض

ب) احتمال أن تكون الكرتان لونهما أحمر

جـ) احتمال أن تكون الكرتان أحمر أو أبيض

د) احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية زرقاء

٧ ـ ألقيت زهرتا نرد متوازنتين مرة واحدة اوجد احتمال ظهور مجموع الرقمين

ا) أكبر من أو يساوي ٨

ب) أكبر من ٩

جـ) زوجي أكبر من ٦

٨ ـ إذا علم أن

ح (أ ∪ ب) = ٠,٦٥ ، ح (ب) = ٠,٣ ، ح (أ) = ٠,٥

اوجـــد

ا) ح ($\overline{\text{أ}}$)، ح ($\overline{\text{ب}}$)، ح (أ ∩ ب)، ح ($\overline{\text{أ}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$)

ب) هل الحادثتان أ ، ب مستقلتان

٩ ـ إذا علم أن احتمال أن يكون الجو ملبدًا بالغيوم هو ٠,٣ واحتمال أن يكون الجو عاصفًا هو ٠,٥٢ واحتمال أن يكون الجو إما ملبدًا بالغيوم وإما عاصفًا هو ٠,٥٨ فأوجد احتمال الحوادث التالية :

ا) أن يكون الجو ملبدًا بالغيوم وعاصفًا .

ب) أن يكون ملبدًا بالغيوم وغير عاصف .

جـ) أن يكون الجو غير ملبد بالغيوم وغير عاصف .

١٠ـ إذا كان احتمال نجاح أحد الطلبة في مادة الرياضيات هو $\frac{١}{٣}$ ، واحتمال نجاحه في مادة الإحصاء هو $\frac{١}{٢}$ ، واحتمال نجاحه في الإحصاء والرياضيات هو $\frac{١}{١٢}$ فأوجـــد

ا) احتمال نجاح الطالب في مادة على الأقل .

ب) احتمال نجاحه في الإحصاء إذا علم أنه نجح في الرياضيات .

جـ) احتمال رسوبه في الإحصاء إذا علم أنه نجح في الرياضيات .

د) هل نجاحه في الإحصاء مستقل عن نجاحه في الرياضيات؟

١١ـ سلة بها ٢٠ برتقالة ، و ٣٠ تفاحة سحبت عينة مكونة من ثلاث ثمرات

ا) إذا كان السحب بدون إرجاع فأوجد احتمال أن تكون العينة المسحوبة برتقالاً .

ب) إذا كان السحب بإرجاع فأوجد احتمال أن تكون العينة إما برتقالاً أو تفاحًا

جـ) اوجد احتمال أن تكون العينة من نفس النوع في كل من حالتي السحب بإرجاع أو بدون إرجاع.

١٢ـ أسرة مكونة من أربعة أبناء بفرض كون المولود البنت مستقلاً عن كون المولود ابنًا، ومساويًا له في الاحتمال.

اوجد ما يلي:

ا) احتمال أن تحتوي الأسرة على ثلاثة أولاد وبنت واحدة

ب) احتمال أن تحتوي الأسرة على ٤ أولاد

جـ) احتمال أن تحتوي الأسرة على ولد واحد على الأقل

د) احتمال أن تحتوي الأسرة على ولدين وبنتين

١٣ـ مصنع ينتج ثلاثة أصناف من مصابيح الكهرباء بنسب ٤٠٪، ٥٠٪، ١٠٪ وكانت نسبة التكاليف في الإنتاج هي ٣٪، ٢٪، ١٪ على الترتيب، أختير أحد أصناف الإنتاج واختير منه مصباح

اوجـــد:

ا) احتمال أن المصباح تالفًا.

ب) إذا كان المصباح تالفًا فأوجد احتمال أن يكون من الصنف الأول.

١٤ـ إذا كان احتمال أن يصيب ابراهيم هدفًا ما هو $\frac{١}{٣}$ ، واحتمال أن يصيب محمود الهدف هو $\frac{١}{٤}$. أوجد احتمال أن يصيب واحد منهم على الأقل الهدف.

١٥ـ إذا كان ش فضاء عينة و أ و ب و جـ حوادث في فضاء العينة بحيث إن

ش = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢)

ا = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

ب = (٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧)

جـ = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١)

أوجد احتمالات الحوادث التالية

$\text{ا} \cap \overline{\text{ب}} \cap \overline{\text{جـ}}$ ، $\overline{\text{ا} \cap \text{ب}}$ ، $\overline{\text{ا} \cap \text{ب} \cap \text{جـ}}$ ، $\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}$

$أ \cap ب \cap جـ$ ، $أ \cap ب$

١٦- إذا كانت ب و جـ حادثتين وكان

ح (ب / جـ) = $\frac{١}{٤}$، ح (جـ / ب) = $\frac{١}{٢}$

ح (جـ) = $\frac{١}{٤}$

وضح أي الجمل تكون صحيحة وأيها تكون خطأ مع ذكر السبب في كل مرة عندما يكون

ب و جـ حادثتان متنافيتان.

ب و جـ حادثتان مستقلتان.

ح (ب $\cup$ جـ) = $\frac{١}{٢}$

١٧- سحبت عينة مكونة من ٣ مصابيح من إنتاج مصنع للمصابيح الكهربية فإذا رمز للمصباح المعيب بالرمز م وللمصباح السليم بالرمز س.

أوجد عناصر الحوادث التالية واحتمال كل منها

ا) فضـــاء العينـــة

ب) الحادث أ = { العينة كلها معيبة } .

جـ) الحادثة ب = { مصباح على الأقل معيب } .

د) الحادثة جـ = { مصباح على الأكثر معيب } .

هـ) $أ \cap ب$ ، $جـ \cup ب$ ، $\bar{ب} \cap جـ$.

١٨- يقوم أحمد وصالح وعلي بطباعة التقارير في إحدى الشركات الوطنية، والجدول التـالي يبـين النسب التي يقـوم كل منهم بطباعتها من التقارير والنسب المئوية للأخطاء التي يرتكبها فيما يطبعه.

النسب المئوية للتقارير التي قام بها ثلاثة أشخاص ونسب أخطائهم

الطابع / النسبة	أحمد	صالح	علي
النسبة المئوية من التقارير	٪٤٠	٪٢٥	٪٣٥
النسبة المئوية للأخطاء	٪٣	٪٥	٪٨

سحبت ورقة عشوائيا من تقارير الشركة.

أ) اوجد احتمال أن يوجد بالورقة خطأ مطبعي.

ب) إذا وجدت بالورقة خطأ مطبعيًا فما احتمال أن يكون قد طبعها صالحًا؟

الفصل العاشر

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

(١٠ - ١) مقدمة

لقد سبق لنا في الفصول السابقة دراسة فراغ العينة، وكيفية إيجاد عناصره. وكذلك دراسة الحوادث واحتمالات هذه الحوادث، وفي هذا الفصل سندرس أحد المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمال وهو ما يسمى المتغير العشوائي، واحتمالات حدوث قيمه. وكيفية إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية المناظرة لها.

(١٠ - ٢) المتغير العشوائي المتقطع

يعرَّف المتغير العشوائي بصفة عامة بأنه دالة (تقابل) تعرَّف على فراغ العينة **ش**. وتكون قيم المتغير العشوائي (أو المجال المقابل له) **س (ش)** عبارة عن مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية. فإذا كان المجال المقابل منتهيًا أو غير منتهٍ وقابلاً للعد فإن المتغير في هذه الحالة يسمى المتغير العشوائي المتقطع أو الوثاب.

ومن أمثلة المتغيرات المتقطعة عدد وحدات العينة في إنتاج إحدى الآلات، عدد الحوادث المرورية في مدينة ما خلال شهر، عدد الركاب الذين يصلون إلى محطة الحافلات خلال ساعة من الزمن، عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقود ن من المرات وهكذا. . .

وعادة يرمز للمتغير العشوائي بالرمز **س** والقيم التي يأخذها هذا المتغير بالرموز

$س_١$ ، $س_٢$ ، ....، $س_ر$ ، ....

حيث $س_١ \leqslant س_٢ \leqslant .... \leqslant س_ر \leqslant ....$

والاحتمالات ح (**س** = $س_١$) ، ح (**س** = $س_٢$) ....

وأحيانًا تكتب ح ($س_١$) ، ح ($س_٢$) ، ....

وتسمى دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع.

وهي تحقق الخاصيتين التاليتين معا.

١ ـ جميع قيمها موجبة أو تساوي الصفر أي ح (س) $\geqslant$ صفر.

٢ ـ مجموع الاحتمالات لجميع قيم المتغير العشوائي تساوي ١

$$\text{أي} \qquad \sum_{ر=١}^{ن} ح(س_ر) = ١$$

وسوف نوضح كيفية إيجاد قيم المتغير العشوائي المتقطع ودالة التوزيع الاحتمالي له بالأمثلة التالية.

مثال (١)

إذا ألقيت قطعة عملة متزنة مرتين متتاليتين، وكان المتغير العشوائي **س** عبارة عن عدد الصور التي تظهر، فأوجد قيم هذا المتغير العشوائي ودالة التوزيع الاحتمالي له.

فراغ العينة **ش** الناتج من إلقاء قطعة العملة مرتين يكون كالتالي:

ش = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

المتغير **س** = عدد الصور، فيكون قيم **س** لكل عنصر من عناصر فراغ العينة **ش** كالتالي:

س = ٢ للعنصر (ص ، ص)

س = ١ للعنصر (ص ، ك)

س = ١ للعنصر (ك ، ص)

س = صفر للعنصر (ك ، ك)

أي أن قيم المتغير العشوائي $س_١ \leqq س_٢ \leqq س_٣$ هي صفر ، ١ ، ٢

ويمكن التعبير عن قيم المتغير العشوائي من الجدول التالي:

ش	(ص ، ص)	(ص ، ك)	(ك ، ص)	(ك ، ك)
س	٢	١	١	صفر

أي أن **س (ش)** = { صفر ، ١ ، ٢ } المجال المقابل للمتغير العشوائي وتكون قيم دالـة التوزيع الاحتمالي لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي، بالرجوع إلى فراغ العينة كالتالي:

ح (صفر) = ح (**س** = صفر) = ح [(ك ، ك)] = $\frac{١}{٤}$

ح (١) = ح (**س** = ١) = ح [(ص ، ك) ، (ك ، ص)] = $\frac{٢}{٤}$

ح (٢) = ح (**س** = ٢) = ح [(ص ، ص)] = $\frac{١}{٤}$

ويمكن وضع قيم دالـة التوزيع الاحتمالي أو بعبارة أخرى القيم الممكنة للمتغير العشوائي والاحتمالات المناظرة لها في الجدول التالي:

س	صفر	١	٢
ح (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

مثال (٢)

إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة وكان المتغير العشوائي **س** يمثل قيمة الرقم الذي يظهر على الوجه الأعلى فأوجد المجال المقابل للمتغير العشوائي وكذلك دالة توزيعه الاحتمالي.

المجال المقابل **س (ش)** = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي نلخص قيمها في الجدول التالي :

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ح (س)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

مثـال (٣)

إذا أُلْقِيَ حجرا نردٍ مرة واحدة وكان المتغير العشوائي **س** يمثل مجموع رقمي الوجهين اللذين يظهران إلى أعلى فأوجد المجال المقابل لهذا المتغير العشوائي ، وكذلك دالة توزيعه الاحتمالي .

عند إلقاء حَجَرْي نردٍ يكون فراغ العينة باستخدام شبكة التربيع كالتالي :

الحجر الثاني \ الحجر الأول	١	٢	٣	٤	٥	٦
٦	٦ , ١	٦ , ٢	٦ , ٣	٦ , ٤	٦ , ٥	٦ , ٦
٥	٥ , ١	٥ , ٢	٥ , ٣	٥ , ٤	٥ , ٥	٥ , ٦
٤	٤ , ١	٤ , ٢	٤ , ٣	٤ , ٤	٤ , ٥	٤ , ٦
٣	٣ , ١	٣ , ٢	٣ , ٣	٣ , ٤	٣ , ٥	٣ , ٦
٢	٢ , ١	٢ , ٢	٢ , ٣	٢ , ٤	٢ , ٥	٢ , ٦
١	١ , ١	١ , ٢	١ , ٣	١ , ٤	١ , ٥	١ , ٦

المجال المقابل للمتغير العشوائي **س (ش)** يكون كالتالي :

س (ش) = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

ودالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي يمكن تلخيص قيمها بالجدول التالي :

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ح (س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

(١٠ - ٢ - ١) التوقع والتباين

إذا كان لدينا متغير عشوائي **س** يأخذ القيم التالية:

$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، \ldots\ldots ، س_{ن}$$

وكانت قيم دالة التوزيع الاحتمالي لهذه القيم هي

$$ح (س_{١}) ، ح (س_{٢}) ، \ldots\ldots ، ح (س_{ن}) \text{ على الترتيب}$$

فإن التوقع للمتغير العشوائي **س** ويرمز له بالرمز تو (**س**) ويقرأ توقع **س** يعطى كالتالي:

$$تو (\textbf{س}) = س_{١} ح (س_{١}) + س_{٢} ح (س_{٢}) + \ldots + س_{ن} ح (س_{ن})$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} س_{ر} \; ح (س_{ر}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

أما تباين المتغير العشوائي **س** ويرمز له بالرمز تبا (**س**) ويقرأ تباين **س** يعطى كالتالي:

$$تبا (\textbf{س}) = [س_{١} - تو(س_{١})]^{٢} ح (س_{١}) + \ldots + [س_{ن} - تو(س_{ن})]^{٢} ح (س_{ن})$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} [س_{ر} - تو(س_{ر})]^{٢} ح (س_{ر}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

ويمكن تبسيط (٢) لتصبح في الصورة التالية:

$$تبا = \sum_{ر=١}^{ن} س_{ر}^{٢} \; ح (\textbf{س}_{ر}) - (تو)^{٢} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

والجذر التربيعي للتباين يسمى الانحراف المعياري، ونرمز له بالرمز نحر

مثال (٤)

أوجد التوقع (تو) والتباين (تبا)، والانحراف المعياري (نحر) للمتغير العشوائي **س** في مثال (١) السابق

يمكن تلخيص خطوات الحل كما في الجدول التالي:

س	صفر	١	٢
$س^٢$	صفر	١	٤
ح (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

$$تو = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر ح(س_ر)$$

$$= صفر \times \frac{١}{٤} + ١ \times \frac{١}{٢} + ٢ \times \frac{١}{٤}$$

$$= ١$$

$$تبا = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ ح(س_ر) - (تو)^٢$$

نجد أولا:

$$\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ ح(س_ر) = (صفر)^٢ \times \frac{١}{٤} + (١)^٢ \times \frac{١}{٢} + (٢)^٢ \times \frac{١}{٤}$$

$$= ١,٥$$

بالتعويض بهذه القيمة يكون لدينا

$$تبا = ١,٥ - (١)^٢$$

$$= ٠,٥$$

ومن ذلك نجد أن

$$نحر = \sqrt{٠,٥} = ٠,٧١$$

مثال (٥)

أوجد التوقع (تو) والتباين (تبا) والانحراف المعياري (نحر) للمتغير العشوائي س في مثال (٣) السابق

نلخص الحل في الجدول التالي:

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
$س^٢$	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	١٢١	١٤٤
ح (س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

نعلم أن:

$$تو = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \ ح(س_ر)$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٣٦} + ٣ \times \frac{٢}{٣٦} + \ldots + ١٢ \times \frac{١}{٣٦}$$

$$= ٧$$

أما التباين فهو:

$$تبا = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \ ح(س_ر) - تو^٢$$

نحسب أولا المقدار

$$\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \ ح(س_ر) = ٤ \times \frac{١}{٣٦} + ٩ \times \frac{٢}{٣٦} + \ldots + ١٤٤ \times \frac{١}{٣٦}$$

$$= ٥٤,٨٣$$

ومن ذلك نجد أن:

$$تبا = ٥٤,٨٣ - ٤٩ = ٥,٨٣$$

أي أن:

$$نحر = \sqrt{٥,٨٣} = ٢,٤١$$

(١٠ ـ ٣) المتغير العشوائي المتصل

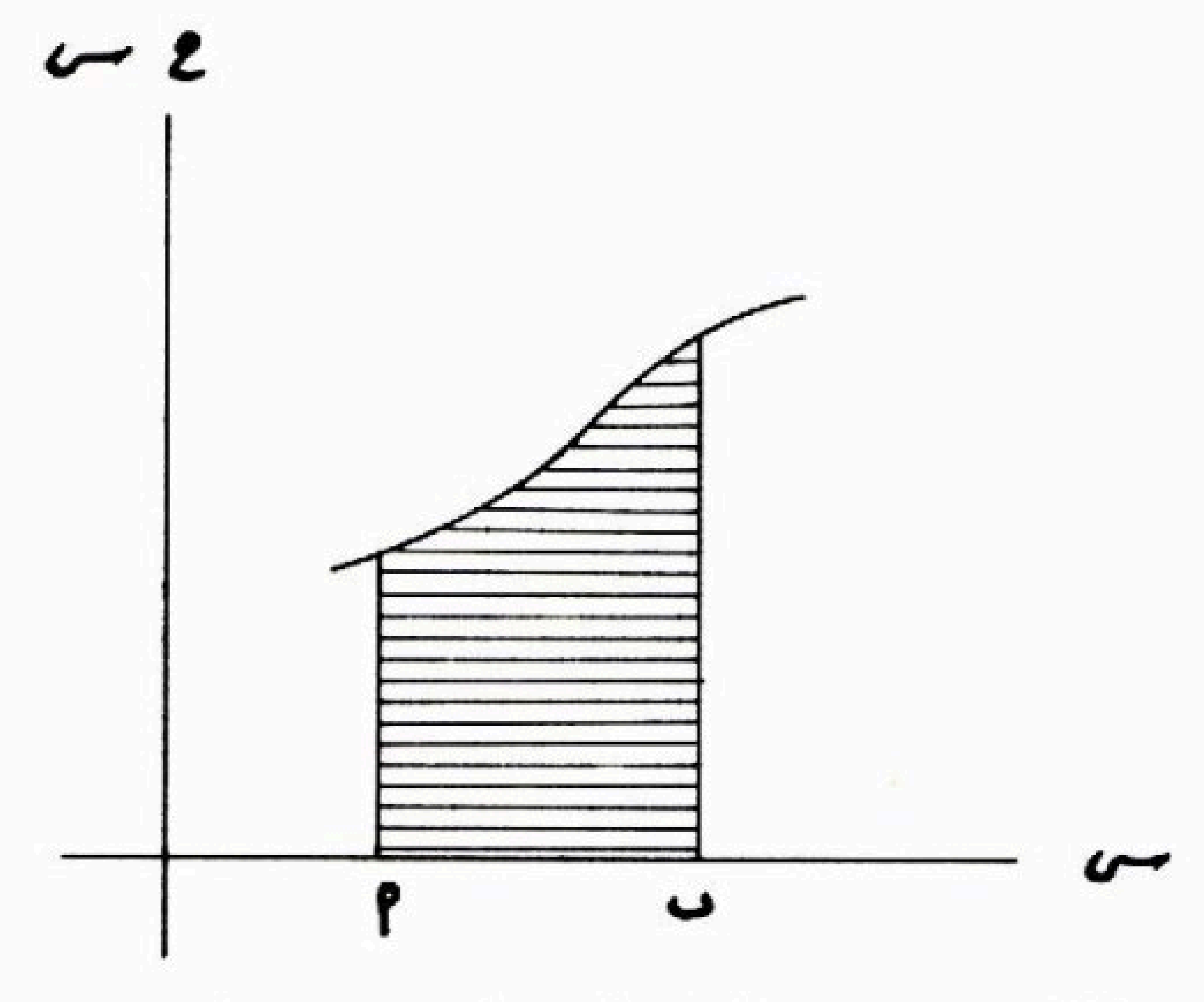
سبق لنا دراسة المتغير العشوائي المتقطع، وذكرنا أن المجال المقابل له منتهٍ أو غير منتهٍ، ولكنه قابل للعد. والمتغير العشوائي المتصل (المستمر) هو الذي يكون مجاله المقابل غير قابل للعد. أي أن قيم المتغير تكون هي جميع القيم لفترة ما (أ ، ب) مثلاً.

ومن أمثلة المتغير العشوائي المتصل أوزان أو أطوال مجموعة من الطلاب أو الدخل السنوي لمجموعة من الأسر أو أعمار الزوجات لمجموعة من الأسر أو درجات الحرارة في فترة ما . . . إلخ. فإذا قمنا بدراسة ظاهرة الوزن لمجموعة من الطلاب فإن المتغير العشوائي الذي يمثل وزن طالب ما يختلف من طالب إلى آخر. ويمكن أن يأخذ أي قيمة داخل فترة (أ ، ب). فإذا وجدنا وزن طالب ما $س_١$ وطالب آخر $س_٢$ فإنه يمكن أن نجد طالبًا ثالثًا وزنه $س_٣$ يقع بين $س_١$ ، $س_٢$ مهما كانت القيمتان $س_١$ ، $س_٢$ قريبتين من بعضهما. ولهذا فإن المتغير **س** الذي يمثل الوزن يكون متصلا ومن ذلك يمكن ملاحظة أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل أي قيمة محددة يساوي صفرًا، ولذلك لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير المتصل بجدول كما سبق أن فعلنا في حالة المتغير العشوائي المتقطع. نعبر عادة عن احتمال المتغير العشوائي المتصل بدالة احتمال، ومقدار الاحتمال عبارة عن المساحة المحصورة تحت المنحنى الخاص بتلك الدالة ومحور السينات، وتسمى هذه الدالة دالة الكثافة الاحتمالية، ونرمز لها بالرمز د (س) التي تحقق الشرطين التاليين:

١ ـ د (س) $\geqslant$ صفر أي قيم دالة الكثافة موجبة دائمًا.

٢ ـ $\int_{-\infty}^{\infty}$ د (س) دس = ١ أي أن المساحة تحت المنحنى لدالة كثافة الاحتمال يساوي واحدًا صحيحًا.

ولإيجاد احتمال أن يقع المتغير في الفترة [أ ، ب] نحسب المساحة المظللة والموضحة بالرسم وتسمى ح (أ $\leqslant$ **س** $\leqslant$ ب)



شكل (١٠ - ١): المساحة تحت المنحنى للفترة (أ إلى ب)

حيث إن

$$ح\ (أ \leqslant \textbf{س} \leqslant ب) = \int_{أ}^{ب} د\ (س)\ دس$$

مثـال (٦)

أثبت أن الدالة التالية

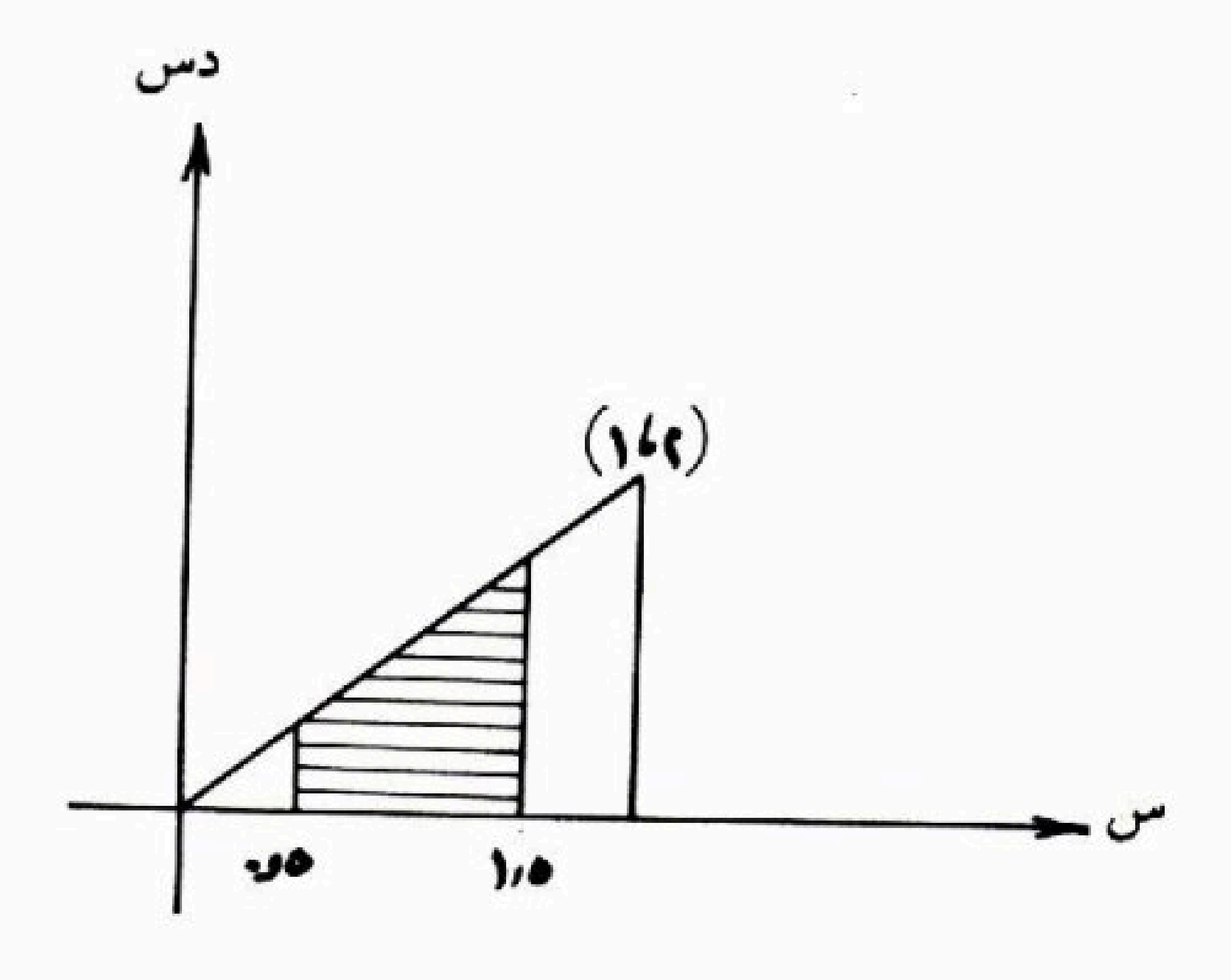
$$د\ (س) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ س & صفر \leqslant س \leqslant 2 \\ صفر & \textbf{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تكون دالة كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة $ح\ (1 \leqslant \textbf{س} \leqslant \frac{3}{2})$. هذه الدالة دائما موجبة أي تحقق الشرط الأول وهو د (س) $\geqslant$ ٠ وذلك لجميع قيم س داخل الفترة من $0 \leqslant \textbf{س} \leqslant 2$

وان

$$\int_{صفر}^{2} \frac{1}{2}\ س\ دس = 1$$

الدالة د (س) هي دالة كثافة احتمال وتوضح بالرسم



شكل (١٠ ـ ٢) : إيجاد قيمة ح ($\frac{١}{٢} \geqslant$ س $\geqslant \frac{٣}{٢}$)

ملحوظة: التكامل السابق هو مساحة المثلث القائم الزاوية التي قاعدته طولها ٢ وارتفاعه ١ أي أن المساحة = $\frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$

ولإيجاد الاحتمال ح ($\frac{١}{٢} \geqslant$ س $\geqslant \frac{٣}{٢}$) والموضح بالجزء المظلل في الرسم بطريقتين كالتالي

(١) ح ($\frac{١}{٢} \geqslant$ س $\geqslant \frac{٣}{٢}$) = $\int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} \frac{١}{٢}$س دس = $\left[\frac{س^٢}{٤}\right]_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{٢}$

(٢) مساحة شبه المنحرف المظلل في الرسم = ح ($\frac{١}{٢} \geqslant$ س $\geqslant \frac{٣}{٢}$) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$\left[\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢}\right] = \frac{١}{٢}$

(١٠ ـ ٣ ـ ١) حساب التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل

يمكن حساب التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل مثل ما سبق بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع، وذلك باستبدال الرمز مجـ الممثل للمجموع بالرمز $\int$ الممثل للتكامل ويكون

$$\text{تـو} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س د (س) دس} \quad \ldots\ldots (٤)$$

$$\text{تبا} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س}^{٢} \text{ د (س) دس} - (\text{تو})^{٢} \quad \ldots\ldots (٥)$$

مثـال (٧)

احسب التـوقـع والتبـاين لدالـة المتغـير العشـوائي المتصل الذي دالة كثافته الاحتمالية معطاة في مثال (٦) السابق.

$$\text{تـو} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س د (س) دس}$$

$$\therefore \text{تو} = \int_{\text{صفر}}^{٢} \text{س} \times \frac{١}{٢}\text{س دس} = \int_{\text{صفر}}^{٢} \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \text{ دس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٦}\right]_{\text{صفر}}^{٢} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{تبا} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س}^{٢} \text{ د (س) دس} - (\text{تو})^{٢}$$

$$\therefore \text{تبا} = \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢} \times \frac{١}{٢}\text{س دس} - \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٨}\right]_{٠}^{٢} - \frac{١٦}{٩} = ٢ - \frac{١٦}{٩} = \frac{٢}{٩}$$

ملاحظـة

سبق لنا دراسة المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة والتوزيعات الاحتمالية لهما بصفـة عامـة. ودراسـة التوزيعات الاحتمالية تساعدنا في الحصول على النتائج التي

تستخدم في الاستدلال الإحصائي الذي بواسطته تتخذ القرارات على أساس علمي سليم.

وفيما يلي نكتفي بدراسة بعض التوزيعات المهمة التي لها تطبيقات كثيرة في الحياة العملية مثل توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون للمتغير العشوائي المتقطع والتوزيع المعتدل (الطبيعي) للمتغير العشوائي المتصل.

(١٠ ـ ٤) توزيع ذي الحدين

توجد كثير من الظواهر في الحياة تكون النتائج الممكنة لها واحدة من اثنتين إحداهما تسمى نجاحًا وتحدث باحتمال ح والثانية تسمى فشلاً وتحدث باحتمال ل حيث إن ل = ١ − ح. وعند تكرار هذه التجربة عددًا من المرات ولتكن ن فإننا نحصل في كل مرة إما على حالة نجاح باحتمال ح، أو فشل باحتمال قدره ل. والمتغير العشوائي **س** الذي يمثل عدد مرات النجاح من هذا النوع يقال إنه يتبع توزيع ذي الحدين.

التوزيع الاحتمالي ح (س) لتوزيع ذي الحدين يعطى بالعلاقة التالية

$$ح\,(س) = \binom{ن}{س}\, ح^{س}\, ل^{ن-س} \qquad \text{.......} \; (٦)$$

حيث إن س = صفر، ١، ٢، ......، ن

ويستخدم هذا التوزيع في الحياة العملية لكثير من الظواهر مثل المعيب والسليم في الإنتاج، والتدخين وعدم التدخين لمجموعة من طلاب الجامعة، النجاح والرسوب في الامتحان لمجموعة من الطلاب، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها، إصابة هدف معين أو عدم إصابته وهكذا.. إلخ.

ويمكن حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير الذي يتبع توزيع ذي الحدين كالتالي:

$$\text{تو} = \sum_{\text{س = صفر}}^{\text{ن}} \text{س ح (س)}$$

$$\text{تو} = \sum_{\text{س = صفر}}^{\text{ن}} \text{س} \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ح}^{\text{س}} \text{ل}^{\text{ن-س}}$$

$$\therefore \text{تو} = \text{ن ح} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٧)$$

$$\text{تبا} = \sum_{\text{س = صفر}}^{\text{ن}} (\text{س} - \text{تو})^{٢} \text{ح (س)}$$

$$= \sum_{\text{س = صفر}}^{\text{ن}} \text{س}^{٢} \text{ح (س)} - (\text{تو})^{٢}$$

$$= \sum_{\text{س = صفر}}^{\text{ن}} \text{س}^{٢} \cdot \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ح}^{\text{س}} \text{ل}^{\text{ن-س}} - \text{ن}^{٢} \text{ح}^{٢}$$

$$= \text{ن ح ل} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

$$\text{نحر} = \sqrt{\text{ن ح ل}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٩)$$

مثال (٨)

إذا ألقيت قطعة نقود متزنة مرتين فأوجد قيم المتغير العشوائي **س** الذي يمثل ظهور عدد الصور، وكذلك التوزيع الاحتمالي، والتوقع (تو) والتباين (تبا) له بطريقتين مختلفتين.

سبق لنا في مثال (١) إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ح (س) كما هو موضح بالجدول التالي:

س	صفر	١	٢
ح (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

لقد وجدنا من مثال (٤) أن التوقع تو = ١ و تبا = ٠,٥

وباستخدام توزيع ذي الحدين ليكون احتمال ظهور الصورة ح = $\frac{١}{٢}$ وعدم ظهور الصورة ل = $\frac{١}{٢}$ وعدد الرميات ن = ٢

وحيث إن المجال المقابل للمتغير العشوائي **س** هو المجموعة { صفر ، ١ ، ٢ } وحيث إن المتغير العشوائي = عدد الصور، ويتبع توزيع ذي الحدين فإن دالة التوزيع الاحتمالي له هي :

$$ح(س) = \binom{ن}{س} ح^{س} ل^{ن-س}$$

وبالتعويض عن قيم **س** نجد أن :

$$ح(صفر) = \binom{٢}{صفر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{صفر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢-صفر} = \frac{١}{٤}$$

$$ح(١) = \binom{٢}{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢-١} = \frac{١}{٢}$$

$$ح(٢) = \binom{٢}{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢-٢} = \frac{١}{٤}$$

وبالتعويض عن ن ، ح يمكن إيجاد التوقع والتباين لهذا التوزيع كما يلي:

$$تو = ن ح = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$$

$$تبا = ن ح ل = ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ٠,٥$$

وهي نفس النتائج السابقة.

مثال (٩)

أوجد احتمال ظهور عدد ٤ صور عند إلقاء قطعة نقود متزنة عشر مرات متتالية، وكذلك التوقع والتباين للمتغير العشوائي **س** الذي يمثل عدد ظهور الصور.

الحـــل

في هذا المثـال يصعب كتابة عناصر فراغ العينة لكبر عدد نقاط فراغ العينة، ويكـون من السهل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين بدون الحاجة لمعرفة جميع عناصر فراغ العينة.

من المثال لدينا:

$$ن = ١٠ \quad ، \quad س = ٤ \quad ، \quad ح = ل = \frac{١}{٢}$$

ونعلم أن دالة التوزيع الاحتمالية

$$ح(س) = \binom{ن}{س} ح^{س} ل^{ن-س}$$

ولقيمة س = ٤ يكون الاحتمال هو:

$$ح(٤) = \binom{١٠}{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠-٤} = ٠,٢٩$$

ولإيجاد التوقع والتباين والانحراف المعياري نكتب:

$$تو = ن ح = ١٠ \times \frac{١}{٢} = ٥ \quad \text{صـــور}$$

$$تبا = ن ح ل = ١٠ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ٢,٥$$

$$نحر = \sqrt{٢,٥} = ١,٥٨ \quad \text{صـــور}$$

مثـال (١٠)

إذا كان ١٠٪ من انتاج أحد مصانع مصابيح الإضاءة غير سليم، وسحبنا عينة مكونة من ٤ مصابيح فأوجد ما يلي:

ا) احتمال أن يكون من بينها مصباح تالف.

ب) احتمال أن يوجد مصباح تالف على الأقل.

الحـــل

نفرض أن المتغير العشوائي **س** = عدد المصابيح التالفة ويتبع توزيع ذي الحدين حيث إن ن = ٤ ، ح = ١ر٠ ، ل = ٠,٩

ودالة التوزيع الاحتمالية هي :

$$\text{ح}(\text{س}) = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ح}^{\text{س}} \text{ل}^{\text{ن}-\text{س}}$$

أي أن

أ) $\text{ح}(١) = \binom{٤}{١}(,١)^{١}(,٩)^{٤-١} = ٠,٢٩$

ب) ح (على الأقل مصباح تالف) = ١ − ح (صفر)

$$\text{ح}(\text{س} \geqslant ١) = ١ - \binom{٤}{\text{صفر}}(,١)^{\text{صفر}}(,٩)^{٤-\text{صفر}}$$

$$= ١ - ٠,٦٥٦ = ٠,٣٤٤$$

مثـال (١١)

لنفرض أنه يوجد من بين كل ٥٠٠ سيارة من إنتاج مصنع معين لإنتاج السيارات ٥٠ سيارة غير سليمة أي غير صالحة للاستعمال، سحبت عينة مكونة من ٤ سيارات من انتاج ذلك المصنع، أوجد احتمال أن يكون من بينها ثلاث سيارات غير صالحة للاستعمال.

الحـــل

نفرض أن المتغير العشوائي **س** يمثل عدد السيارات غير الصالحة ويتبع توزيع ذي الحدين من المثال لدينا:

$$\text{ن} = ٤ \text{ ، } \text{س} = ٣ \text{ ، } \text{ح} = \frac{٥٠}{٥٠٠} = ٠,١ \text{ ، } \text{ل} = ٠,٩$$

ودالة التوزيع الاحتمالية لمتغير يتبع توزيع ذي الحدين هي :

$$\text{ح}(\text{س}) = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ح}^{\text{س}} \text{ل}^{\text{ن}-\text{س}}$$

ومن ذلك يمكن حساب الاحتمال عندما س = ٣ كما يلي :

$$ح(٣) = \binom{٤}{٣}(٠,١)^{٣}(٠,٩)^{٤-٣}$$

$$= ٤ \times ٠,٠٠١ \times ٠,٩ = ٠,٠٠٣٦$$

(١٠ ـ ٥) توزيع بواسون

توجد في الحياة العملية كثيرا من الظواهر تتبع توزيع بواسون مثل عدد المكالمات التليفونية التي تصل إلى مكتب التليفونات خلال دقيقة . أو عدد الحوادث التي تحدث في شارع معين خلال يوم واحد، أو عدد الركاب الذين يصلون إلى محطة الحافلات خلال دقيقة . أو عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات القاموس . . والتوزيع الاحتمالي ح (س) لتوزيع بواسون يعطى كالتالي :

$$ح(س) = \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٠)$$

حيث إن س = صفر ، ١ ، ٢ ، . . . ، م = مقدار ثابت موجب، هـ = أساس للوغاريتم الطبيعي أي أن هـ = ٢,٧١٨ تقريبًا و$\underline{|س}$ = س × (س − ١). . . ٢ × ١ . .
ومن ذلك نجد أن :

التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع يعطي كالتالي :

$$\because تو = \sum_{س=٠}^{\infty} س \; ح(س)$$

$$\therefore تو = \sum_{س=٠}^{\infty} س \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} = م$$

$$\therefore تبا = \sum_{س=٠}^{\infty} س^{٢} \; ح(س) - (تو)^{٢}$$

$$\because تبا = \sum_{س=٠}^{\infty} س^{٢} \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} - م^{٢} = م$$

$$نحر = \sqrt{م}$$

مثال (١٢)

إذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية على أحد الطرق هو حادث واحد فأوجد احتمال أن يحدث في يوم ما حادثان.

الحل

المتغير العشوائي **س** يمثل عدد الحوادث اليومية على الطريق، ويتبع توزيع بواسون بدالة احتمال:

$$ح(س) = \frac{م^{س}\ هـ^{-م}}{\underline{\lfloor س}}$$

وفي مثالنا الحالي س = ٢ ، م = ١ وبذلك يكون:

$$ح(٢) = \frac{(١)^{٢}\ هـ^{-١}}{\underline{\lfloor ٢}} = ٠,١٨٤$$

نتيجة

عندما يكون الاحتمال ح صغيرًا جدًا (أقل من ٠,٠٥)، ن كبيرًا جدًا (أكبر من ٣٠) في توزيع ذي الحدين فإن توزيع ذي الحدين يؤول إلى توزيع بواسون ويكون الثابت م = ن ح، وتعتبر هذه النتيجة مهمة في الحياة العملية وفي كثير من التطبيقات، ونوضح ذلك بالأمثلة التالية.

مثال (١٣)

إذا كانت نسبة المعيب في مصنع مصابيح كهربية هي ٢٪ فإذا أخذنا عينة عشوائية مكونة من ٣٠٠ مصباح فأوجد احتمال أن يوجد في هذه العينة مصباح واحد على الأكثر معيب.

الحل

لاحظ أن ح = ٠,٠٢ < ٠,٠٥ و ن = ٣٠٠ > ٣٠ وبالتالي فإن توزيع

المتغير العشوائي **س** والذي يمثل عدد المصابيح المعيبة يمكن تقريبه بتوزيع بواسون حيث

$$م = ن ح = ٣٠٠ \times ٠,٠٢ = ٦$$

$$\because \quad ح(س) = \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}}$$

$$\therefore \quad ح(صفر) = \frac{(٦)^{صفر} هـ^{-٦}}{\underline{|صفر}} = هـ^{-٦} = ٠,٠٠٢٤٨$$

$$، \quad ح(١) = \frac{(٦)^{١} هـ^{-٦}}{\underline{|١}} = ٠,٠١٤٨٧$$

ح (على الأكثر مصباح معيب) = ح (٠) + ح (١)

$$ح(س \leqslant ١) = ٠,٠٠٢٤٨ + ٠,٠١٤٨٧ = ٠,٠١٧٣٥$$

مثال (١٤)

كتاب يحتوي على ٤٠٠ صفحة فإذا علم أن عدد الأخطاء المطبعية به هو ٢٠٠ خطأ موزعة على صفحات الكتاب أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة على ٣ أخطاء فقط.

الحـــل

المتغير العشوائي **س** يمثل عدد الأخطاء في الصفحة

$ح = \frac{١}{٤٠٠}$ هو احتمال الحصول على صفحة بها أخطاء ، ن = ٢٠٠

$$م = ن ح = ٢٠٠ \times \frac{١}{٤٠٠} = ٠,٥$$

$$ح(س) = \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}}$$

$$ح(٣) = \frac{(٠,٥)^{٣} هـ^{-٠,٥}}{\underline{|٣}} = ٠,٠١٢٦$$

(١٠ ـ ٦) التوزيع المعتدل (الطبيعي)

يعتبر التوزيع المعتدل (أو الطبيعي) من أهم التوزيعات الإحصائية وهو توزيع متصل، وأن معظم الظواهر الطبيعية تتبع التوزيع المعتدل مثل ظاهرة الطول والوزن والذكاء في الإنسان. . . إلخ والمنحنى التكراري لهذا التوزيع متماثل حول المتوسط (أن يتطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال) ومعظم المشاهدات تتركز حول المتوسط، وطرفاه يتقاربان من المحور الأفقي ويمتدان إلى مالا نهاية، والمساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح ويتحدد المنحنى تمامًا بمعرفة المتوسط (تو) والانحراف المعياري (نحر) وتعطى دالة كثافة الاحتمال د (س) كالتالي.

$$\text{د (س)} = \frac{1}{\text{نحر}\sqrt{2\text{ط}}}\ \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{س} - \text{تو}}{\text{نحر}}\right)^{2}} \qquad \ldots\ldots\ (11)$$

حيث إن $-\infty <$ س $< \infty$ ، $-\infty <$ تو $< \infty$ ، نحر $\geqslant$ صفر

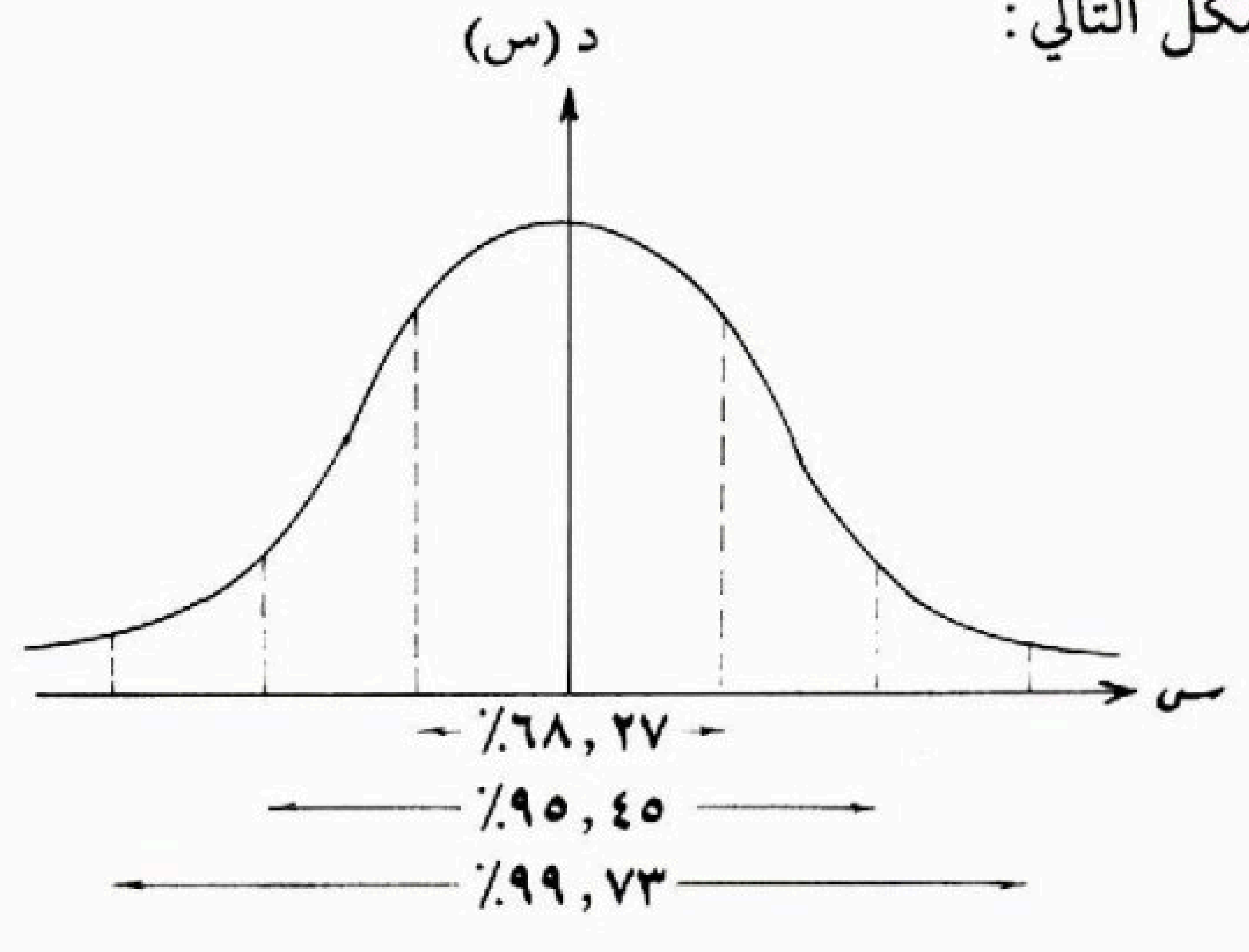
ولقد وجد أن نسب البيانات على جانبي محور التماثل أي الخط المار بالمتوسط (تو) تكون كالتالي:

٦٨,٢٧٪ تقريبا تقع في الفترة (تو ــ نحر ، تو + نحر)

٩٥,٤٥٪ تقريبا تقع في الفترة (تو ــ ٢ نحر ، تو + ٢ نحر)

٩٩,٧٣٪ تقريبا تقع في الفترة (تو ــ ٣ نحر ، تو + ٣ نحر)

كما هو موضح بالرسم في الشكل التالي:

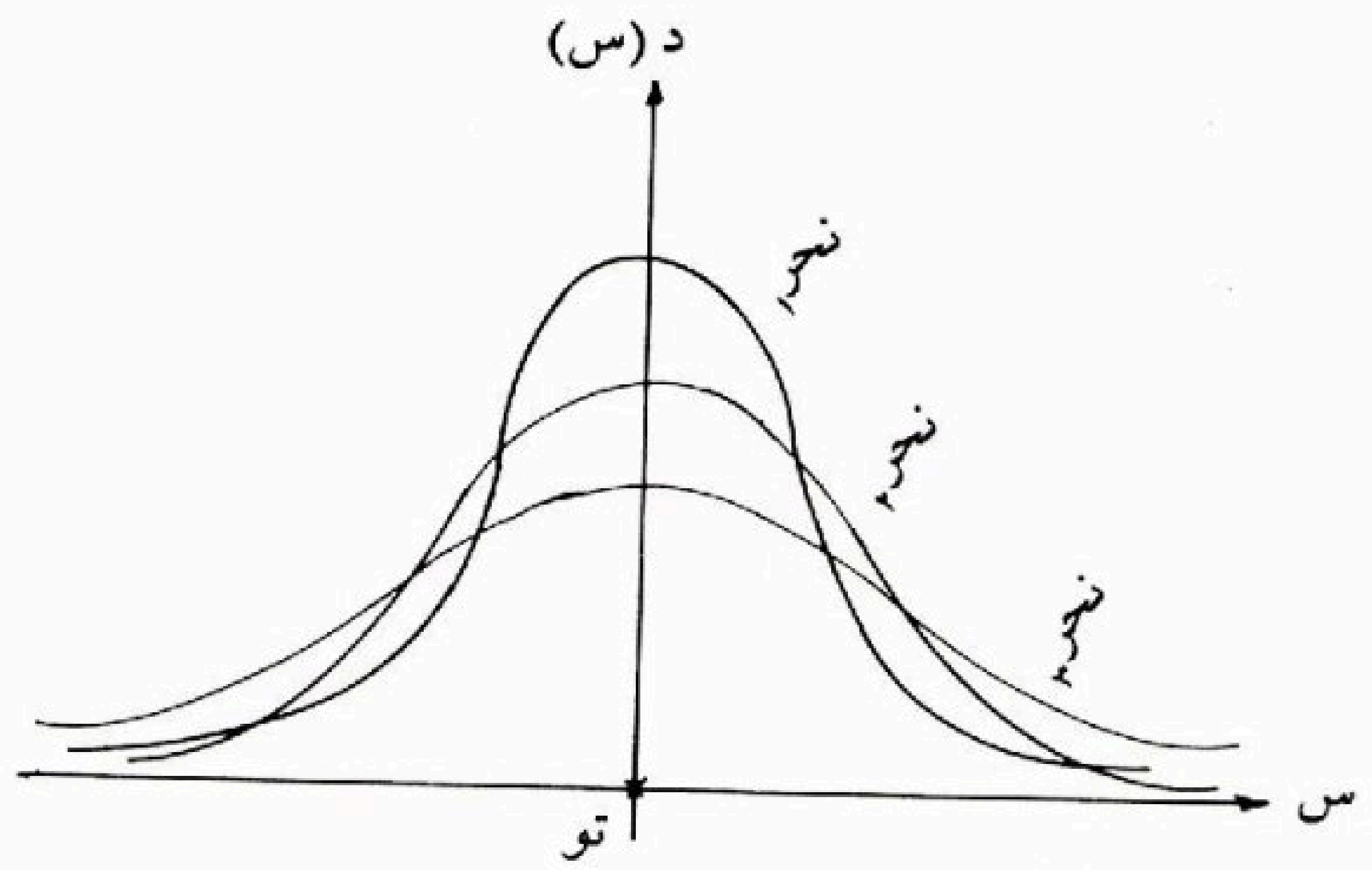


شكل (١٠ ـ ٣)

نسب الإحتمالات حول محور التماثل (المتوسط تو)

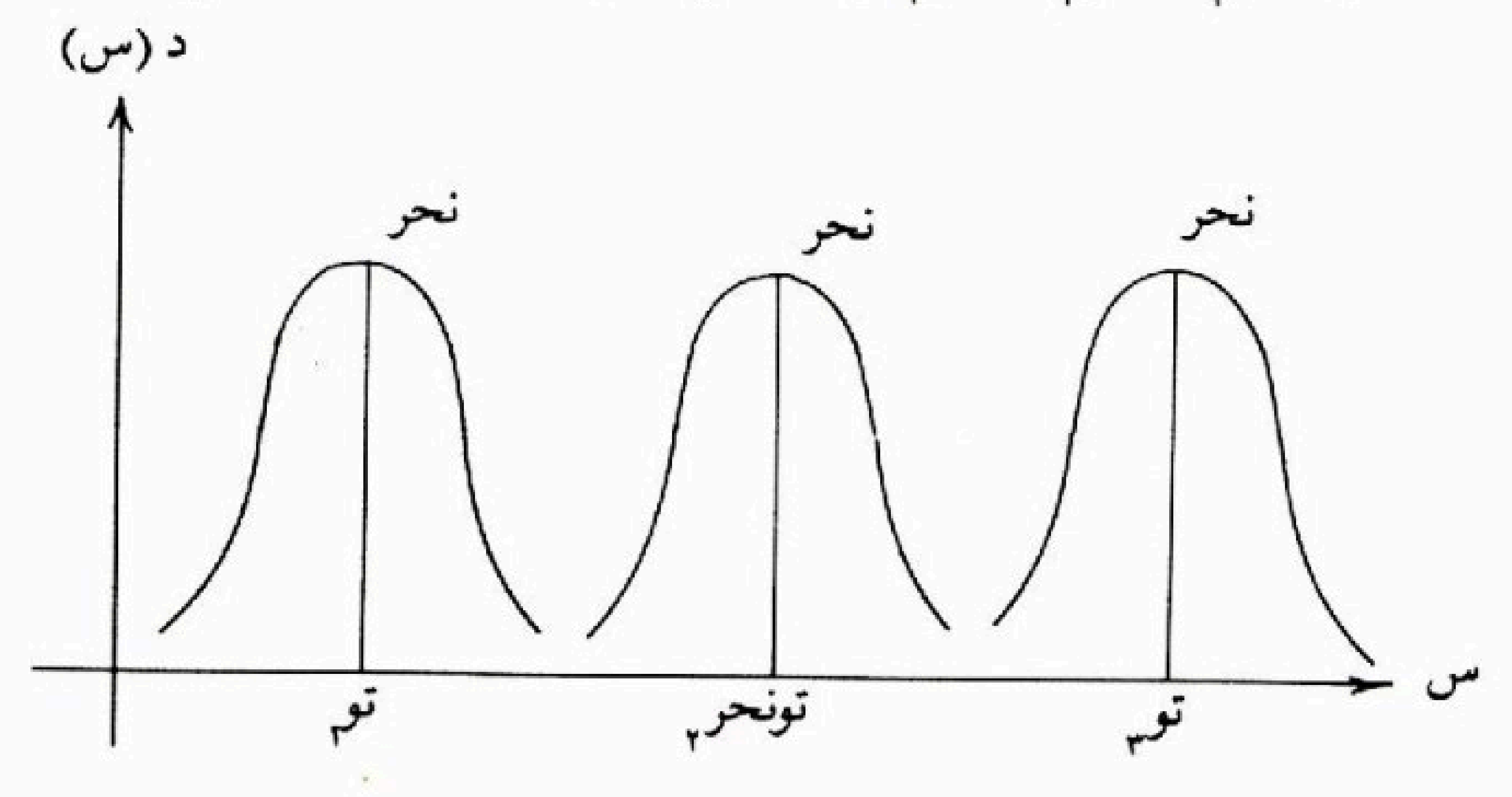
من هذه النسب السابقة نلاحظ ما يأتي

١ ـ إذا كان لدينا مجموعة من التوزيعات لها نفس المتوسط (تو) وتختلف القيم للانحراف المعياري (نحر) لكل توزيع فيكون لها جميعا محور تماثل واحد وهو المحور المار بالمتوسط (تو) وتزداد درجة التفلطح للتوزيع كلما ازدادت قيمة (نحر) كما هو موضح بالشكل التالي حيث: نحر$_{١}$ $<$ نحر$_{٢}$ $<$ نحر$_{٣}$.



شكل (١٠ ـ ٤): أشكال المنحنى الطبيعي بمتوسط ثابت تو وانحراف معياري متغير

٢ ـ أما إذا كانت المجموعة من التوزيعات لها الانحراف المعياري نفسه ولها متوسطات مختلفة حيث تو$_{١}$ $<$ تو$_{٢}$ $<$ تو$_{٣}$ فإن شكل التوزيعات يكون كالتالي



شكل (١٠ ـ ٥): بعض أشكال المنحنى الطبيعي بانحراف معياري ثابت نحر ومتوسط متغير

(١٠ ـ ٦ ـ ١) التوزيع المعتدل القياسي (المعياري)

يعرَّف التوزيع المعتدل القياسي بأنه توزيع معتدل له متوسط يساوي الصفر وله انحراف معياري يساوي الواحد الصحيح (أي أن تو = صفر ، نحر = ١).

وسوف نرمز للمتغير العشوائي الذي له توزيع معتدل قياسي بالرمز **ص** والقيم التي يأخذها بالرمز $ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . . ولدالة كثافته بالرمز ق (ص)، حيث

$$ق(ص) = \frac{١}{\sqrt{٢ط}} هـ^{\frac{-ص^٢}{٢}} \quad ، \quad -\infty < ص < \infty$$

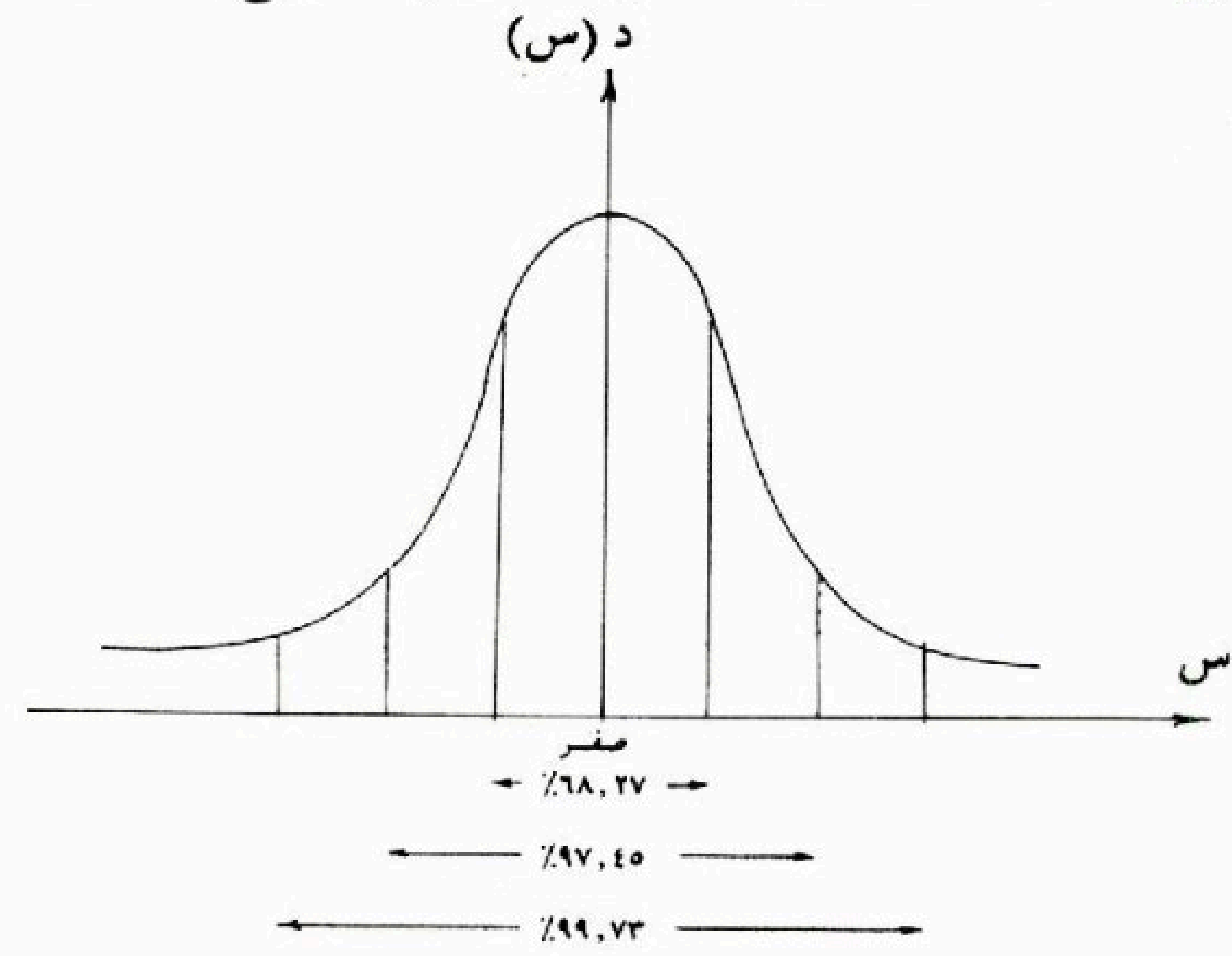
وهذا التوزيع يكون متماثلاً حول المحور الرأسي المار بنقطة الأصل وتكون نسب البيانات له كالتالي:

٦٨,٢٧٪ في الفترة (-١ ، ١)

٩٧,٤٥٪ في الفترة (-٢ ، ٢)

٩٩,٧٣٪ في الفترة (-٣ ، ٣)

ونوضح النسب السابقة على المنحنى التكراري للتوزيع المعتدل القياسي كما يلي:

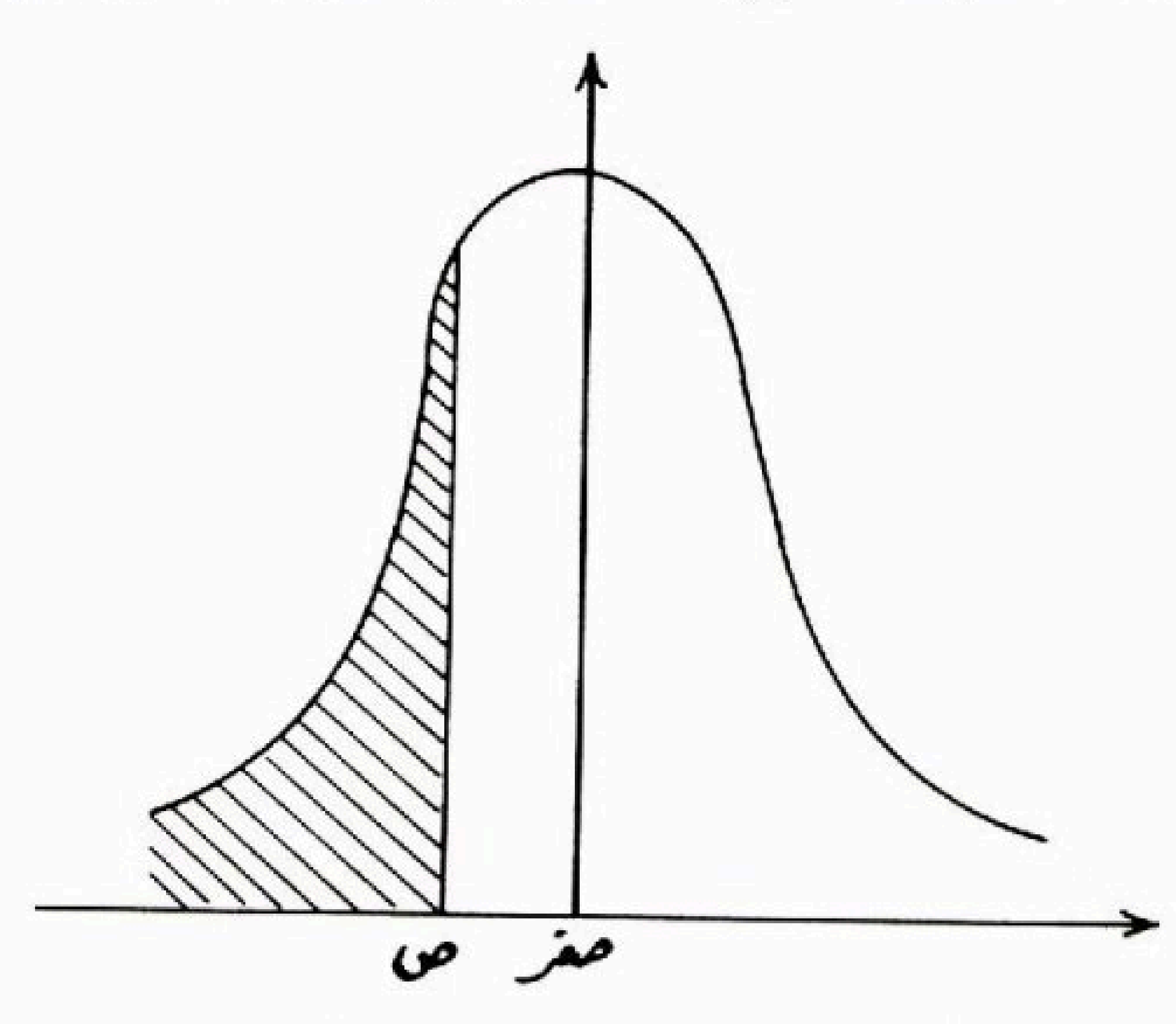


شكل (١٠ ـ ٦): نسب الإحتمالات حول محور التماثل (تو = صفر)

والمساحة تحت هذا المنحنى تساوي الواحد الصحيح وأن معظمها يقع داخل الفترة (-٣ ، ٣) ونادرًا ما نجد قيمة تقع خارج هذه الفترة ولقد حسب الإحصائيون جداول احصائية تعطى قيمة المساحة تحت المنحنى المعتدل القياسي من جهة اليسار لأي قيمة من قيم المتغير العشوائي داخل الفترة (- ٣ ، ٣) والممثلة لقيمة الاحتمال المعطى كالتالي:

ح (**ص** ⩽ ص) = ق (ص) = $\int_{-\infty}^{ص}$ ق (س) دس . . . . (١٢)

ونوضح بالرسم قيمة الاحتمال المعطى بالعلاقة (١٢) وهو عبارة عن الجزء المظلل كالتالي



شكل (١٠ - ٧): قيمة ح (ص ⩽ ص)

والجداول المعطاة في نهاية الكتاب جدول رقم (٢) تعطى قيمة ق (ص) لقيم المتغير العشوائي **ص** داخل الفترة (-٣ ، ٣) وذلك حتى الكسر المئوي لقيم ص كما سيتضح في الأمثلة التالية.

ملحوظة:

يوجد عدد غير نهائي من التوزيعات المعتدلة الممثلة لتوزيعات كثير من الظواهر الطبيعية المختلفة، مثل ظاهرة الوزن، أو ظاهرة الطول، أو ظاهرة الذكاء

للإنسان. . . الخ، ويكون لها متوسطات مختلفة وكذلك انحرافات معيارية مختلفة، وتختلف هذه المتوسطات والانحرافات المعيارية من مجتمع إلى آخر.

يمكن تحويل كل هذه التوزيعات إلى توزيع واحد وهو التوزيع المعتدل القياسي. إذا علمنا لأي توزيع متوسطه (تو) وانحرافه المعياري (نحر) فإن القيمة المعيارية ص المناظرة لأي قيمة س مثلاً لهذا التوزيع تعطى بالعلاقة التالية

$$ص = \frac{س - تو}{نحر} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٣)$$

مثال (١٥)

إذا كان متوسط أوزان مجموعة من طلاب الجامعة هو ٦١ كجم وانحراف معياري هو ٤ فأوجد القيم المعيارية لأوزان عدد الطلاب التي كانت أوزانهم هي ٥٠، ٥٨، ٦٧، ٧٢.

حيث إن المتوسط تو = ٦١ والانحراف المعياري نحر = ٤

القيمة المعيارية للطالب الأول هي $ص_١ = \frac{س_١ - تو}{نحر} = \frac{٥٠ - ٦١}{٤}$

$$= \frac{-١١}{٤} = -٢,٧٥$$

القيمة المعيارية للطالب الثاني $ص_٢ = \frac{٥٨ - ٦١}{٤} = \frac{-٧}{٤} = -,٧٥$

القيمة المعيارية للطالب الثالث $ص_٣ = \frac{٦٧ - ٦١}{٤} = \frac{٦}{٤} = ١,٥$

القيمة المعيارية للطالب الرابع $ص_٤ = \frac{٧٢ - ٦١}{٤} = \frac{١١}{٤} = ٢,٧٥$

مثـال (١٦)

باستخدام البيانات في مثال (١٥) أوجد أوزان الطلاب الحقيقية إذا علم أن الأوزان القياسية لهم هي -٢,٣ ، ١,٧

حيث إن القيم المعيارية تعطى بالعلاقة التالية

$$ص = \frac{س - تو}{نحـر}$$

أي أن

س = تو + ص نحر

الوزن الحقيقي المناظر للقيمة -٢,٣ يكون $س_١$ حيث

$س_١$ = ٦١ + ٤ × (-٢,٣)

= ٦١ - ٩,٢

= ٥١,٨ كجم

والوزن المناظر للقيمة المعيارية ١,٧ هو $س_٢$ويعطى كالتالي

$س_٢$ = ٦١ + ٤ × ١,٧

= ٦٧,٨ كجـم.

مثـال (١٧)

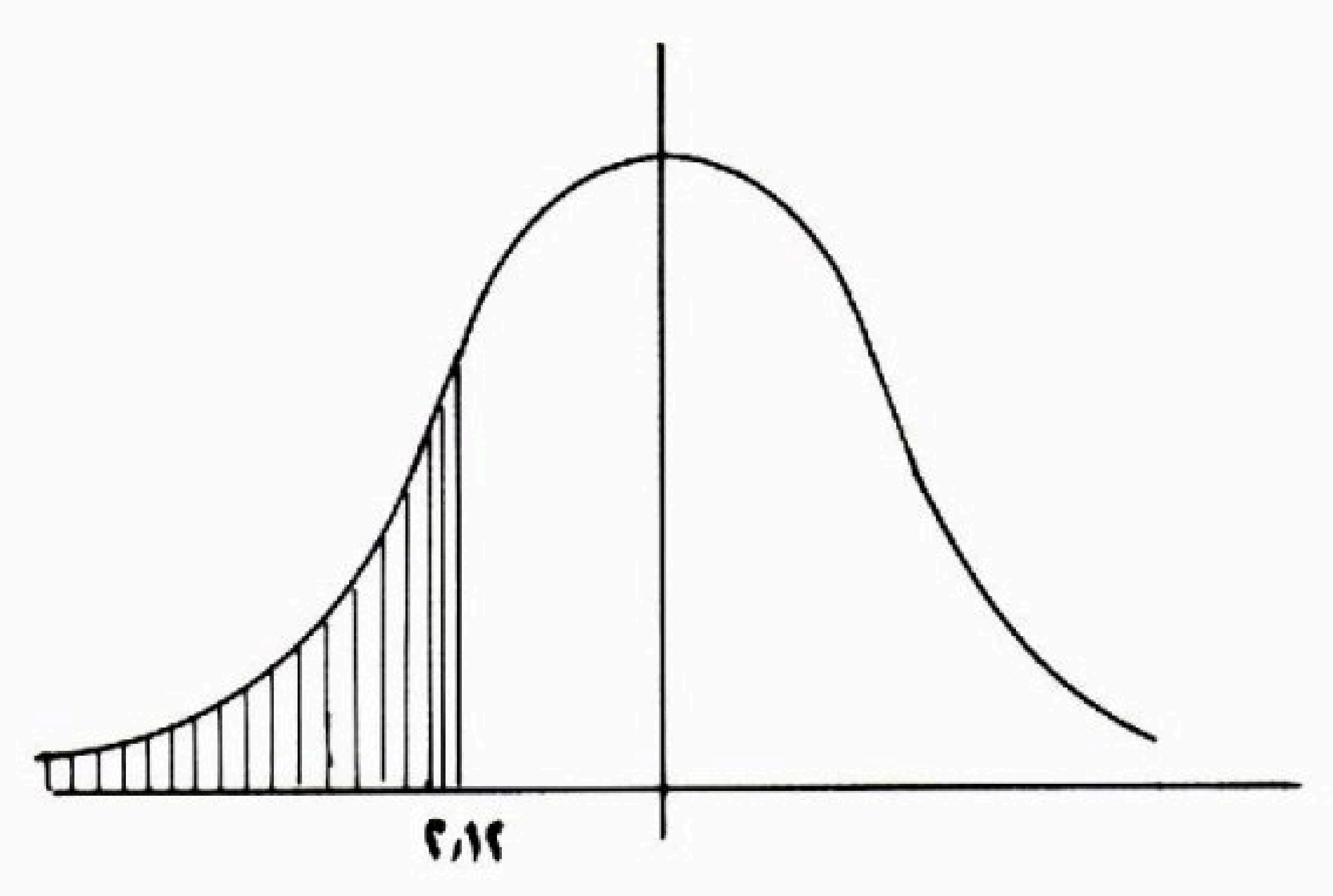
باستخدام الجداول الإحصائية أوجد قيم الاحتمالات التالية

ق (-٢,١٢٠) و ق (١,٣٣)

لإيجاد قيمة الاحتمال ق (-٢,١٢٠) نبحث في العمود الأول من الجدول عن القيمة -٢,١ ، ثم نتحرك أمام هذه القيمة أفقيا حتى نصل إلى العمود الرأسي الذي رأس عنوانه الرقم ٠,٠٢ فتكون هي المساحة المطلوبة أي أن

ق (-٢,١٢٠) = ٠,٠١٧٠٠

ونوضح هذه المساحة بالرسم كالتالي:

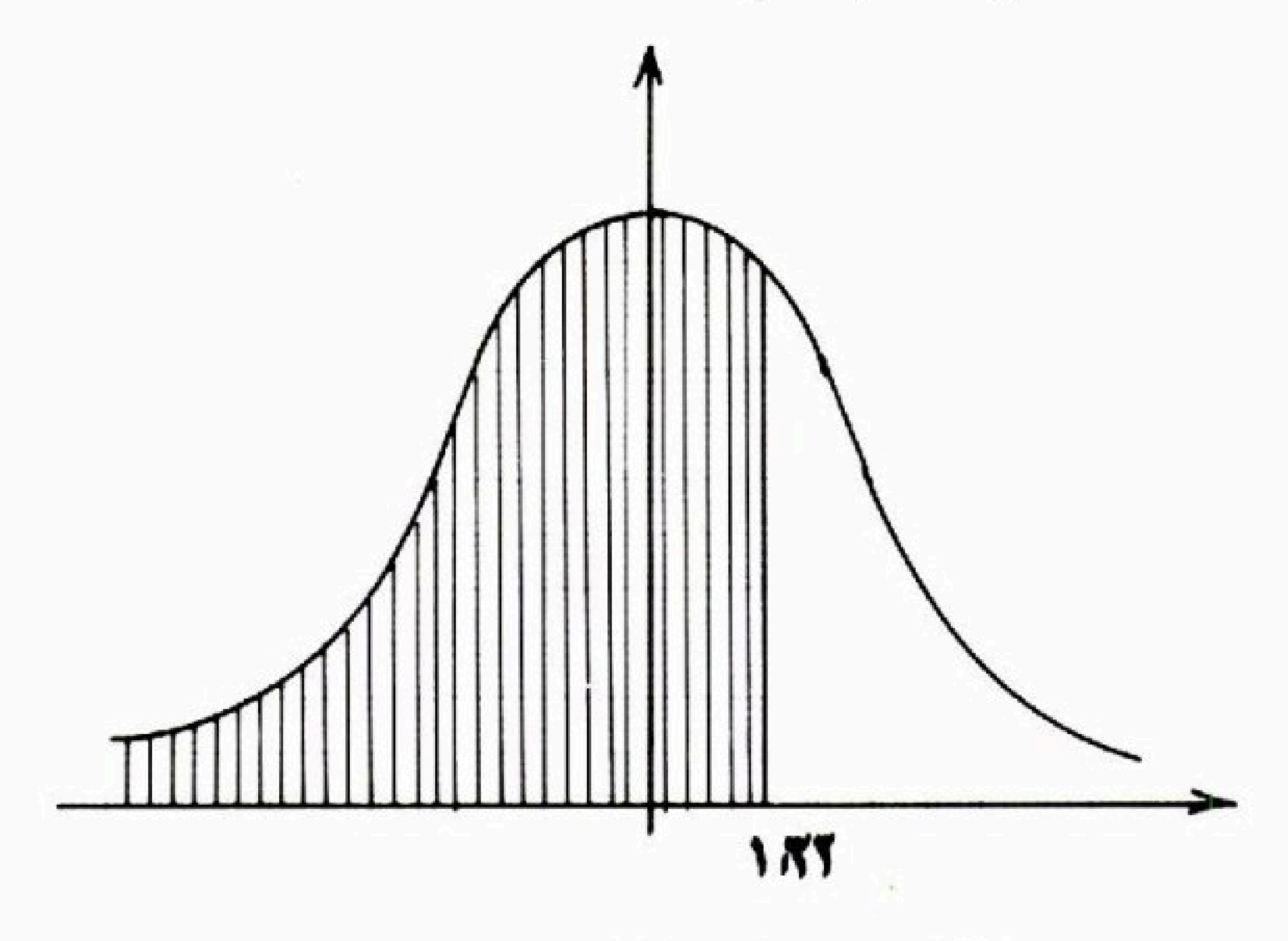


شكل (١٠ ـ ٨): قيمة ح (ص≤ -٢,١٢)

وكذلك لإيجاد الاحتمال ق (١,٣٣) نبحث في العمود الأول عن القيمة ١,٣ ثم نتحرك أفقيا حتى نصل إلى العمود الرأسي تحت الرقم ٠,٠٣ فيكون الاحتمال هو:

ق (١,٣٣) = ٠,٩٠٦٥٨

ونوضحه بالجزء المظلل في الرسم التالي:



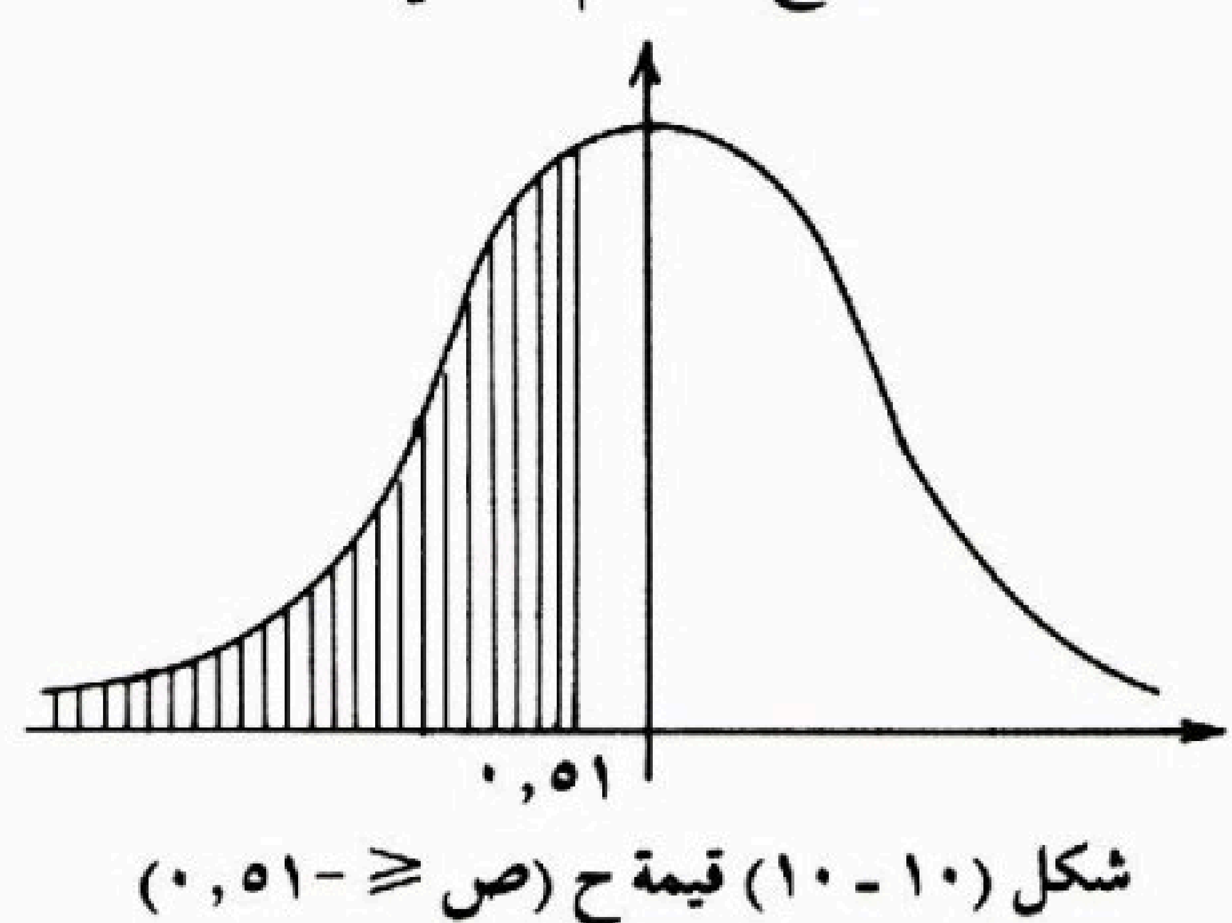
شكل (١٠ ـ ٩): قيمة ح (ص≤ ١,٣٣)

مثـال (١٨)

إذا كان المتغير العشوائي **ص** له توزيع معتدل قياسي فأوجد قيم الاحتمالات التالية ح (**ص** ⩽ -٠,٥١) و ح (٠,٣ ⩽ **ص** ⩽ ١,٩١)

لتسهيل حساب الاحتمال المطلوب نرسم المنحنى الطبيعي القياسي ونحدد على المحور الأفقي قيم ص ثم نظلل المساحة التي على يسار القيمة ص كما يلي:

ح (**ص** ⩽ -٠,٥١) توضح بالرسم كالتالي:

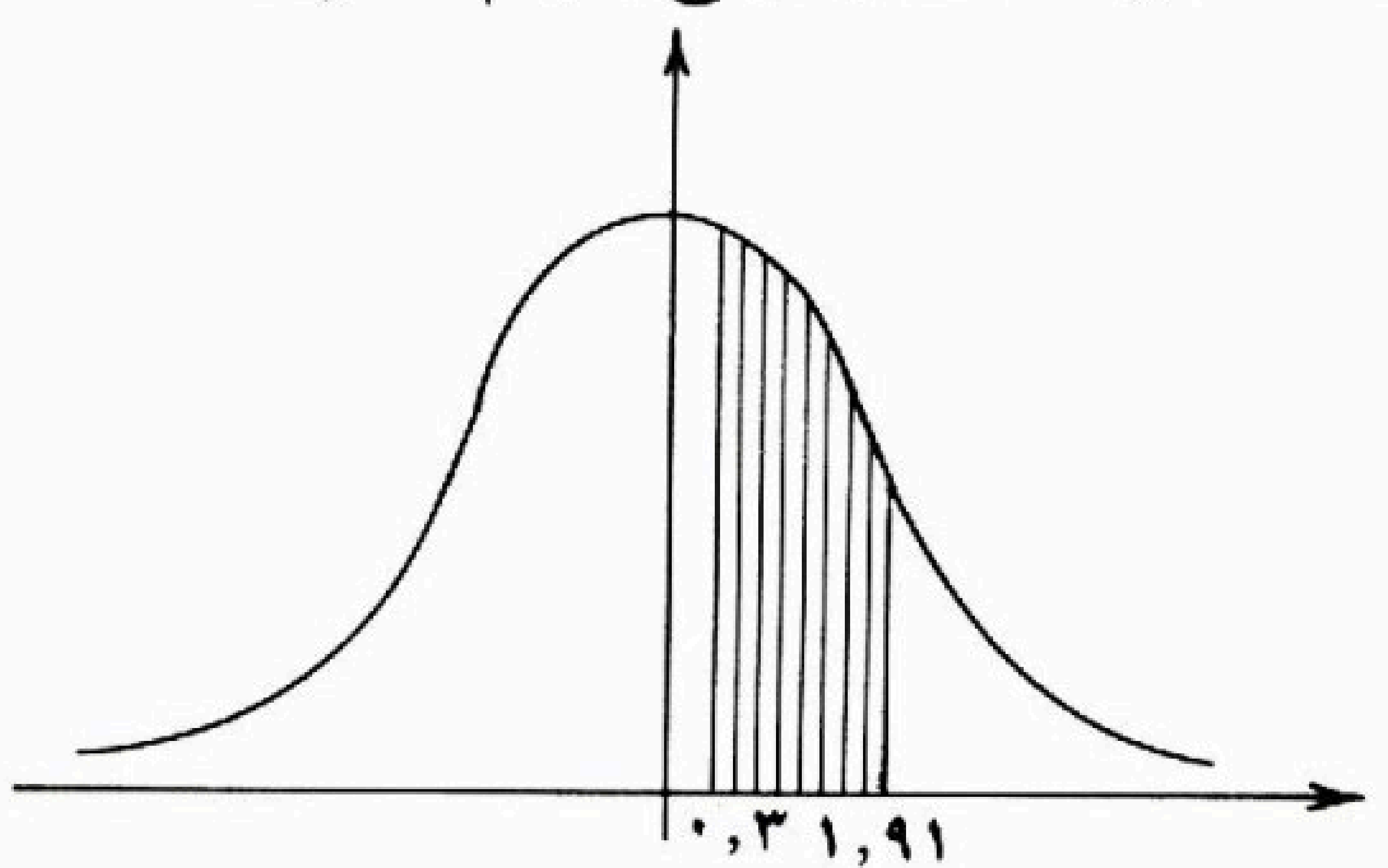


شكل (١٠ - ١٠) قيمة ح (ص ⩽ -٠,٥١)

أي أن

ح (**ص** ⩽ -٠,٥١) = ق (-٠,٥١) = ٠,٣٠٥٠

ح (٠,٣ ⩽ **ص** ⩽ ١,٩١) توضح بالرسم كالتالي:



شكل (١٠ - ١١): قيمة ح (٠,٣ ⩽ ص ⩽ ١,٩١)

ح (٠,٣ ⩽ ص ⩽ ١,٩١) = ق (١,٩١) - ق (٠,٣)

= ٠,٩٧١٩٣ - ٠,٦١٧٩٠

= ٠,٣٥٤٠٣

مثال (١٩)

إذا كانت درجات مجموعة مكونة من ٥٠٠ طالب في أحد المواد تتبع التوزيع المعتدل بتوقع قدره ٧٠ درجة وانحراف معياري قدره ٥ درجات فاحسب عدد الطلاب فيما يلي:

ا - الحاصلون من ٦٦ درجة إلى ٧٦ درجة

ب - الحاصلون على أكثر من ٨٠ درجة

جـ - الحاصلون على أقل من ٦٠ درجة

الحل

لحل هذا المثال نجد على الترتيب ما يلي:

ا) لإيجاد عدد الطلاب نوجد المساحة المحصورة بين القيم المعيارية فتكون التكرار النسبي، وبضرب هذا التكرار النسبي في عدد الطلاب نحصل على عدد الطلاب المطلوب

٦٦ درجة بالوحدات المعيارية = $\frac{٦٦ - ٧٠}{٥}$ = - $\frac{٤}{٥}$ = -٠,٨

٧٦ درجة بالوحدات المعيارية = $\frac{٧٦ - ٧٠}{٥}$ = $\frac{٦}{٥}$ = ١,٢

ح (٦٦ ⩽ س ⩽ ٧٦) = ح (-٠,٨ ⩽ ص ⩽ ١,٢)

= ق (١,٢) - ق (-٠,٨)

= ٠,٨٨٤٩ - ٠,٢١١٩ = ٠,٦٧٣٠

عدد الطلاب الحاصلين من ٦٦ درجة إلى ٧٦ = ٥٠٠ × ٠,٦٧٣

≃ ٣٣٧ طالبا

ب) ٨٠ درجة بالوحدات المعيارية $= \frac{٨٠ - ٧٠}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

ح (س > ٨٠) = ١ − ح (س ⩽ ٨٠)
= ١ − ح (ص ⩽ ٢)
= ١ − ق (٢)
= ١ − ٠,٩٧٧٢٥
= ٠,٠٢٢٧٥

عدد الطلاب الحاصلين على أكثر من ٨٠ درجة = ٥٠٠ × ٠,٠٢٢٧٥
= ١١ طالبا

جـ) ٦٠ درجة بالوحدات المعيارية $= \frac{٦٠ - ٧٠}{٥} = -٢$

ح (س ⩽ ٦٠) = ح (ص ⩽ -٢)
= ٠,٠٢٢٧٥

عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٦٠ درجة = ٥٠٠ × ٠,٠٢٢٧٥
≃ ١١ طالبا

(١٠ ـ ٧) تمارين

١ ـ اوجد التوقع (تو) والتباين (تبا) والانحراف المعياري (نحر) لكل من التوزيعات التالية:

ا)

س	٢	٣	٧
ح (س)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$

ب)

ص	-٣	-٢	٤	٥
ح (ص)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$

جـ)

ع	١	٢	٣	٤	٥
ح (ع)	٠,٢	٠,١	٠,٢	٠,١	٠,٤

٢ ـ صنعت قطعة نقود بحيث كان ح (ص) = $\frac{٢}{٣}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٣}$ القيت هذه القطعة ثلاث مرات فإذا كان س هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الصور. اوجد التوزيع الاحتمالي وتوقع وتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

٣ ـ إذا كان احتمال أن يكسب الفريق ا في أي مباراة هو $\frac{٣}{٤}$. فإذا لعب الفريق ا أربع مباريات فأوجد احتمال أن يكسب هذا الفريق

ا) مباريتـان فقــط.

ب) مباراة واحدة على الأقل.

جـ) أكثر من نصف المباريات.

٤ ـ عين توقع (متوسط) عدد الأولاد في مجتمع الأسر التي بها ستة أطفال بفرض أن احتمال أي طفل في الأسرة بنت مساوٍ لاحتمال أن يكون ولدًا، ما هو احتمال أن يكون لدى الأسرة عدد من الأولاد مساوٍ لمقدار هذا التوقع؟

٥ ـ إذا كان توزيع بواسون يعطى كالتالي

$$ح (س ، م) = \frac{م^{س}}{\underline{|س}} هـ^{-م}$$

فأوجد الاحتمالات التالية:

ح (٣ ، $\frac{١}{٤}$) ، ح (٤ ، ٢) ، ح (٧ ، ١)

٦ - إذا كانت نسبة المصابين بمرض معين في بلد ما ٠,٠٠٢ . ما هو احتمال عدم وجود أي مصاب بهذا المرض في حي يسكنه ٤٠٠٠ نسمة؟

٧ - إذا كان هناك ٤٠٠ خطأ مطبعي موزعة على صفحات كتاب به ٣٠٠ صفحة أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة

ا) على خطأ واحد أو أكثر.

ب) على ثلاثة أخطاء بالضبط.

٨ - إذا كان المتغير العشوائي **ص** له توزيع طبيعي قياسي ق (ص) فأوجد قيم الاحتمالات التالية باستخدام الجداول الإحصائية:

ا) ق (٠,٢١).

ب) ق (٢,١٥).

جـ) ق (-١,١٢).

د) ح (**ص** ≤ ١,٢٤).

هـ) ح (**ص** > ٠,٨١).

و) ح (-١,١٢ ≤ **ص** ≤ ٠,٦٢).

٩ - إذا كانت ٣٠٠ ورقة من أوراق نبات الغار لها توزيع معتدل بمتوسط تو = ١٤٢ ملليمتر، وانحراف معياري نحر = ١٠ مليم، فأوجد عدد الأوراق التالية:

ا) ما بين ١٤٠ ملم، ١٥٠ ملم

ب) أكبر من ١٦٠ ملم

جـ) أقل من ١٣٠ ملم.

١٠- إذا كان ٢٠٪ من انتاج آلة لصناعة المسامير تالف. . فأوجد احتمال أن يكون من بين ٤ مسامير أختيرت عشوائيًا.

ا) مسمار واحد تالف.

ب) لا توجد مسامير تالفة.

جـ) على الأكثر مسماران تالفان.

١١- قطعة نقدية غير متزنة بحيث كانت فرصة ظهور صورة عند إلقائها ضعف فرصة ظهور كتابة. ألقيت القطعة المذكورة ثلاث مرات متتالية، وكان المتغير **س** يرمز لعدد مرات ظهور الصورة في المحاولات الثلاث. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير **س** ثم احسب توقعه وتباينه.

١٢- إذا كان ٥٪ من الأدوات المنتجة في عملية صناعية تالفة فأوجد احتمال أن يكون وحدتان من بين عشر وحدات سحبت عشوائيًا من الإنتاج تالفة باستخدام كل مما يلي:

ا) توزيع ذي الحدين

ب) توزيع بواســون

١٣- إذا كان احتمال أن يعاني الطفل رد فعل سيىء عند حقنه بمصل التطعيم الثلاثي (في أحد المجتمعات) هو ٠,٠٠٢ في مجموعة مكونة من ٣٠٠٠ طفل سبق أن حقنوا بالمصل فأوجد ما يلي:

ا) احتمال أن يعاني ٤ أطفال من رد الفعل

ب) احتمال أن يعاني أكثر من طفلين من رد الفعل

١٤- إذا كان عدد الطلبة المتقدمين للالتحاق بإحدى الكليات العسكرية ٢٠٠٠، وكان أطوالهم تتبع التوزيع المعتدل (الطبيعي) بمتوسط ١٧٠سم وانحراف معياري ١٠. فإذا علم أن هذه الكلية تقبل الأشخاص الذين تتراوح أطوالهم بين ١٥٠سم، ١٨٥سم. فما هو عدد الطلبة المحتمل قبولهم فيها.

١٥- إذا كان مقدار ضغط الدم بالمليمتر في الزئبق يتبع التوزيع المعتدل بمتوسط ١١٠مم، وانحراف معياري ١٠مم في مجتمع ما. فما هي نسبة الأشخاص المحتمل أن يكون ضغطهم ١٤٠مم فأكثر.

الفصل الحادي عشر

توزيع المعاينة والتقدير واختبارات الفروض

(١١ - ١) مقدمـــة

لقد سبق لنا في الفصل الأول تعريف المجتمع الإحصائي والعينة الإحصائية والأخيرة عبارة عن جزء من المجتمع. تعرضنا كذلك إلى طرق لأخذ العينات مثل العينة العشـوائية البسيطة، والعينة الطبقية وغيرها والأسباب التي أدت إلى أخذ العينات. والمجتمع الإحصائي عادة يحتوي على معالم تكون غير معلومة مثل المتوسط والتباين. . . إلـخ. ويرغب البـاحثـون عادة في تقـدير مثـل هذه المعالم من البيانات المأخوذة من العينات، وذلك بحساب متوسط العينة كتقدير لمتوسط المجتمع، وكذلك تباين العينة كتقــدير لتبــاين المجتمــع. . . إلـخ. وتسمى التقـديرات المحسـوبـة من العينـة الإحصائيات. وتستخدم الإحصائيات هذه لتقدير معالم المجتمع، وذلك بأخذ أحد أسلوبين هما التقدير بنقطة أو التقدير بفترة، والتي تسمى عادة فترة الثقة. وتستخدم الإحصائيات في تحديد ما إذا كانت الاختلافات المشاهدة بين عينتين ترجع إلى تقلبات الصـدفـة أو إلى اختـلافـات معنوية فعلاً وهذا يتطلب دراسة ما يسمى باختبارات المعنوية، والفروض، والتي تساعد في اتخاذ القرارات. ولدراسة تقدير المعالم بفترة الثقة واختبارات الفروض لا بد لنا أولا من دراسة توزيعات المعاينة.

(١١ - ٢) توزيع المعاينة للأوساط

إذا كان لدينا مجتمع محدود عدد مفرداته **ن** وأخذنا كل العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي ن، وحسبنا لكل منها الوسط الحسابي $\bar{س}$، ثم وضعنا هذه الأوساط

في جدول تكراري فإننا نحصل على ما يسمى توزيع المعاينة للأوساط. وهذا التوزيع يكون قريبًا جدًّا من التوزيع المعتدل، ومتوسطه يساوي متوسط المجتمع (تو)، وتباينه يكون أقل من تباين المجتمع (تبا). فإذا رمزنا لمتوسط توزيع المعاينة للأوساط بالرمز تو ($\overline{\text{س}}$) وتباين توزيع المعاينة للأوساط بالرمز تبا ($\overline{\text{س}}$) فإننا نحصل على

ا) تو ($\overline{\text{س}}$) = تو . . . . (١)

ب) تبا ($\overline{\text{س}}$) = $\frac{\text{تبا}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{ن} - \text{ن}}{\text{ن} - ١}\right)$ إذا كان حجم المجتمع صغيراً . . . . (٢)

$\frac{\text{تبا}}{\text{ن}}$ إذا كان حجم المجتمع كبيراً

ملاحظـــة

الجذر التربيعي لتباين توزيع المعاينة للأوساط يسمى الخطأ المعياري وسوف نرمز له بالرمز نحر ($\overline{\text{س}}$).

ويمكن التحقق من العلاقتين (١) ، (٢) السابقتين بالمثال التالي.

مثـال (١)

مجتمع يحتوي على أوزان خمسة أطفال في سن الرضاعة كالتالي:

٢ ، ٥ ، ٣ ، ٤ ، ٦ كجم

احسب متوسط التوزيع العيني للأوساط وكذلك الخطأ المعياري لكل العينات الممكنة المكونة من طفلين وتحقق من العلاقتين (١) ، (٢)

الحــل

يمكن تلخيص الحل كالتالي :

العينات والأوساط الحسابية المناظرة لها

جمع العينات الممكنة	الوسط الحسابي $\bar{س}$ لكل عينة
(٢ ، ٥)	٣,٥
(٢ ، ٣)	٢,٥
(٢ ، ٤)	٣
(٢ ، ٦)	٤
(٥ ، ٣)	٤
(٥ ، ٤)	٤,٥
(٥ ، ٦)	٥,٥
(٣ ، ٤)	٣,٥
(٣ ، ٦)	٤,٥
(٤ ، ٦)	٥
المجمـــوع	٤٠,٠

وتكون القيمة المتوقعة للوسط هي :

$$\text{مت } (\bar{س}) = \text{تو}(\bar{س}) = \frac{٤٠}{١٠} = ٤ \text{ كجم}$$

$$\text{متوسط المجتمع تو} = \frac{١}{٥} \ (٢ + ٥ + ٣ + ٤ + ٦) = ٤ \text{ كجم}$$

$$\therefore \text{تو}(\bar{س}) = \text{تو}$$

أي أن العلاقة (١) تكون صحيحة

ولحساب الخطأ المعياري نحر ($\bar{س}$) نكوّن الجدول التالي :

$\bar{س}$	ك	ك $\bar{س}$	ك $\bar{س}^{٢}$
٢,٥	١	٢,٥	٦,٢٥
٣	١	٣,٠	٩,٠٠
٣,٥	٢	٧,٠	٢٤,٥
٤	٢	٨,٠	٣٢,٠٠
٤,٥	٢	٩,٠	٤٠,٥
٥	١	٥,٠	٢٥,٠٠
٥,٥	١	٥,٥	٣٠,٢٥
المجمــوع	١٠	٤٠,٠	١٦٧,٥

$$\text{تبا}\,(\bar{س}) = \frac{١}{ن}\,\text{مجـ}\,ك\,\bar{س}^{٢} - \left(\frac{\text{مجـ}\,ك\,\bar{س}}{ن}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١}{١٠}\,(١٦٧,٥) - \left(\frac{٤٠}{١٠}\right)^{٢}$$

ومن ذلك يكون

$$\text{تبا}\,(\bar{س}) = ٠,٧٥$$

$$\text{نحر}\,(\bar{س}) = \sqrt{٠,٧٥} = ٠,٨٦٦$$

$$\text{تبا} = \frac{١}{ن}\,\text{مجـ}\,(\bar{س} - \text{تو})^{٢}$$

$$= \frac{١}{٥}\,[\,(٢ - ٤)^{٢} + (٥ - ٤)^{٢} + (٣ - ٤)^{٢} + (٤ - ٤)^{٢} + (٦ - ٤)^{٢}\,]$$

$$= \frac{١}{٥}\,(٤ + ١ + ١ + \text{صفر} + ٤) = ٢$$

$\therefore$ تبا $(\bar{س}) \neq$ تبا.

وأن تبا $(\bar{س}) <$ تبا.

نحسب المقدار $\frac{تبا}{ن} \left(\frac{ن - ٢}{ن - ١}\right) = \frac{٢}{٢} \left(\frac{٥ - ٢}{٥ - ١}\right) = ٠,٧٥$

وهو يساوي تبا ($\bar{س}$) أي أن العلاقة (٢) تكون محققة.

(١١ - ٣) توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين

إذا كان لدينا مجتمعان مستقلان متوسط كل منهما $تو_١$ ، $تو_٢$ وتباين كل منهما $تبا_١$ ، $تبا_٢$ على الترتيب. على سبيل المثال قد يكون المجتمع الأول أوزان طلاب جامعة الملك سعود أو أطوالهم، والمجتمع الثاني أوزان طلاب جامعة الملك فهد للبترول والمعادن أو أطوالهم. فإذا أخذنا عينة من المجتمع الأول حجمها $ن_١$ ، وكان متوسطها $\bar{س}_١$ وعينة من المجتمع الثاني حجمها $ن_٢$ وكان متوسطها $\bar{س}_٢$ فإن

ا) مت ($\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$) = تو ($\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$) = $تو_١ - تو_٢$ . . . . (٣)

ب) تباين ($\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$) تبا ($\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$) = $\frac{تبا_١}{ن_١} + \frac{تبا_٢}{ن_٢}$ . . . . (٤)

بفرض أن حجم كل من المجتمعين كبير.

مثـال (٢)

إذا كان متـوسط أوزان طلاب جامعـة الملك سعـود هو ٦٢كجم والانحراف المعياري لأوزان الطلاب هو ٤ كجم. وكان متوسط أوزان طلاب جامعة الملك فهد للبترول والمعادن هو ٦٥كجم وانحراف معياري قدره ٥كجم أخذت عينة من جامعة الملك سعود حجمها ٤٠ طالبا. ثم أخذت عينة من طلاب جامعة الملك فهد للبترول والمعادن حجمها ٣٠ طالبا فاحسب التوقع والخطأ المعياري للفرق بين متوسطي العينتين.

الحـــل

نفـرض أن متـوسط العينـة الأولى $\bar{س}_1$ ومتوسط العينة الثانية $\bar{س}_2$ ومتوسط المجتمع الأول $تو_1$ = ٦٢كجم، ومتوسط المجتمع الثاني $تو_2$ = ٦٥كجم وحيث إن:

$$مت(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = تو(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = تو_1 - تو_2$$

$$= ٦٢ - ٦٥ = -٣ \text{ كجم}$$

نفرض أن تباين المجتمع الأول $تبا_1 = (٤)^٢ = ١٦$

وتباين المجتمع الثاني $تبا_2 = (٥)^٢ = ٢٥$

عندئذ يكون:

$$تباين(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = تبا(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = \frac{تبا_1}{ن_1} + \frac{تبا_2}{ن_2} = \frac{١٦}{٤٠} + \frac{٢٥}{٣٠}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$تبا(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = ٠,٤ + ٠,٨٣ = ١,٢٣$$

ويكون الخطأ المعياري

$$نحر(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = \sqrt{١,٢٣} = ١,١٠٩$$

(١١ ـ ٤) توزيع المعاينة للنسبة

سندرس فيما يلي حالتين من توزيع المعاينة للنسبة.

(١١ ـ ٤ ـ ١) توزيع المعاينة للنسبة ($ح_د$)

أحيانـا يكـون المجتمع الإحصائي ذا صفتين فقط. فمثلاً عند دراسة ظاهرة التدخين فإن المجتمع ينقسم إلى قسمين: أشخاص يدخنون، وآخرون لا يدخنون. وكذلك عند دراسة إنتاج مصنع معين فإن وحدات الإنتاج تنقسم إلى نوعين: وحدات سليمة (صالحة للاستخدام)، وأخرى معيبة (غير صالحة للاستخدام)، . . . . الخ فإذا كان حجم المجتمع محل الدراسة هو **ن** وعدد العناصر التي لها الخاصية الأولى في

هذا المجتمع هو أ فيكون عدد العناصر التي لها الخاصية الأخرى هو **ن** - أ. وتكون نسبة عناصر المجموعة التي لها الخاصية الأولى من المجتمع تساوي $\frac{أ}{ن}$، وسوف نرمز لها بالرمز ح، فإذا أخذنا كل العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي ن، وحسبنا لكل عينة النسبة $ح_د$ فإن التوزيع العيني لـ $ح_د$ يقترب من التوزيع الطبيعي ويكون له توقع تو ($ح_د$) وتباين تبا ($ح_د$) يعطى كالتالي

$$مت\,(ح_د) = تو\,(ح_د) = \frac{أ}{ن} = ح \qquad \dots\dots\dots (٥)$$

$$وتباين\,(ح_د) = تبا\,(ح_د) = \frac{ح\,(١ - ح)}{ن} \qquad \dots\dots\dots (٦)$$

مثـال (٣)

إذا كانت نسبة المعيب في انتاج إحدى الماكينات هو ٢٠٪ أخذت عينة مكونة من ٣٠ وحدة فاحسب قيمة الاحتمال أن يكون بها نسبة معيب قدرها ١٦٪

الحـــل

$$نسبة\ المعيب\ في\ المجتمع\ \ ح = \frac{٢٠}{١٠٠} = ٠,٢$$

$$مت\,(ح_د) = ح = ٠,٢$$

$$تباين\,(ح_د) = تبا\,(ح_د) = \frac{ح\,(١ - ح)}{ن} = \frac{٠,٢\,(١ - ٠,٢)}{٣٠}$$

$$= \frac{٠,٢ \times ٠,٨}{٣٠} = ٠,٠٠٥٣$$

ومن ذلك يكون الخطأ المعياري

$$نحر\,(ح_د) = \sqrt{٠,٠٠٥٣} = ٠,٠٧٣$$

والإحصائية هي :

$$ص = \frac{ح_د - ح}{تبا\,(ح_د)}$$ تتبع التوزيع الطبيعي القياسي ق (ص)

ومن ذلك نجد أن :

$$\text{الاحتمال المطلوب ح (ح}_{د} \geqslant ٠,١٦) = \text{ح (ص} \geqslant \frac{٠,١٦ - ٠,٢}{٠,٠٧٣})$$

ومنه نجد أن :

$$\text{ح (ص} \geqslant -٠,٥٥) = \text{ق} (-٠,٥٥) = ٠,٢٩١٢$$

أي أن الاحتمال المطلوب = ٠,٢٩ تقريبـا .

(١١ ـ ٤ ـ ٢) توزيع المعاينة لفروق النسب (ح $_{د١}$ - ح $_{د٢}$)

نفرض أن لدينا مجتمعين مستقلين وكان حجم المجتمع الأول ن$_١$ وعدد العناصر التي تتميز بالخاصية الأولى أ$_١$. وحجم المجتمع الثاني ن$_٢$ وعدد العناصر التي تتميز بالخـاصية الأولى أيضـا أ$_٢$. فإنه يكون لدينا نسبة الخاصية الأولى للمجتمع الأول ح$_١$ = $\frac{أ_١}{ن_١}$. وكذلك نسبة الخاصية الأولى للمجتمع الثاني ح$_٢$ = $\frac{أ_٢}{ن_٢}$ يلاحظ بأن توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين (ح $_{د١}$ - ح $_{د٢}$) يقترب من التوزيع الطبيعي بتوقع وتباين كما هو موضح فيما يلي :

أ) $\text{مت (ح}_{د١} - \text{ح}_{د٢}) = \text{تو (ح}_{د١} - \text{ح}_{د٢}) = \text{ح}_١ - \text{ح}_٢$

ب) $\text{تبا (ح}_{د١} - \text{ح}_{د٢}) = \frac{\text{ح}_١ (١ - \text{ح}_١)}{\text{ن}_١} + \frac{\text{ح}_٢ (١ - \text{ح}_٢)}{\text{ن}_٢}$

حيث إن ن$_١$ ، ن$_١$ هما حجم كل من العينة الأولى والثانية على الترتيب .

مثـال (٤)

إذا كان لدينا انتاج آلتين، وكانت نسبة المعيب للآلة الأولى هو ١٨٪ والمعيب للآلة الثانية هو ١٤٪ سحبت عينتان من انتاج الآلتين حجمهما ٤٠ ، ٦٠ وحدة على الترتيب. فإذا كانت نسبة المعيب للعينة الأولى هوح $_{د١}$ ونسبة المعيب في العينة الثانية هوح $_{د٢}$.

فاحسب قيمة الاحتمال ح (ح $_{د١}$ − ح $_{د٢}$ ≥ ٠,١).

الحـــل

ولحل المثال نجد أولاً :

أن توقع نسبة المعيب للعينة الأولى هو:

مت (ح $_{د١}$) = تو (ح $_{د١}$) = ٠,١٨

وأن توقع نسبة المعيب للعينة الثانية هو:

مت (ح $_{د٢}$) = تو (ح $_{د٢}$) = ٠,١٤

تباين (ح $_{د١}$ − ح $_{د٢}$) = تبا (ح $_{د١}$ − ح $_{د٢}$)

$$= \frac{ح_١ (١ - ح_١)}{ن_١} + \frac{ح_٢ (١ - ح_٢)}{ن_٢}$$

$$= \frac{٠,١٨ (١ - ٠,١٨)}{٤٠} + \frac{٠,١٤ (١ - ٠,١٤)}{٦٠}$$

$$= ٠,٠٠٥٧$$

ومن ذلك يكون الخطأ المعياري هو:

نحر (ح $_{د١}$ − ح $_{د٢}$) = $\sqrt{٠,٠٠٥٧}$ = ٠,٠٧٥

والاحتمال المطلوب ح ((ح $_{د١}$ − ح $_{د٢}$) ≥ ٠,١)

ومن ذلك تكون الإحصائية المراد حسابها هي :

$$ص = \frac{(ح_{د١} - ح_{د٢}) - (ح_١ - ح_٢)}{تبا (ح_{د١} - ح_{د٢})}$$

نتبع توزيعًا طبيعيًا قياسيًا ق (ص)

$$ح ((ح_{د١} - ح_{د٢}) \geqslant ٠,١) = ح (ص \geqslant \frac{٠,١ - ٠,٠٤}{٠,٠٧٥})$$

$$= ح (ص \geqslant ٠,٨)$$

$$= ق (٠,٨) = ٠,٧٨٨١$$

أي أن :

الاحتمال المطلوب = ٠,٧٩

(١١ ـ ٥) التقدير الإحصائي

سبق لنا دراسة بعض التوزيعات الإحصائية مثل توزيع ذي الحدين، وتوزيع بواسون والتوزيع المعتدل. ولاحظنا بعض المعالم المجهولة في هذه التوزيعات مثل ح في توزيع ذي الحدين، م في توزيع بواسون، و تو، نحر في التوزيع المعتدل. فإذا كان المجتمع الإحصائي يتبع توزيعا معينا من هذه التوزيعات، فإننا نرغب في تقدير معالم هذا التوزيع من العينة المأخوذة من هذا المجتمع. يوجد نوعان من التقدير هما التقدير بنقطة إذا قدِّرت معلمة المجتمع برقم واحد. والتقدير بفترة وهو أن تكون معلمة المجتمع واقعة بين رقمين. وتسمى هذه الفترة فترة الثقة، وتعتبر فترة الثقة أفضل إحصائيًا من التقدير بنقطة لأنها تكون مصحوبة بمعنوية أو دقة التقدير. ولتوضيح معنى التقدير نأخذ المثال التالي على سبيل المثال.

إذا كان متوسط أوزان عينة من طلاب جامعة الملك سعود هو $\overline{س}$ = ٦٥كجم فإن هذا يعني التقدير بنقطة لمتوسط مجتمع طلاب جامعة الملك سعود (تو). أما إذا كان متوسط أوزان طلاب الجامعة (تو) يقع بين القيمتين ٦٥ ± ٣ أي أن (تو) تقع بين الوزنين ٦٢، ٦٨ فإن هذا التقدير يسمى التقدير بفترة. وعادة ما تكون الفترة التي يقع داخلها المتوسط (تو) ذات احتمال مثل ٠,٩، ٠,٩٥، ٠,٩٩ ... إلخ، ونكتب الاحتمال في المثال السابق ح (٦٢ ≥ تو ≥ ٦٨) = ٠,٩ أو ٠,٩٥ ... إلخ.

وسوف نستعرض فيما يلي تقدير فترة الثقة لكل من الأوساط والنسب والفرق بين متوسطين والفرق بين نسبتين.

(١١ ـ ٥ ـ ١) تقدير فترة الثقة للأوساط الحسابية (تو)

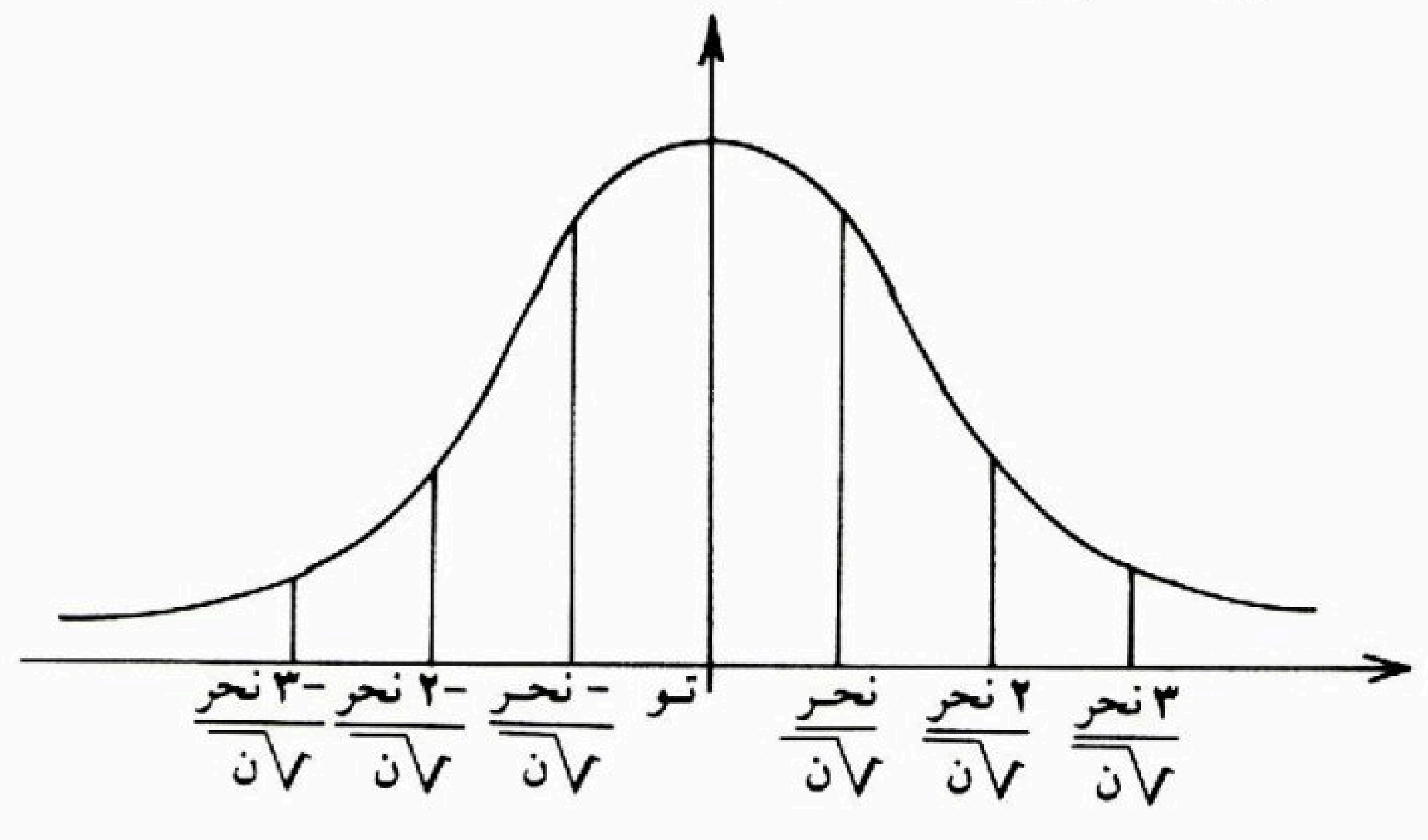
لقد سبق أن وجدنا أن توزيع المعاينة للأوساط يقترب من التوزيع المعتدل بتوقع تو ($\bar{\text{س}}$)= تو، وخطأ معياري يساوي $\frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$. وأن نسبة عدد المتوسطات $\bar{\text{س}}$ على جانبي محور التماثل المار بمتوسط التوزيع للمعاينة تو ($\bar{\text{س}}$) = تو تتعين كالتالي :

٦٨,٢٧٪ تقريبا تقع في الفترة (تو $- \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$ ، تو $+ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$) ،

٩٥,٤٥٪ تقريبا تقع في الفترة (تو $- ٢ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$ ، تو $+ ٢ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$) ،

٩٩,٧٣٪ تقريبا تقع في الفترة (تو $- ٣ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$ ، تو $+ ٣ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$) ،

كما هو موضح بالرسم في الشكل التالي :



شكل (١١ ـ ١) : نسب الإحتمالات حول محور التماثل تو

والنقطتان اللتان تبعدان عن تو بمقدار ٢ خطأ معياري تكون تو $- ٢ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$ ، تو $+ ٢ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$. ولذلك فإن الفترة (تو $- ٢ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$ ، تو $+ ٢ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$) تحتوي على ٩٥٪ من الأوساط الحسابية $\bar{\text{س}}$. وعندما يكون الوسط تو غير معلوم فإننا نستخدم الفترة التالية ($\bar{\text{س}} - ٢ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$ ، $\bar{\text{س}} + ٢ \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}}$) كتقدير بفترة لمعلمة

المجتمع (تو) بدرجة ثقة ٩٥٪ بأن يقع الوسط (تو) داخل هذه الفترة ويكتب احتمال التقدير بفترة الثقة عند احتمال يساوي ٠,٩٥ كالتالي:

$$ح(\overline{س} - ٢\frac{نحـر}{\sqrt{ن}} \leqslant تو \leqslant \overline{س} + \frac{نحـر}{\sqrt{ن}}) = ٠,٩٥$$

ويكتب تقدير حدود فترة الثقة بصفة عامة كالأوساط مثالاً كالتالي:

$$\overline{س} \pm ص_{\frac{أ}{٢}} \frac{نحـر}{\sqrt{ن}}$$

حيث احتمال التقدير بفترة في هذه الحالة أكبر أو يساوي ١ - أ ويوضح كالتالي:

$$ح(\overline{س}_{١} - ص_{\frac{أ}{٢}} \frac{نحـر}{\sqrt{ن}} \leqslant تو \leqslant \overline{س} + ص_{\frac{أ}{٢}} \frac{نحـر}{\sqrt{ن}}) \leqslant ١ - أ$$

وتكون درجة الثقة مساوية ١٠٠ (١ - أ)٪ لمتوسط المجتمع تو واقع داخل هذه الفترة. وتكون أ عبارة عن قيم موجبة صغيرة مثل ٠,٠١، ٠,٠٥ . . . . وهكذا وتسمى أ بمستوى المعنوية لفترة الثقة. والقيم ص هي قيم معيارية تحدد من الجداول الإحصائية للتوزيع المعتدل المعياري (القياسي) لكل قيمة من قيم أ ويكتب تقدير فترة الثقة للأوساط المعاينة بصفة عامة كالتالي:

$$\overline{س} \pm ص_{\frac{أ}{٢}} \frac{نحـر}{\sqrt{ن}}$$

وذلك عندما يكون الانحراف المعياري للمجتمع (نحر) معلوم ونوضح طريقة الحساب بالمثال التالي.

مثـال (٥)

إذا كان متوسط طول عينة مكونة من ٤٠٠ ورقة من نبات الغار هو ١٤٢ملم. وكان معلومًا أن الانحراف المعياري لأوراق الغار هو ١٦ملم فأوجد ٩٥٪، ٩٩٪ حدود ثقة لمتوسط طول أوراق نبات الغار.

الحـــل

يمكن حساب **٩٥٪** حدود ثقة لمتوسط أطوال أوراق نبات الغار كالتالي:

حيث أن $\bar{س}$ = **١٤٢** ملم ، ن = **٤٠٠** ورقة ، نحر = **١٦** ملم، أ = **٠,٠٥** ،

$ص_{٠,٠٢٥}$ = **١,٩٦** إذًا.

$$\bar{س} \pm ص_{\frac{أ}{٢}} \frac{نحر}{\sqrt{ن}}$$

$$= ١٤٢ \pm ١,٩٦ \frac{١٦}{\sqrt{٤٠٠}}$$

$$= ١٤٢ \pm ١,٥٧$$

أي أن

الحد الأعلى = **١٤٣,٥٧** ملم

والحد الأدنى = **١٤٠,٤٣** ملم

ولإيجاد **٩٩٪** حدود ثقة لمتوسط طول أوراق نبات الغار نكتب ما يلي

أ = **٠,٠١** ، $ص_{\frac{أ}{٢}}$ = **٢,٥٨**

إذًا $\bar{س} \pm ٢,٥٨ \frac{نحر}{\sqrt{ن}}$

$$= ١٤٢ \pm ٢;٥٨ \frac{١٦}{\sqrt{٤٠٠}}$$

$$= ١٤٢ \pm ٢,٠٦$$

أي أن

الحد الأعلى = **١٤٤,٠٦** ملم

الحد الأدنى = **١٣٩,٩٤** ملم

(١١ ـ ٥ ـ ٢) تقدير فترة الثقة للنسبة ح

سبق أن ذكرنا أن توزيع المعاينة للنسب يقترب من التوزيع المعتدل بتوقع تو $(ح_د)$ = ح والخطأ المعياري نحر$_{ح_د}$ يكون أقل من الانحراف المعياري للمجتمع نحر، وبذلك تكون تقدير فترة الثقة للنسبة ح عند مستوى معنوية أ بدرجة ثقة قدرها ١٠٠(١ ـ أ)٪ تعطى كالتالي:

تقدير فترة الثقة للنسبة ح = $ح_د \pm ص_{\frac{أ}{٢}}$ نحر $(ح_د)$

، ∵ نحر $(ح_د) = \sqrt{\frac{ح_د(١ - ح_د)}{ن}}$

∴ تقدير فترة الثقة للنسبة ح =

$$ح_د \pm ص_{\frac{أ}{٢}} \sqrt{\frac{ح_د(١ - ح_د)}{ن}}$$

$$ح \pm ح_أ \sqrt{\frac{ح_د(١ - ح_د)}{ن}}$$

ونوضح طريقة حساب تقدير فترة الثقة للنسب بالمثال التالي.

مثال (٦)

في دراسة بالعينة لأعداد المدخنين في إحدى الجامعات.. أخذت عينة مكونة من ١٠٠ طالب، وجد أن ١٨٪ منهم يدخنون.

احسب تقدير حدود الثقة لنسبة المدخنين من طلاب الجامعة عند درجة ثقة تساوي ٩٥٪، ٩٩٪.

الحل

لحساب ٩٥٪ حدود ثقة لنسبة المدخنين من طلاب الجامعة نجد أن

$ح_د$ = ٠,١٨ ، $ص_{٠,٠٢٥}$ = ١,٩٦ ، ن = ١٠٠ طالب

ومن ذلك نكتب

$$\text{ح}_{\text{د}} \pm \text{١,٩٦} \sqrt{\frac{\text{ح}_{\text{د}}(\text{١} - \text{ح}_{\text{د}})}{\text{ن}}}$$

$$= \text{٠,١٨} \pm \text{١,٩٦} \sqrt{\frac{\text{٠,١٨} \times \text{٠,٨٢}}{\text{١٠٠}}}$$

$$= \text{٠,١٨} \pm \text{١,٩٦} \times \text{٠,٠٣٨}$$

$$= \text{٠,١٨} \pm \text{٠,٠٧}$$

ومن ذلك يكون

تقدير الحد الأعلى = ٠,٢٥ أي ٢٥٪ من الطلاب

تقدير الحد الأدنى = ٠,١١ أي ١١٪ من الطلاب

ولحساب ٩٩٪ حدود ثقة لنسبة المدخنين من طلاب الجامعة حيث

ص$_{\text{٠,٠٠٥}}$ = ٢,٥٨ تكون

$$\text{ح}_{\text{د}} \pm \text{٢,٥٨} \sqrt{\frac{\text{ح}_{\text{د}}(\text{١} - \text{ح}_{\text{د}})}{\text{ن}}}$$

$$= \text{٠,١٨} \pm \text{٢,٥٨} \sqrt{\frac{\text{٠,١٨} \times \text{٠,٨٢}}{\text{١٠٠}}}$$

$$= \text{٠,١٨} \pm \text{٢,٥٨} \times \text{٠,٠٣٨}$$

$$= \text{٠,١٨} \pm \text{٠,٠٩٨}$$

أي أن

الحد الأعلى = ٠,١٨ + ٠,٠٩٨ = ٠,٢٧٨ أي ٢٧,٨٪ من الطلاب

الحد الأدنى = ٠,١٨ − ٠,٠٩٨ = ٠,٠٨٢ أي ٨,٢٪ من الطلاب

(١١ ـ ٥ ـ ٣): تقدير فترة الثقة بين متوسطين ($تو_١ - تو_٢$)

سبق أن تكلمنا عن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين ووجدنا أنه يقترب من التوزيع المعتدل، وأن التوقع تو ($\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$) = $تو_١ - تو_٢$، وأن الخطأ المعياري له

$$نحر(\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) = \sqrt{\frac{نحر_١^٢}{ن_١} + \frac{نحر_٢^٢}{ن_٢}}$$

وبذلك يمكن تقدير حدود الثقة للفرق بين متوسطين عند مستوى معنوية أ بدرجة ثقة ١٠٠ (١ - أ)٪ كالتالي:

$$(\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) \pm ص_{\frac{أ}{٢}} \sqrt{\frac{نحر_١^٢}{ن_١} + \frac{نحر_٢^٢}{ن_٢}}$$

ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي.

مثال (٧)

لدراسة إنتاجية الأرض للقمح في المناطق المختلفة بالمملكة. أخذنا منطقتين مختلفتين فوجدنا أن متوسط انتاج الفدان الواحد من القمح هو ١٤٠٠ صاع للمنطقة الأولى لعينة مكونة من ١٥٠ فدانًا. وأن متوسط إنتاج الفدان من القمح هو ١٢٠٠ صاع للمنطقة الثانية لعينة مكونة من ١٠٠ فدان بانحراف معياري قدره ٩٠ صاعًا للمنطقة الأولى، وانحراف معياري قدره ٥٠ صاعًا للمنطقة الثانية.

احسب ٩٥٪ حدود ثقة للفرق بين متوسطي انتاج القمح للمنطقتين.

الحـــل

لحساب ٩٥٪ حدود ثقة للفرق بين متوسطي الإنتاج من القمح تعطى كالتالي

$$\text{حدود الثقة} = (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) \pm 1,96 \sqrt{\frac{تبا_1}{ن_1} + \frac{تبا_2}{ن_2}}$$

حيث إن

$\bar{س}_1 = 1400$ صاع ، $\bar{س}_2 = 1200$ صاع

$نحر_1 = 90$ صاعا ، $نحر_2 = 50$ صاعا

$ن_1 = 150$ فدانا ، $ن_2 = 100$ فدان

ومن ذلك نجد أن :

$$\text{حدود الثقة} = (1400 - 1200) \pm 1,96 \sqrt{\frac{(90)^2}{150} + \frac{(50)^2}{100}}$$

$$= 200 \pm 1,96 \sqrt{54 + 25}$$

$$= 200 \pm 1,96 \times 8,89$$

$$= 200 \pm 17,42$$

وبذلك يكون

الحد الأعلى لفرق متوسطي الإنتاج = ٢١٧,٤٢ صاعا

الحد الأدنى لفرق متوسطي الإنتاج = ١٨٢,٥٨ صاعا

(١١ ـ ٥ ـ ٤) : تقدير فترة الثقة للفرق بين نسبتين ($ح_1 - ح_2$)

سبق أن علمنا أن توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين يقترب من التوزيع المعتدل بمتوسط ($ح_1 - ح_2$) وخطأ معياري يساوي

$$نحر(ح_{د1} - ح_{د2}) = \sqrt{\frac{ح_{د1}(1-ح_{د1})}{ن_1} + \frac{ح_{د2}(1-ح_{د2})}{ن_2}}$$

وبذلك يمكن تقدير فترة الثقة للفرق بين نسبتين ($ح_1 - ح_2$) عند مستوى معنوية أ وبدرجة ثقة قدرها ١٠٠ (١ - أ)٪ كالتالي :

فترة الثقة = $(ح_{د_1} - ح_{د_2}) \pm ص_{\frac{أ}{2}} \sqrt{\frac{ح_{د_1}(1-ح_{د_1})}{ن_1} + \frac{ح_{د_2}(1-ح_{د_2})}{ن_2}}$

ويمكن توضيح طريقة الحساب لهذه الفترة بالمثال التالي.

مثـال (٨)

في دراسـة لمعرفة الفرق بين نسبتين لوجود عقار «البنادول» في الوصفات التي تعطى في مستشفيين في منطقتين مختلفتين بالمملكة وجد في عينة مكونة من ٤٠٠ وصفة للمستشفى الأول ٢٠٠ وصفة تحتوى على عقار «البنادول». كما وجد في عينة مكونة من ٥٠٠ وصفة للمستشفى الثاني ١٠٠ وصفة تحتوي على عقار «البنادول».

احسب ٩٩٪ حدود الثقة للفرق بين نسبتي «البنادول» في وصفات كل من المستشفيين.

الحــل

لحساب ٩٩٪ حدود الثقة للفرق بين نسبتي «البنادول» كالتالي:

حدود الثقة = $(ح_{د_1} - ح_{د_2}) \pm ٢,٥٨ \sqrt{\frac{ح_{د_1}(1-ح_{د_1})}{ن_1} + \frac{ح_{د_2}(1-ح_{د_2})}{ن_2}}$

حيث إن

$ح_{د_1} = \frac{٢٠٠}{٤٠٠} = ٠,٥$ ، $ن_1 = ٤٠٠$

$ح_{د_2} = \frac{١٠٠}{٥٠٠} = ٠,٢$ ، $ن_2 = ٥٠٠$

∴ حدود الثقة = $(٠,٥ - ٠,٢) \pm ٢,٥٨ \sqrt{\frac{٠,٥(١-٠,٥)}{٤٠٠} + \frac{٠,٢(١-٠,٢)}{٥٠٠}}$

$= ٠,٣ \pm ٢,٥٨ \sqrt{٠,٠٠٠٦ + ٠,٠٠٠٣}$

$= ٠,٣ \pm ٢,٥٨ \times ٠,٠٣$

$= ٠,٣ \pm ٠,٠٧٧$

وبذلك نجد أن

الحد الأعلى للفرق بين النسبتين = ٣٧٧ , ٠ أي ٣٧,٧٪

الحد الأدنى للفرق بين النسبتين = ٢٢٣ , ٠ أي ٢٢,٣٪

(١١ ـ ٦) اختبـارات الفـروض

بعد أن أوضحنا توزيع المعاينة وتقدير حدود الثقة للأوساط والنسبة والفروق بين الأوساط والفروق بين النسب فقد حان الوقت لدراسة موضوع اختبارات الفروض الذي يعتبر الموضوع الأساسي الثاني في الإحصاء.

وتعتبر اختبارات الفروض محاولة إلى الوصول لقرار معين سواء كان بالرفض أو القبول لغرض معين متعلق بإحدى معالم المجتمع مثل النسبة ح في حالة ما إذا كان المجتمع يتبع توزيع ذي الحدين أو تو، نحر إذا ما كان المجتمع يتبع التوزيع المعتدل. ويمكن مقارنة القيمة المفروضة لمعلمة المجتمع بالقيمة المقدرة لهذه المعلمة من العينة، فإذا ما كانت الفروق صغيرة (مقارنة بقيم القراءات) فإنها تعزى إلى الصدفة وتسمى فروق غير معنوية، وإذا ما كانت الفروق كبيرة (مقارنة بقيم القراءات) فإنه يمكن أن تسمى فروقًا حقيقية أو معنوية. وبذلك يمكن تسمية اختبارات الفروض بالاختبارات المعنوية. فعلى سبيل المثال إذا أخذنا عينة مكونة من ١٦ طالبًا من طلاب جامعة الملك سعود، وحسبنا متوسط الوزن للعينة $\bar{س}$، وكانت قيمة $\bar{س}$ تساوي ٦٥ كجم وإذا افترض الباحث أن متوسط الوزن لمجتمع الطلاب في الجامعة تو يساوي ٦٨ كجم، وأن الانحراف المعياري نحر لوزن مجتمع الطلاب معروف ويساوي ٦ كجم. والمطلوب معرفة صحة اختبار الفرض بأن تو = ٦٨ أو لا، وسوف نرمز له $فر_{.}$، ويسمى الفرضية الأولية أو فرض العدم. حيث نفترض عدم وجود فرق حقيقي بين متوسط المجتمع الحقيقي والقيمة المفروضة وأن الفروق المشاهدة في العينة إنما تعزى إلى الصدفة. ولاختبار ذلك نكوّن إحصائية يكون توزيعها معروفًا حتى نتمكن من اتخاذ قرار بشأن الفرض $فر_{.}$ من حيث القبول أو الرفض. والإحصائية التالية

$$ص = \frac{\bar{س} - تو}{نحر\,(\bar{س})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

بالنسبـة لأوزان عينـة من طلاب الجـامعة التي سبق ذكرها . نعلم مما سبق أن هذه الإحصائية تتبع التوزيع المعتدل القياسي ، ويمكن أن نقسم مجال تغير هذه الإحصائية (ص) السابقة إلى منطقتين ، المنطقة الأولى تسمى منطقة القبول وهي التي يكون فيها مقـدار احتـمال حدوث الإحصـائية (ص) كبـيرًا عندما يكون اختبار الفرض (فر٠) صحيحًـا ، والمنـطقـة الثانية تسمى منطقة الرفض للفرض فر٠ ، وذلك عندما يكون احتـمال حدوث الإحصـائية (ص) قليلاً أو نادر الحـدوث عندما يكون الفرض فر٠ صحيحًا وأي فرض آخر يختلف عن فر٠ يسمى الفرض البديل ، ويرمز له بالرمز فر١ وفي حالة أوزان طلاب الجامعة يمكن أن يكون الفرض البديل (فر١) أحد الفروض التالية

تو ≠ ٦٨ أو تو < ٦٨ أو تو > ٦٨ .

(١١ ـ ٦ ـ ١) : الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

ينتج عن أي قرار إحصائي نوعان من الخطأ . فإذا رفضنا الفرضية الأولية أو فرض العدم (فر٠) . وكان صحيحًا نكون قد ارتكبنا خطأ من النوع الأول باحتمال قدره أ وأحيانًا تسمى أ مستوى المعنوية وتأخذ قيمًا صغيرة مثل ٠,٠١ أو ٠,٠٥ أو ٠,١ . . . . وبنـاء على قيمـة أ وتـوزيع الإحصائية ص يمكن أن نحدد منطقتي الرفض والقبول لفرض العدم (فر٠) . أما الخطأ من النوع الثاني فهو أن نقبل فرض العدم (فر٠) عندما يكون غير صحيح ، ونرمز لهذا النوع من الخطأ بالرمز ب .

يمكن توضيح منطقتي الرفض والقبول لفرض العدم (فر٠) حسب نوع الفرض البديل (فر١) ويمكن توضيح ذلك باستخدام المتوسط (تو) كالتالي :

أ ـ الفرض البديل بطرفين

عندما يكون فرض العدم فر٠ والفرض البديل فر١ على الصورة التالية

فر٠ : تو = تو٠ ،

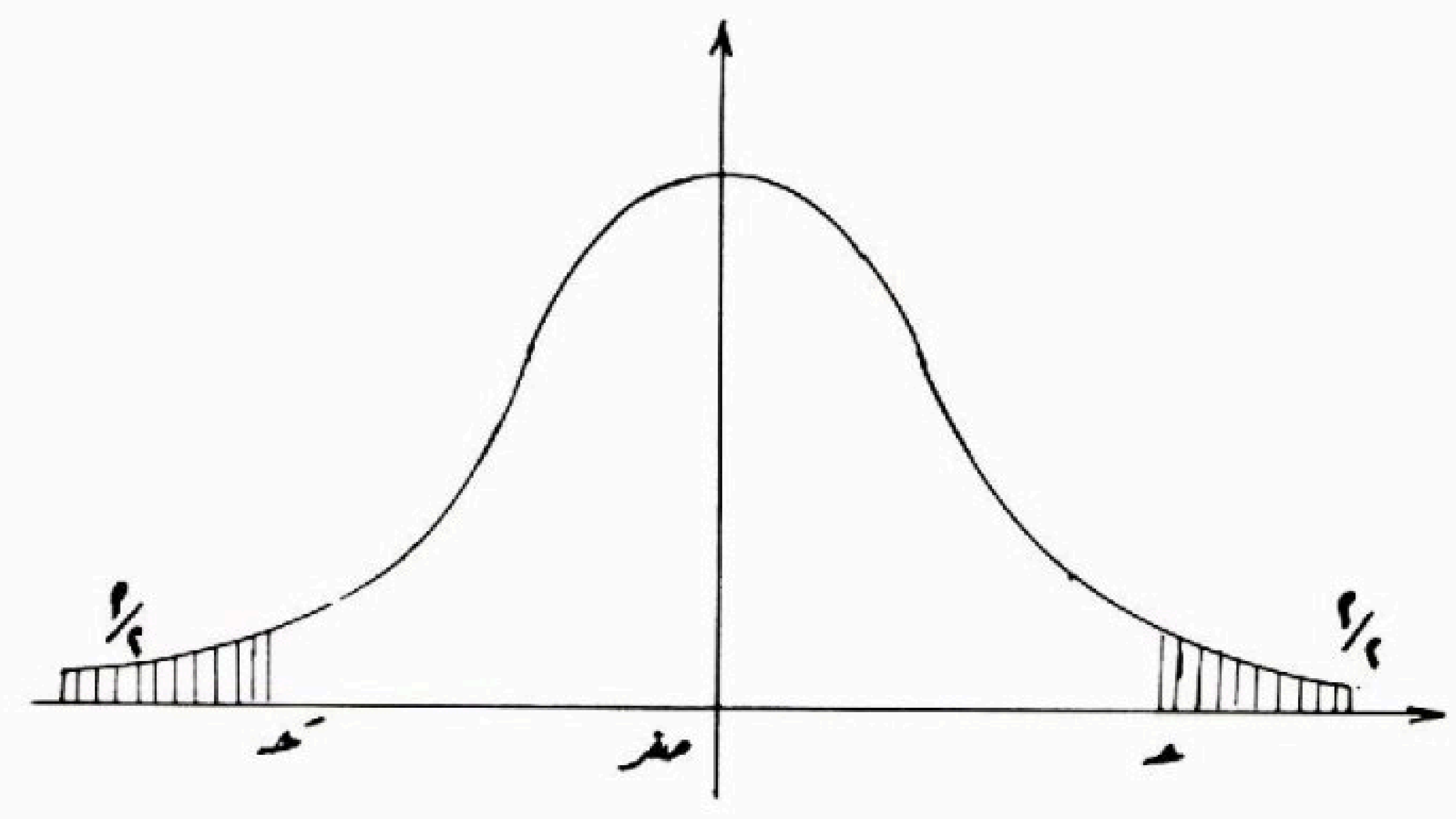
فر١ : تو ≠ تو٠

وفي مثال أوزان الطلاب يكون

فر. : تو = ٦٨ ،

فر١ : تو ≠ ٦٨

فإنه يكون نصف الخطأ من النوع الأول على طرفي التوزيع للإحصائية ص كما هو موضح بالجزء المظلل في الرسم التالي



شكل (١١ ـ ٢) : منطقة الرفض لغرض العدم من الطرفين

ويكون الاحتمال ح (ص ≶ - جـ) = ح (ص > جـ) = $\frac{أ}{٢}$

ب ـ الفرض البديل ذو الطرف الأعلى

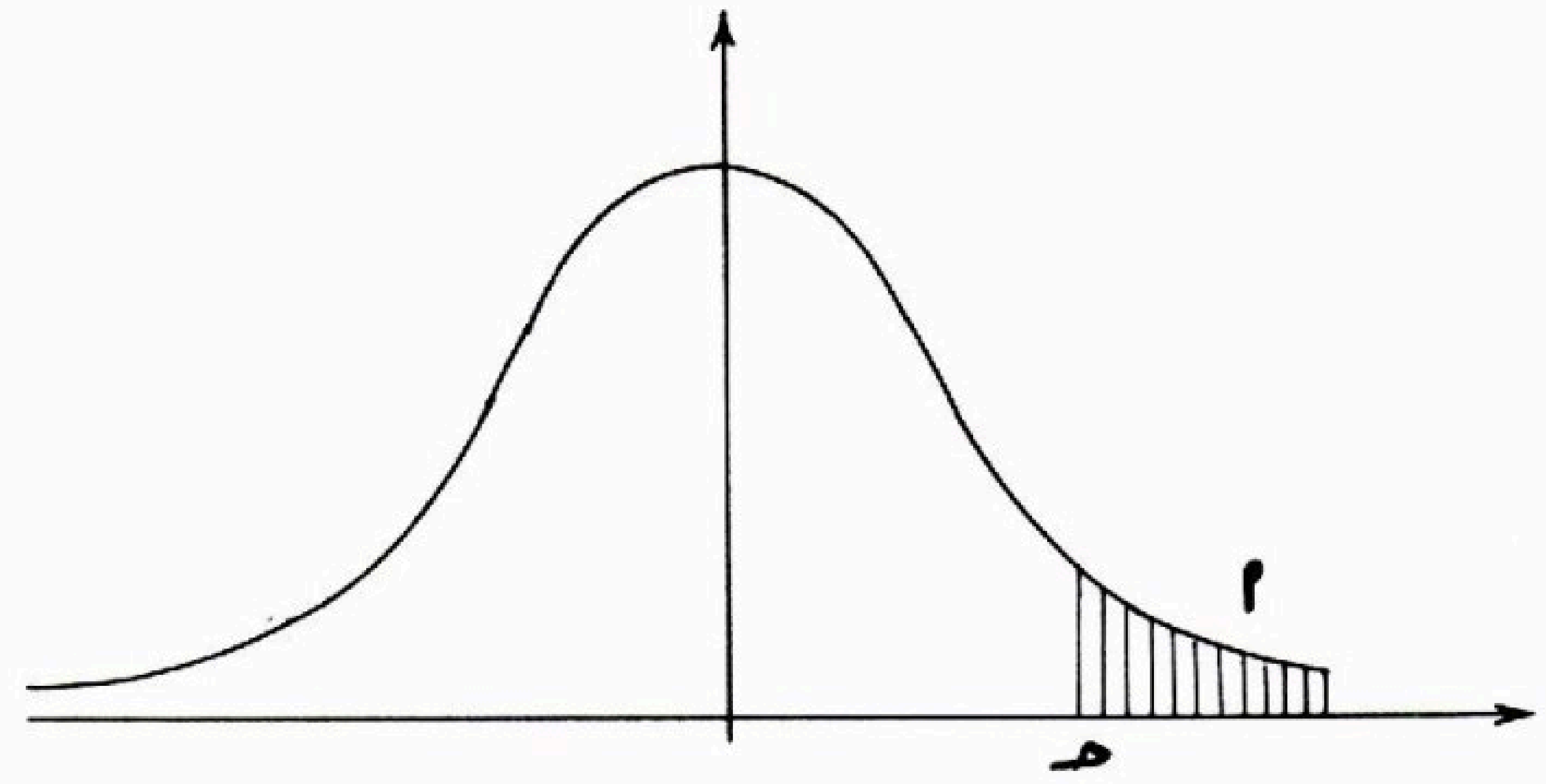
وهو عندما يكون فر. ، فر١ على الصورة التالية :

تو = تو. ، تو > تو.

وفي مثال أوزان الطلاب

فر. : تو = ٦٨ ، فر١ : تو > ٦٨

فإن الخطأ من النوع الأول أ يكون على الطرف الأعلى لتوزيع الإحصائية ص كما هو موضح بالجزء المظلل في الرسم التالي



شكل (١١ ـ ٣): منطقة الرفض لفرض العدم من الطرف الأيمن

ويكون الاحتمال ح (ص > جـ) = أ

جـ ـ الفرض البديل بالطرف الأدنى

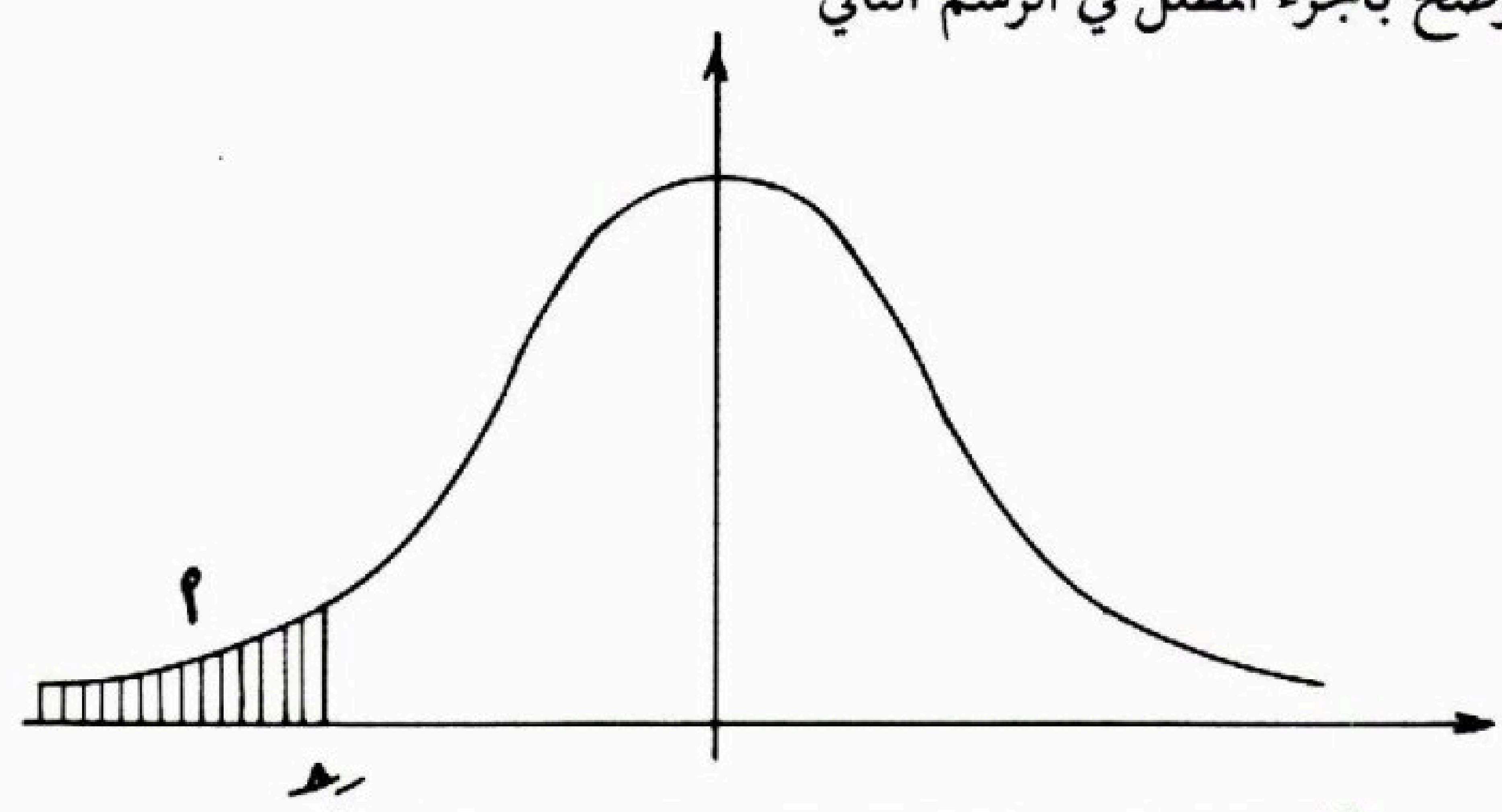
وهو عندما يكون فر$_0$ ، فر$_1$ على الصورة التالية:

فر$_0$: تو = تو$_0$ ، فر$_1$: تو < تو$_0$

وفي مثال أوزان الطلاب يكون

فر$_0$: تو = ٦٨ ، فر$_1$: تو < ٦٨

ويكون الخطأ من النوع الأول أ عند الطرف الأدنى لتوزيع الإحصائية ص كما هو موضح بالجزء المظلل في الرسم التالي



شكل (١١ ـ ٤): منطقة الرفض لفرض العدم من الطرف الأيسر

ويكون الاحتمال ح (ص < -جـ) = أ

والقيم جـ ، -جـ تسمى الحدود الحرجة التي تفصل بين منطقتي الرفض والقبول لفرض العدم فر. عندما يكون صحيحًا. وعندما أ = ٠,٠٥ فإن القيم الحرجة للإحصائية ص عندما يكون الفرض البديل ذا طرفين تكون جـ = ١,٩٦ ، -جـ = -١,٩٦ وعندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد أعلى أو أدنى فإن قيمة جـ = ١,٦٤٥ أو -جـ = -١,٦٤٥ وحيث إن الإحصائية (٨) تتبع التوزيع الطبيعي القياسي، وتقع قيم ص المحسوبة من (٨) خارج منطقة القبول أي خارج الحدود ١,٩٦ ، -١,٩٦ . عندما يكون الفرض البديل فر١ من طرفين فإننا نرفض فر. عند مستوى معنوية ٠,٠٥ أو ٥٪ أي أنه يكون هناك ٥ فرص في كل ١٠٠ فرصة، إننا سوف نرفض الفرض فر. عندما يكون صحيحًا. وإننا سنكون واثقين بنسبة ٩٥٪ أننا سنتخذ القرار الصحيح. وتسمى النسبة ٩٥٪ بدرجة الثقة في اتخاذ القرار الصحيح. وعندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد هو الطرف الأعلى وتقع قيم ص المحسوبة من (٨) خارج منطقة القبول أي ص > ١,٦٤٥ فإننا نرفض فر. بمستوى معنوية قدره ٠,٠٥ وعندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد هو الطرف الأدنى وتقع قيم ص المحسوبة من (٨) خارج منطقة القبول أي أن ص < -١,٦٤٥ فإننا نرفض فر. بمستوى معنوية قدره ٠,٠٥ . وبالمثل عندما تكون أ = ٠,٠١ من طرفين أو من طرف واحد، والجدول التالي يبين قيم ص الحرجة لبعض قيم (أ) أي بعض مستويات المعنوية الأخرى، ويمكن الحصول عليها من الجداول الإحصائية للتوزيع الطبيعي القياسي في نهاية الكتاب [جدول رقم (٢)].

المستويات المعنوية وقيم ص الحرجة للفرض البديل من طرف واحد وطرفين

مستوى المعنوية أ	٠,١	٠,٠٥	٠,٠١	٠,٠٠٥	٠,٠٠٢
قيم ص الحرجة للفرض البديل من طرف واحد	± ١,٢٨	± ١,٦٤٥	± ٢,٣٣	± ٢,٥٨	± ٢,٨٨
قيم ص الحرجة للفرض البديل من طرفين	± ١,٦٤٥	± ١,٩٦	± ٢,٥٨	± ٢,٨١	± ٣,٠٨

ولاختبار الفرض فر$_{٠}$: تو = ٦٨ لمتوسط أوزان طلاب جامعة الملك سعود ضد الفرض البديل فر$_{١}$: تو $\neq$ ٦٨ عند مستوى معنوية أ = ٠,٠٥ ، أ = ٠,٠١ فإننا نحسب الإحصائية ص = $\frac{\bar{\text{س}} - \text{تو}}{\text{نحر}(\bar{\text{س}})}$ كالتالي :

$$\bar{\text{س}} = ٦٥ \quad ، \quad \text{تو} = ٦٨ \quad ، \quad \text{نحر}(\bar{\text{س}}) = \frac{\text{نحـ}}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{٦}{\sqrt{١٦}} = ١,٥$$

$$\text{ص} = \frac{٦٥ - ٦٨}{١,٥} = \frac{-٣}{١,٥} = -٢$$

إذا كانت منطقة الرفض للفرض فر$_{٠}$ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ خارج حدود $\pm$ ١,٩٦ وحيث إن قيمة ص المحسوبة = -٢ تقع في منطقة الرفض فإننا نرفض فر$_{٠}$ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ أو درجة ثقة قدرها ٩٥٪ وبالتالي يكون قرار الرفض صحيح .

وإذا كانت منطقة الرفض لـ فر$_{٠}$ عند مستوى معنوية ٠,٠١ خارج حدود $\pm$ ٢,٥٨ حيث إن القيمة ص المحسوبة = -٢ تقع داخل منطقة القبول للفرض فر$_{٠}$. أي أننا لا نستطيع رفض فر$_{٠}$ عند مستوى معنوية ٠,٠١ وبعبارة أخرى يمكن القول إن قرار عدم الرفض صحيح بدرجة ثقة قدرها ٩٩٪ .

وعندما تقع قيمة ص المحسوبة بين حدي الرفض لمستوى معنوية ٠,٠٥ ، ٠,٠١ يقال لهذه القيمة إنها محتملة المعنوية ، وعندما تقع قيمة ص المحسوبة خارج حدي الرفض لمستوى المعنوية ٠,٠٥ ، ٠,٠١ يقال لهذه القيمة إنها مرتفعة المعنوية .

وسوف نوضح فيما يلي اختبارات الفروض للإحصائية ص عندما تمثل الأوساط أو النسب أو الفروق بين الأوساط أو الفروق بين النسب وذلك عندما يكون تباين المجتمعات معلوما .

(١١ ـ ٦ ـ ٢) اختبارات الفروض للأوساط

عندما يكون تباين المجتمع (تبا) معلومًا فإن الإحصائية $\frac{\bar{س} - تو}{انحر(\bar{س})}$ تقترب من التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط = صفر وانحراف معياري = ١ ونرمز لهذه القيم بالرمز ص حيث ص = $\frac{\bar{س} - تو}{نحر_{\bar{س}}}$

ونبني اختبار الفروض $فر_٠$ ، $فر_١$ كالتالي:

$فر_٠$: تو = $تو_٠$ ، $فر_١$: تو $\neq$ $تو_٠$ عندما يكون الفرض البديل ذا طرفين

$فر_٠$: تو = $تو_٠$ ، $فر_١$: تو $\lessgtr$ $تو_٠$ عندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد

ونختار مستوى المعنوية للاختبار (أ) ونختبر ما إذا كانت قيمة الإحصائية ص المحسوبة واقعة داخل منطقة الرفض أو خارجها فإنه يمكن أن نقرر رفضها أو عدم رفضها، ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثـال (٩)

أخذت عينة مكونة من ٣٦ عجلاً من مزرعة لتسمين الماشية فوجد أن متوسط الوزن للعينة $\bar{س}$ = ١٩٠ كجم.

اختبر الفرض القائل: إن متوسط العجول بالمزرعة تو = ٢٠٠ كجم، إذا علم أن الانحراف المعياري لأوزان العجول بالمزرعة يساوي ١٨ كجم.

الحـــل

ولحل المثال نكون فرض العدم ($فر_٠$) والفرض البديل ($فر_١$) على الصورة التالية

$فر_٠$: تو = ٢٠٠ كجم ، $فر_١$: تو $\neq$ ٢٠٠ كجم

أي أن الفرض البديل ذو طرفين وتكون الحدود الحرجة للاختبار عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ ، ٠,٠١ هي (١,٩٦ ، -١,٩٦)، (٢,٥٨ ، -٢,٥٨) على الترتيب.

$\because$ $\bar{\text{س}}$ = ١٩٠ كجم، تو = ٢٠٠ كجم، ن = ٣٦ عجلاً

$$\therefore \text{ص} = \frac{\bar{\text{س}} - \text{تو}}{\text{نحر}_{\bar{\text{س}}}} = \frac{١٩٠ - ٢٠٠}{\frac{١٨}{\sqrt{٣٦}}} = \frac{-١٠}{\frac{١٨}{٦}}$$

$$= \frac{-١٠}{٣} = -٣,٣٣$$

ومما سبق نلاحظ أن قيمة ص المحسوبة = -٣,٣٣ واقعة خارج حدود القيم الحرجة لكل من مستويي المعنوية ٠,٠٥ ، ٠,٠١ أي أننا نرفض الفرض $\text{فر}_{٠}$ عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ ، ٠,٠١ أي أن قيمة ص = -٣,٣٣ عالية المعنوية.

(١١ - ٦ - ٣) اختبارات الفروض للنسبة

الإحصائية $\text{ص} = \frac{\text{ح}_{\text{د}} - \text{ح}_{٠}}{\text{نحر}(\text{ح}_{\text{د}})}$ تقترب من التوزيع الطبيعي القياسي وبذلك يمكن أن نكوّن اختبار الفروض لكل من $\text{فر}_{٠}$ ، $\text{فر}_{١}$ كالتالي

$\text{فر}_{٠} : \text{ح} = \text{ح}_{٠}$ ،

$\text{فر}_{١} : \text{ح} \neq \text{ح}_{٠}$ عندما يكون الفرض البديل ذا طرفين،

$\text{فر}_{٠} : \text{ح} = \text{ح}_{٠}$ ،

$\text{فر}_{١} : \text{ح} \gtrless \text{ح}_{٠}$ عندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد،

ونختار مستوى المعنويةأ ونختبر الفرض. إذا كانت قيمة الإحصائية المحسوبة ص واقعة داخل منطقة رفض $\text{فر}_{٠}$ أو خارجها، ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي.

مثـال (١٠)

إذا أخذت عينة مكونة من ٢٠٠ وصفة طبية بإحدى المستشفيات وجد منها ٨٠ وصفة تحتوي على عقار «البنادول». فاختبر الفرض القائل: إن نسبة الوصفات التي بها عقار «البنادول» هي ٥٠٪. وذلك باستخدام ٠,٠١ مستوى معنوية.

الحــل

نكوّن أولاً اختبار الفروض $فر_{.}$ ، $فر_{١}$ كما يلي :

$$فر_{.} : ح = ٠,٥ \text{ ، } فر_{١} : ح \neq ٠,٥$$

أي أن الفرض البديل بطرفين، فتكون الإحصائية ص كالتالي

$$ص = \frac{ح_{د} - ح_{.}}{نحر\ (ح_{.})}$$

$$\text{حيث } نحر\ (ح_{.}) = \sqrt{\frac{ح_{.}\ (١ - ح_{.})}{ن}}$$

أي أن

$$ح_{د} = \frac{٨٠}{٢٠٠} = ٠,٤ \text{ ، } ح_{.} = ٠,٥$$

ومن ذلك نجد أن

$$ص = \frac{٠,٤ - ٠,٥}{\sqrt{\frac{٠,٥\ (١ - ٠,٥)}{٢٠٠}}} = \frac{-٠,١}{\sqrt{\frac{٠,٢٥}{٢٠٠}}}$$

$$= \frac{-٠,١}{٠,٠٣٥} = -٢٨,٦$$

منطقة الرفض للفرض عند مستوى معنوية ٠,٠١ أي خارج الحدود الحرجة ٢,٥٨ ، -٢,٥٨ وقيمة ص المحسوبة = -٢٨,٦ واقعة في منطقة رفض $فر_{.}$.

مما سبق نرفض الفرض القائل إن نسبة الوصفات الطبية التي بها عقار «البنادول» هي ٥٠٪ وذلك عند مستوى معنوية ٠,٠١ .

(١١ ـ ٦ ـ ٤) اختبارات الفروض بين الأوساط

سبق أن أوضحنا أن توزيع المعاينة للفروض بين الأوساط ($\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢}$) يقترب

من التوزيع المعتدل بتوقع تـو $(\bar{س}_1 - \bar{س}_2)$ = تو$_1$ − تو$_2$ ، وخطأ معياري

نحر $(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = \sqrt{\frac{تبا_1}{ن_1} + \frac{تبا_2}{ن_2}}$ وبذلك تكون الاحصائية

ص = $\frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (تو_1 - تو_2)}{نحر\ (\bar{س}_1 - \bar{س}_2)}$ لها توزيع معتدل قياسي بمتوسط = صفر

وتباين = ١ وإننا نرغب في تكوين اختبار الفروض فر$_0$ ، فر$_1$ عند مستوى معنوية أ كالتالي

فر$_0$: تو$_1$ = تو$_2$ ، فر$_1$: تو$_1$ $\neq$ تو$_2$ الفرض البديل ذو طرفين

فر$_0$: تو$_1$ = تو$_2$ ، فر$_1$: تو$_1$ $\gtrless$ تو$_2$ الفرض البديل ذو طرف واحد

وباعتبار صحة الفرض فر$_0$ فإن القيمة تو$_1$ − تو$_2$ = صفر أي أن العينتين اللتين متوسطهما $\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_2$ مسحوبتان من مجتمعتين لهما نفس الوسط الحسابي، ويمكن كتابة الإحصائية ص السابقة كالتالي :

$$ص = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{تبا_1}{ن_1} + \frac{تبا_2}{ن_2}}}$$

وبذلك يمكن اختبار فرض العدم (فر$_0$) ضد الفرض البديل (فر$_1$)، وذلك عند مستوى معنوية مناسب ولتوضيح كيفية ذلك ندرس حل المثال التالي.

مثال (١١)

أعطي اختبار لفصلين يتكون الفصل الأول من ٥٠ طالبًا ويتكون الفصل الثاني من ٦٠ طالبًا، وكان متوسط الدرجات للفصل الأول ٦٤ درجة بانحراف معياري قدره ٦ درجات. بينما كان متوسط الدرجات للفصل الثاني ٦٦ درجة بانحراف معياري قدره ٥ درجات. اختبر الفرض القائل: إنه لا يوجد اختلاف معنوي في أداء الفصلين، وذلك عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

الحـــل

نكوّن صيغة الفروض لـ $فر_{.}$ ، $فر_{١}$ كالتالي:

$فر_{.}$: $تو_{١} = تو_{٢}$ ،

$فر_{١}$: $تو_{١} \neq تو_{٢}$ الفرض البديل ذو طرفين

وباعتبار صحة الفرض $فر_{.}$ فإن الإحصائية ص تعطى كالتالي:

$$ص = \frac{\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢}}{\sqrt{\frac{تبا_{١}}{ن_{١}} + \frac{تبا_{٢}}{ن_{٢}}}}$$

حيث

$\bar{س}_{١}$ = ٦٤ درجة ، $\bar{س}_{٢}$ = ٦٦ درجة

$نحر_{١}$ = ٦ درجات ، $نحر_{٢}$ = ٥ درجات

$ن_{١}$ = ٥٠ طالبًا ، $ن_{٢}$ = ٦٠ طالبًا

$$\therefore ص = \frac{٦٤ - ٦٦}{\sqrt{\frac{(٦)^٢}{٥٠} + \frac{(٥)^٢}{٦٠}}} = \frac{-٢}{\sqrt{\frac{٣٦}{٥٠} + \frac{٢٥}{٦٠}}} = \frac{-٢}{\sqrt{٠,٧٢ + ٠,٤٢}}$$

$$= \frac{-٢}{\sqrt{١,١٤}} = \frac{-٢}{١,٠٧} = -١,٨٧$$

مما سبق نجد أن منطقة الرفض للفرض $فر_{.}$ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ خارج الحدود الحرجة ١,٩٦ ، -١,٩٦ ونجد أن قيمة ص المحسوبة هي ص = -١,٨٧ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ أي لا نستطيع رفض $فر_{.}$ عند معنوية ٠,٠٥ أي لا يوجد فروق معنوية بين أداء الفصلين.

(١١ ـ ٦ ـ ٥) اختبار الفروض للفروق بين النسب

سبق أن تكلمنا عن توزيع المعاينة للفرق بين النسب ($ح_{د١} - ح_{د٢}$) بأنه يقترب من التوزيع المعتدل بتوقع تو ($ح_{د١} - ح_{د٢}$) = $ح_{١} - ح_{٢}$ وخطأ معياري

نحر $(ح_{د_1} - ح_{د_2})$ يساوي $\sqrt{\frac{ح_1(1-ح_1)}{ن_1} + \frac{ح_2(1-ح_2)}{ن_2}}$ فإن الإحصائية

$ص = \frac{(ح_{د_1} - ح_{د_2}) - (ح_1 - ح_2)}{نحر(ح_{د_1} - ح_{د_2})}$ يكون لها توزيع معتدل قياسي بمتوسط = صفر وتباين = ١ .

والآن نقوم بتكوين اختبار الفروض لكل من $فر_0$ ، $فر_1$ عند مستوى معنوية أ كالتالي .

$فر_0 : ح_1 = ح_2$ ، $فر_1 : ح_1 \neq ح_2$ الفرض البديل ذو طرفين،

$فر_0 : ح_1 = ح_2$ ، $فر_1 : ح_1 \gtrless ح_2$ الفرض البديل ذو طرف واحد

وباعتبار صحة الفرض $فر_0$ فإن القيمة $ح_1 - ح_2$ = صفر أي أن العينتين اللتين نسبتهما $ح_{د_1}$ ، $ح_{د_2}$ مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس النسبة، ويمكن كتابة الإحصائية ص السابقة كالتالي :

$$ص = \frac{ح_{د_1} - ح_{د_2}}{\sqrt{\frac{ح(1-ح)}{ن_1} + \frac{ح(1-ح)}{ن_2}}}$$

$$حيث\ ح = \frac{ن_1 ح_{د_1} + ن_2 ح_{د_2}}{ن_1 + ن_2}$$

وبذلك يمكن اختبار فرض العدم $(فر_0)$ ضد الفرض البديل $(فر_1)$ عند مستوى معنوية مناسب ونوضح ذلك بالمثال التالي .

مثال (١٢)

مجموعتان و ، ب تتكون المجموعة و من ٨٠ مريضًا بمرض معين، والمجموعة ب تتكون من ١٢٠ مريضًا أعطيت المجموعة و مصلاً فشفي منها ٥٠ شخصًا. ولم تعطي المجموعة ب أي مصل فشفي منها ٦٠ شخصًا. اختبر الفرض القائل : إن المصل لا يساعد على الشفاء عند مستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحـــل

ولدراسة هذا المثال نكوّن أولاً الصيغ المناسبة للفروض فر٠ ، فر١ كما يلي :

فر٠ : $ح_١ = ح_٢$ ، فر١ : $ح_١ > ح_٢$ الاختبار البديل من طرف واحد ،

وباعتبار صحة الفرض فر٠ فإن الإحصائية ص تعطى كالتالي :

$$ص = \frac{ح_{د١} - ح_{د٢}}{\sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن_١} + \frac{ح(١-ح)}{ن_٢}}} \qquad حيث\ ح = \frac{ن_١ ح_{د١} + ن_٢ ح_{د٢}}{ن_١ + ن_٢}$$

$$ح_{د١} = \frac{٥٠}{٨٠} = \frac{٥}{٨} \quad ، \quad ح_{د٢} = \frac{٦٠}{٢٠} = ٠,٥$$

$$ن_١ = ٨٠ \quad ، \quad ن_٢ = ١٢٠$$

$$\therefore ح = \frac{٨٠ \times \frac{٥}{٨} + ١٢٠ \times \frac{١}{٢}}{٨٠ + ١٢٠} = \frac{١١٠}{٢٠٠} = ٠,٥٥$$

$$ص = \frac{\frac{٥}{٨} - \frac{١}{٢}}{\sqrt{\frac{٠,٥٥ \times ٠,٤٥}{٨٠} + \frac{٠,٥٥ \times ٠,٤٥}{١٢٠}}} = \frac{٠,١٢٥}{\sqrt{٠,٠٠٣١ + ٠,٠٠٢١}}$$

$$= \frac{٠,١٢٥}{\sqrt{٠,٠٠٥٢}} = \frac{٠,١٢٥}{٠,٠٧٢} = ١,٧٤$$

مما سبق نجد أن منطقة الرفض للفرض فر٠ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ خارج الحدود الحرجة لمنطقة القبول ١,٩٦ ، -١,٩٦ ، ونجد قيمة ص المحسوبة = ١,٧٤ داخل الحدود الحرجة السابقة أي أننا لا نستطيع رفض الفرض فر٠ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ أي أن الفروق المشاهدة للنسبتين $ح_{د١}$ ، $ح_{د٢}$ ترجع إلى الصدفة . أي أن المصل غير فعّال .

(١١ ـ ٦ ـ ٦) توزيع الأوساط والفروق بين الأوساط للعينات الصغيرة

افترضنا فيما سبق عند تقدير فترات الثقة واختبارات الفروض لكل من الأوساط والفروق بين الأوساط أن تباين المجتمع (تبا) معلوم. وإذا لم يكن معلومًا فلابد أن يكون حجم العينات كبيراً ولا يقل حجم العينة ن عن ٣٠ مفردة حتى يمكننا أن نقدر التبـاين (تبـا) للمجتمع من العينة وليكن (تبع)، ونستخدم التباين المقدر (تبع) في الإحصائية ص لكل من الأوساط والفروق بين الأوساط بدلاً من تبا فيقترب توزيع الإحصائية ص من التوزيع المعتدل القياسي. وبذلك نتمكن من حساب حدود الثقة للتقدير بفترة وكذلك إجراء اختبارات الفروض كما سبق.

ولكن عندما يكون الانحراف المعياري للمجتمع (نحر) غير معلوم لنا وحجم العينات صغيراً (أي أن حجم العينة ن يقل عن ٣٠ مفردة) فإن الإحصائيتين السابقتين

$$\frac{\bar{\text{س}} - \text{تو}}{\text{نحر}_{\bar{\text{س}}}} \quad ، \quad \frac{(\bar{\text{س}}_{١} - \bar{\text{س}}_{٢}) - (\text{تو}_{١} - \text{تو}_{٢})}{\text{نحر}\,(\bar{\text{س}}_{١} - \bar{\text{س}}_{٢})} \quad ،$$

لا تقتربا من التوزيع المعتدل القياسي ولا نستطيع استخدام الإحصائية ص السابقة لها. وفي هذه الحـالـة فإن الإحصائيات السابقة تتبع توزيعًا آخر يسمى توزيع تي. وتستخدم في هذه الحالة الإحصائية تي التي تقابل الإحصائية ص فيما سبق. وذلك في حالة بيانات العينة مأخوذة من مجتمع طبيعي.

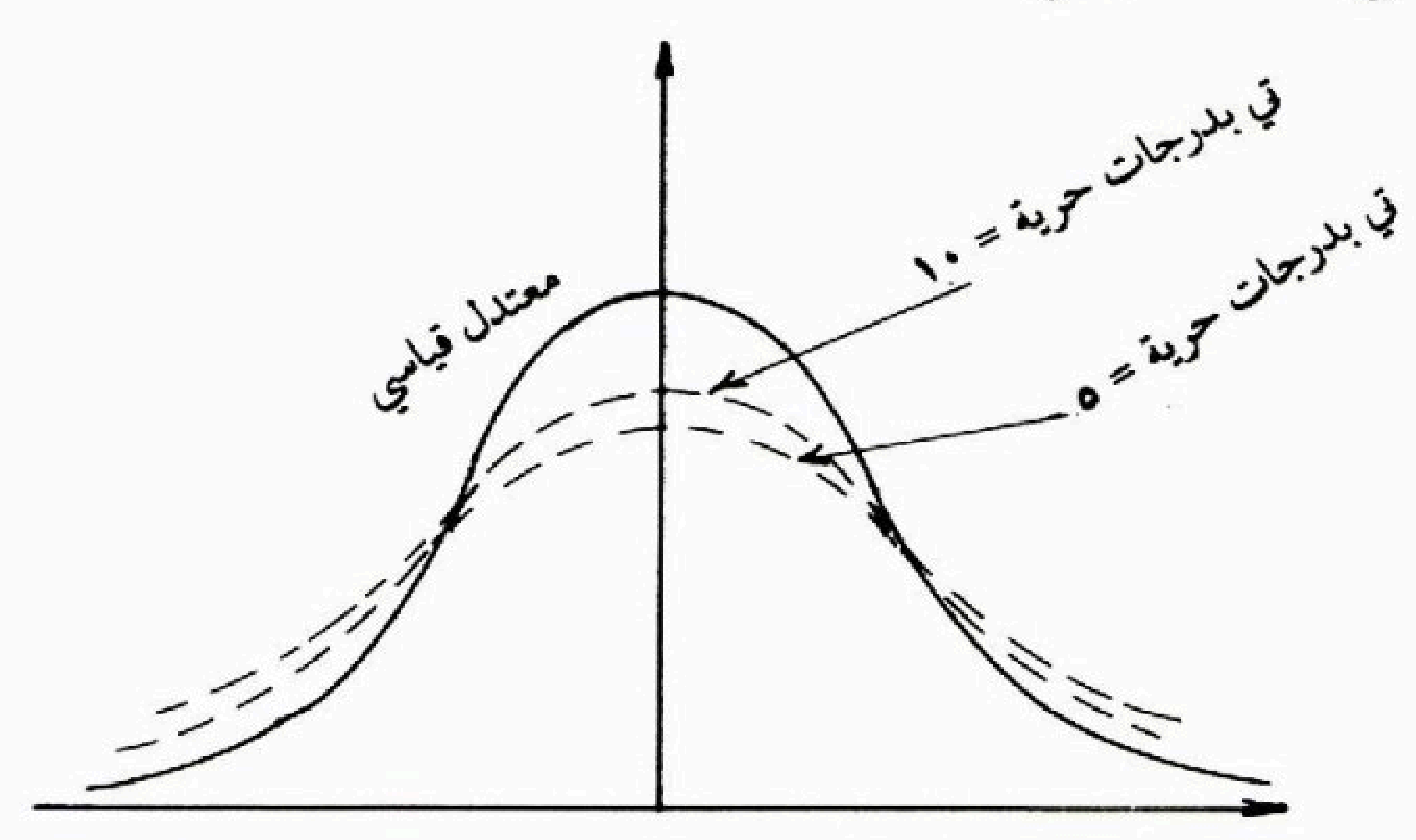
توزيع تـي

تعطى دالة كثافة الاحتمال ح (تي) لتوزيع تي كالتالي:

$$\text{ح}\,(\text{تي}) = \text{ك} \left[\frac{\text{تي}^{٢}}{\text{ن} - ١} + ١ \right]^{\frac{-\text{ن}}{٢}} \qquad -\infty < \text{تي} < \infty$$

ويسمى المقدار ن ـ ١ درجات الحرية. ولقد تبين أن هذا التوزيع لا يعتمد إلا على قيمة درجات الحرية (ن ـ ١) بشرط أن المتغير العشوائي الأساس س يتوزع توزيعًا معتدلاً. ويقترب توزيع تي من التوزيع المعتدل القياسي كلما زادت درجات الحرية فعندما تصل كمية درجـات الحـرية ٣٠ درجـة فينـطبق توزيع تي على التـوزيع الطبيعي القياسي

وتستخدم الإحصائية ص في هذه الحالة بدلاً من الإحصائية تي. ويعرف توزيع تي أيضًا **بتوزيع طالب**، وهو اسم مستعار لمكتشفه جوست (Gosset) في أوائل القرن العشرين. والشكل التالي يوضح المقارنة بين منحنى توزيع تي عند درجات حرية ٥، ١٠ ومنحنى توزيع المعتدل القياسي.



شكل (١١ ـ ٥): منحنى توزيع تي مقارنًا بمنحنى التوزيع الطبيعي

ويمكن إيجاد فترات الثقة واختبارات الفروض باستخدام الإحصائية تي لكل من الأوساط والفروق بين الأوساط كما سيتضح من الأمثلة التالية.

مثال (١٣)

إذا كان لدينا عينة مكونة من أوزان عشرة طلاب بالكجم كالتالي:

٧٩، ٦٣، ٦٥، ٧٤، ٦٩، ٧٠، ٧٣، ٦٨، ٧٦، ٦٣

١) اختبر ما إذا كانت العينة مأخوذة من مجتمع متوسطة ٦٦ كجم.

٢) احسب تقديرًا لحدود الثقة لمتوسط المجتمع عند مستوى معنوية ٠,٠٥.

الحـــل

ولحل المثال نحسب أولًا الوسط الحسابي ($\bar{س}$) للعينة من العلاقة $\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{٧٩ + ٦٣ + ٦٥ + ٧٤ + ٦٩ + ٧٠ + ٧٣ + ٦٨ + ٧٦ + ٦٣}}{\text{١٠}}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{٧٠٠}}{\text{٧٠}} = \text{٧٠ كجم}$$

بعد ذلك نحسب التباين للعينة (تبع) كتقدير لتباين المجتمع (تبا) ومنه نحسب الانحراف المعياري (نجع) كالتالي:

$$\text{تبع} = \frac{\text{١}}{\text{ن} - \text{١}} \text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^{\text{٢}}$$

$$\therefore \text{تبع} = \frac{\text{١}}{\text{٩}} [(\text{٩})^{\text{٢}} + (-\text{٧})^{\text{٢}} + (-\text{٥})^{\text{٢}} + (\text{٤})^{\text{٢}} + (-\text{١})^{\text{٢}} + (\text{٠})^{\text{٢}} + (\text{٣})^{\text{٢}} + (-\text{٢})^{\text{٢}} + (\text{٦})^{\text{٢}} + (-\text{٧})^{\text{٢}}]$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٩}} [\text{٨١ + ٤٩ + ٢٥ + ١٦ + ١ + ٠ + ٩ + ٤ + ٣٦ + ٤٩}]$$

$$= \frac{\text{٢٧٠}}{\text{٩}} = \text{٣٠}$$

ومنه نجد أن الانحراف المعياري للعينة هو:

$$\text{نجع} = \text{٥,٤٨}$$

$$\text{نجع}_{\text{س}} = \frac{\text{نجع}}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{\text{٥,٤٨}}{\sqrt{\text{١٠}}} = \frac{\text{٥,٤٨}}{\text{٣,١٦}} = \text{١,٧٣}$$

نكوّن الاختبار لفرض العدم (فر$_{\text{٠}}$) والفرض البديل (فر$_{\text{١}}$) وليكن عند مستوى معنوية أ = ٠,٠٥ مثلاً. ثم نحسب الإحصائية تي باستخدام مشاهدات العينة والفرض فر$_{\text{٠}}$ كالتالي

فر$_{\text{٠}}$: تو = ٦٦ ،

فر$_{\text{١}}$: تو $\neq$ ٦٦ الفرض البديل ذو طرفين

$$\therefore \text{تي} = \frac{\bar{\text{س}} - \text{تو}}{\text{نجع} (\bar{\text{س}})} = \frac{\text{٧٠} - \text{٦٦}}{\text{١,٧٣}} = \frac{\text{٤}}{\text{١,٧٣}} = \text{٢,٣١}$$

نقارن قيمة تي المحسوبة ٢,٣١ بالقيمة الموجودة بجداول تي (جدول رقم ٣) الموجودة بآخر الكتاب أمام درجات حرية = ن - ١ = ١٠ - ١ = ٩ وتحت مستوى المعنوية ٠,٠٥.

قيمة تي من الجدول: تي (أ، ن - ١) = تي (٠,٠٥، ٩) = ٢,٢٦٢.

مما سبق نجد أن قيمة تي = ٢,٣١ واقعة في منطقة الرفض للفرض فر. عندما يكون صحيحًا وهي خارج الحدود الحرجة لمنطقة القبول فر. وتكون كالتالي (٢,٢٦٢، -٢,٢٦٢).

وبذلك نرفض الفرض فر. القائل: إن العينة مأخوذة من مجتمع متوسطه ٦٦ كجم وبهذا نكون قد توصلنا إلى حل الفقرة الأولى من المثال.

ولإيجاد تقدير حدود الثقة لمتوسط المجتمع (تو) عند مستوى معنوية ٠,٠٥ نكوّن فترة الثقة كالتالي:

$$\bar{س} - تي\,(٠,٠٥،\ ٩)\frac{نجـع}{\sqrt{ن}} \leqslant تو \leqslant \bar{س} + تي\,(٠,٠٥،\ ٩)\frac{نجـع}{\sqrt{ن}}$$

٧٠ - ٢,٢٦٢ × ١,٧٣ ≤ تو ≤ ٧٠ + ٢,٢٦٢ × ١,٧٣

٧٠ - ٣,٩١ ≤ تو ≤ ٧٠ + ٣,٩١

٦٦,٠٩ ≤ تو ≤ ٧٣,٩١

ومن ذلك نجد أن حديَّ فترة الثقة هما:

الحد الأعلى للوزن = ٧٣,٩١ كجم

والحد الأدنى للوزن = ٦٦,٠٩ كجم

مثـال (١٤)

في أحـد مراكز البحوث الخاصة بالزراعة، كان المطلوب اختبار متوسط انتاج نوعين من القمح و، ى.

فاختير لهذا الغرض ١٨ قطعة من الأرض تتساوي في المساحة والظروف المتشابهة من ناحية الخصوبة والرى والتسميد، وزرع عشر قطع بالقمح من النوع و، وزرعت ثمان القطع الباقية بالقمح من النوع ى، فكان متوسط المحصول لفدان القمح من النوع و ٩٨٠ صاعًا بانحراف معياري هو ٤٠ صاعًا ومتوسط المحصول لفدان القمح من النوع ى ٨٤٠ صاعًا بانحراف معياري هو ٣٠ صاعًا والمطلوب إيجاد ما يلي:

١) اختبر ما إذا كان متوسط الإنتاج للفدان لنوع القمح ويساوي متوسط انتاج الفدان للقمح من النوع ى.

٢) احسب تقديرًا لحدود الثقة للفرق بين متوسطي الإنتاج للقمح من النوع و والنوع ى عند مستوى معنوية ٠١, ٠.

الحـــل

لحل الفقرة الأولى من المثال نكوّن أولاً صيغ فرض العدم $\text{فر}_{\cdot}$ والفرض البديل $\text{فر}_{١}$، وليكن عند مستوى معنوية ٠١, ٠ مثلاً، ثم نحسب الإحصائية تي باستخدام المشاهدات بالعينتين والفرض $\text{فر}_{\cdot}$ كالتالي:

$\text{فر}_{\cdot} : \text{تو}_{١} = \text{تو}_{٢}$ ، $\text{فر}_{١} : \text{تو}_{١} \neq \text{تو}_{٢}$ (أي أن الفرض البديل بطرفين)

$$\text{تي} = \frac{\bar{\text{س}}_{١} - \bar{\text{س}}_{٢}}{\text{نجع}\sqrt{\frac{١}{\text{ن}_{١}} + \frac{١}{\text{ن}_{٢}}}} \quad ،$$

$$\text{تبع} = \frac{(\text{ن}_{١} - ١)\,\text{تبع}_{١} + (\text{ن}_{٢} - ١)\,\text{تبع}_{٢}}{(\text{ن}_{١} + \text{ن}_{٢} - ٢)}$$

وحيث $\bar{س}_1$ = ٩٨٠ صاع ، $\bar{س}_2$ = ٨٤٠ صاع

$ن_1$ = ١٠ قطع ، $ن_2$ = ٨ قطع

$نجع_1$ = ٤٠ صاعًا ، $نجع_2$ = ٣٠ صاعا ،

تبع = $(نجع)^2$

$$\therefore \quad تبع = \frac{٩ \times ١٦٠٠ + ٧ \times ٩٠٠}{١٠ + ٨ - ٢} = ١٢٩٤,٧٥$$

$$نجع = \sqrt{تبع} = \sqrt{١٢٩٤,٧٥}$$

نجع = ٣٦ صاعًا تقريبًا

$$\therefore \quad تي = \frac{٩٨٠ - ٨٤٠}{٣٦\sqrt{\frac{١}{١٠} + \frac{١}{٨}}} = \frac{١٤٠}{٣٦ \times ٠,٤٧} = \frac{١٤٠}{١٦,٩٢} = ٨,٢٧$$

نقارن قيمة تي المحسوبة ٨,٢٧ بالقيمة الموجودة بجداول تي أمام درجات الحرية $ن_1 + ن_2 - ٢ = ١٠ + ٨ - ٢ = ١٦$ وتحت مستوى معنوية ٠,٠١ وتكون قيمة تي من الجداول كالتالي:

تي (٠,٠١ ، ١٦) = ٢,٩٢

مما سبق نجد أن قيمة تي المحسوبة = ٨,٢٧ واقعة في منطقة رفض $فر_.$ وهي خارج الحدود الحرجة لمنطقة القبول لـ $فر_.$ وهي (٢,٩٢ ، -٢,٩٢) وبذلك نرفض الفرض $فر_.$ القائل إنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطي إنتاج القمح من النوعين.

ولحل الفقرة الثانية أي لحساب تقدير حدود الثقة للفرق بين متوسطي الإنتاج لنوعي القمح ($تو_1 - تو_2$) عند مستوى معنوية الثقة كالتالي:

$$(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - تي (٠,٠١ ، ١٦) \; نجع \; (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) \leqslant (تو_1 - تو_2)$$

$$\leqslant (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) + تي (٠,٠١ ، ١٦) \; نجع \; (\bar{س}_1 - \bar{س}_2)$$

$$١٤٠ - ٢,٩٢ \times ١٦,٩٢ \leqslant تو_1 - تو_2 \leqslant ١٤٠ + ٢,٩٢ \times ١٦,٩٢$$

$$١٤٠ - ٤٩,٤١ \leqslant تو_1 - تو_2 \leqslant ١٤٠ + ٤٩,٤١$$

$$٩٠,٥٩ \leqslant تو_1 - تو_2 \leqslant ١٨٩,٤١$$

وبذلك يكون

الحد الأعلى لفرق المتوسطين هو: ١٨٩,٤١ صاع

الحد الأدنى لفرق المتوسطين هو: ٩٠,٠٩ صاعًا

(١١ ـ ٦ ـ ٧) اختبار الفرق بين متوسطي عينتين غير مستقلتين

استخدمنا في الاختبارات السابقة اختبار الفرق بين عينتين مستقلتين بمعنى أن مفردات العينة الأولى مستقلة عن مفردات العينة الثانية. ولكن قد يحدث في الحياة العملية أن المشاهدات تكون على شكل أزواج مرتبة (س، ص). فمثلاً إذا أخذنا عينة وحصلنا على مشاهدات لها في المرة الأولى كالتالي $س_١$، $س_٢$، .....، $س_ن$ ثم نضع هذه العينة تحت تأثير مؤثر ثم نعود مرة ثانية، ونحصل على مشاهدات لها مرة أخرى كالتالي $ص_١$، $ص_٢$، .....، $ص_ن$ وبإجراء اختبارات للمقارنة بين مجموعتي القراءتين لنفس المفردات في العينة في المرة الأولى والثانية يمكننا استنتاج تأثير المؤثر على مفردات العينة وفي هذه الحالة ندرس الفرق بين مقدارين غير مستقلين عن بعضهما وهما متوسط القراءات الأولى $س_١$، $س_٢$، .....، $س_ن$ ومتوسط القراءات الثانية $ص_١$، $ص_٢$، .....، $ص_ن$.

ويمكن استخدام اختبار تي في هذه الحالة كما يلي:

١ ـ نوجد الفرق $ف_ر = س_ر - ص_ر$ للازدواج القيم (س، ص).

٢ ـ نحسب الوسط الحسابي $\overline{ف}$ لهذه الفروق.

٣ ـ نوجد الانحراف المعياري $نجع_{\overline{ف}}$ لهذه الفروق.

٤ ـ نكوّن الاحصائية تي = $\frac{\overline{ف}}{نجع_{\overline{ف}} / \sqrt{ن}}$

والإحصائية تي المحسوبة تخضع لاختبار تي (أ، ن ـ ١)، ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (١٥)

إذا كانت درجات مجموعة مكونة من ٧ طلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات كما في الجدول:

درجات سبعة طلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
درجة الإحصاء (س)	٦٢	٨٢	٧٧	٥٧	٦٢	٩٠	٨٢
درجة الرياضيات (ص)	٥٣	٧٥	٦٥	٥٥	٦٧	٨٥	٧٩

اوجد كلًا من :

١) اختبر ما إذا كان هناك فروق معنوية بين متوسطي درجات الإحصاء والرياضيات .

٢) اوجد تقدير لحدود الثقة لمتوسط فرق الدرجات للإحصاء والرياضيات بمستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحـــل

لحساب المتوسط ف̄ والانحراف المعياري لها نجع نكوّن الجدول التالي :

رقم الطالب	درجة الإحصاء (س)	درجة الرياضيات (ص)	ف = س ـ ص	ف ـ ف̄	$(\text{ف} - \bar{\text{ف}})^2$
١	٦٢	٥٣	٩	٤	١٦
٢	٨٤	٧٥	٩	٤	١٦
٣	٧٧	٦٥	١٢	٧	٤٩
٤	٥٧	٥٥	٢	٣-	٩
٥	٦٢	٦٧	٥-	١٠-	١٠٠
٦	٩٠	٨٥	٥	صفر	صفر
٧	٨٢	٧٩		٢-	٤
المجموع	—	—	٣٥		١٩٤

$$\bar{\text{ف}} = \frac{\text{مجـ ف}}{\text{ن}} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

$$\text{تبـع}_{\text{ت}} = \frac{\text{مجـ}(\text{ف} - \bar{\text{ف}})^{٢}}{\text{ن} - ١} = \frac{١٩٤}{٧ - ١} = \frac{١٩٤}{٦} = ٣٢,٣$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\text{نـج}_{\text{ت}} = ٥,٦٨٦$$

نكوّن الاختبار لفرض العدم $\text{فر}_{.}$ والفرض البديل $\text{فر}_{م}$ وليكن عند مستوى معنوية أ = ٠,٠٥ مثلاً. ثم نحسب الإحصائية تي من مشاهدات العينة والاختبار $\text{فر}_{.}$ كالتالي

$\text{فر}_{.}$: $\bar{\text{ف}}$ = صفر ، $\text{فر}_{م}$: $\bar{\text{ف}} \neq$ صفر (أي أن الفرض البديل ذو طرفين)

$$\text{تي المحسوبة} = \frac{\bar{\text{ف}}}{\frac{\text{نجع}_{\text{ت}}}{\sqrt{\text{ن}}}}$$

$$\text{تي المحسوبة} = \frac{٥}{\frac{٥,٦٨٦}{\sqrt{٧}}}$$

$$= ٢,٣٢٧$$

نقارن تي المحسوبة وتساوي ٢,٣٢٧ بالقيمة الموجودة بجداول تي أمام ن − ١ درجات حرية = ٧ − ١ = ٦ ومستوى معنوية أ = ٠,٠٥ فتكون تي (٠,٠٥ ، ٦) = ٢,٤٤٧ فنجد أن تي المحسوبة وتساوي ٢,٣٢٧ ليست واقعة في منطقة الرفض للفرض $\text{فر}_{.}$ ، وهي داخل الحدود الحرجة لمنطقة القبول لـ $\text{فر}_{.}$ وهي (٢,٤٤٧ ، −٢,٤٤٧). أي لا نستطيع رفض فرض العدم $\text{فر}_{.}$ ، القائل: إنه لا توجد فروق معنوية بين درجات الطلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات.

لإيجـاد تقدير حدود الثقة للفرق بين متوسطي درجات الإحصاء والرياضيات $\bar{\text{ف}}$ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ نكوّن فترة الثقة كالتالي

$$\bar{ف} - ت_{(٠,٠٥ ، ٦)} \frac{نجع_{ت}}{\sqrt{ن}} \leqslant (تو_١ - تو_٢) \leqslant \bar{ف} + ت_{(٠,٠٥ ، ٦)} \frac{نجع_{ت}}{\sqrt{ن}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$٥ - ٢,٤٤٧ \times ٢,١٤٩ \leqslant تو_١ - تو_٢ \leqslant ٥ + ٢,٤٤٧ \times ٢,١٤٩$$

$$٥ - ٥,٢٦ \leqslant تو_١ - تو_٢ \leqslant ٥ + ٥,٢٦$$

$$-٠,٢٦ \leqslant تو_١ - تو_٢ \leqslant ١٠,٢٦$$

(١١ - ٧) تمارين

١ - أخذت عينة من ٣٦ طفلاً فكان متوسط الوزن لهذه العينة ٨ كجم وكانت أوزان الأطفال تتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط تو وانحرافًا معياريًا ١،٥ كجم. اوجد فترة الثقة للمتوسط تو عند مستوى معنوية أ = ٠,٠٥ ، أ = ٠,٠١ .

٢ - لمقارنة متوسط الدخل للأسر في مدينتين مختلفتين أخذت عينة من المدينة الأولى حجمها ٥٠ أسرة فكان متوسط الدخل لها ٤٥٠٠ ريال وعينة من المدينة الثانية حجمها ٨٠ أسرة فكان متوسط الدخل لها ٥٠٠٠ ريال. فإذا علم أن المجتمعين الإحصائيين يخضعان لتوزيعين معتدلين متوسط الأول $تو_١$ وانحرافه المعياري ٤٠ ريالاً ، ومتوسط الثاني $تو_٢$ وانحرافه المعياري ٥٠ ريالاً .

فاوجد فترة الثقة للفرق بين المتوسطين عند مستوى معنوية أ إذا كانت:

(١) ا = ٠,٠٥ ، (٢) ا = ٠,٠١

٣ - إذا كانت نسبة المدخنين في إحدى المدن هي ح، أخذت عينة مكونة من ٣٠٠ من سكان هذه المدينة، فوجد من بينهم ٩٠ مدخنًا.

اوجد فترة الثقة لنسبة التدخين ح عند مستوى معنوية ا إذا كانت:

(١) أ = ٠,٠٥ ، (٢) أ = ٠,٠١

٤ - عينة مكونة من ٣٠٠ شخص من البالغين و ٤٠٠ شخص من المراهقين الذين شاهدوا برنامجًا تلفزيونيًا معينًا، فإذا علم أن ٨٠ من البالغين، و ٢٠٠ من المراهقين يفضلون هذا البرنامج .

فاوجد تقديرًا لحدود الثقة للفرق بين نسبة كل من البالغين ونسبة كل المراهقين الذين شاهدوا هذا البرنامج، وذلك عند مستوى معنوية ا كالتالي:

(١) أ = ٠,٠٥ ، (٢) أ = ٠,٠١

٥ ـ أخذت عينتان من توزيعين معتدلين لهما نفس التباين، وجد أن حجم العينة الأولى ن١ = ١٢ ومتوسطها سَ١ = ٤٨ وتباينها تبع١ = ٩٠، وحجم العينة الثانية ن٢ = ٨ ومتوسطها سَ٢ = ٥٢ وتباينها تبع٢ = ١٢٠.

اوجد تقديرًا لحدود الثقة للفرق بين المتوسطين تو١ ـ تو٢ عند مستوى معنوية ا كالتالي:

(١) أ = ٠,٠٥ ، (٢) أ = ٠,٠١

٦ ـ أخذت عينة مكونة من ٣٠٠ طالب من طلاب الجامعة، وجد من بينهم ٥٠ طالبًا يستخدمون أيديهم اليسرى في الكتابة.

كوّن تقديرًا لحدود الثقة لنسبة الطلاب الذين يستخدمون أيديهم اليسرى في هذه الجامعة عند مستوى معنوية أ = ٠,٠٥.

٧ ـ أخذت عينتان حجماهما ن١ = ٩٠، ن٢ = ١٢٠ من توزيعين وسطاهما تو١، تو٢ ووجد على الترتيب أن:

سَ١ = ٥٥ ، تبع١ = ٩٦

سَ٢ = ٦٥ ، تبع٢ = ٨٤

اختبر الفروض التالية عند مستوى معنوية ٠,٠٥

(١) فر٠: تو١ = ٦٠ ، فر١: تو١ > ٦٠

(٢) فر٠: تو٢ = ٦٠ ، فر١: تو٢ ≠ ٦٠

(٣) فر٠: تو١ = تو٢ ، فر١: تو١ ≠ تو٢

(٤) فر٠: تو١ = تو٢ ، فر١: تو١ > تو٢

٨ ـ قيس الزمن الذي يستغرقه جندياں في فك قطعة من السلاح في ٣٦ حالة لكل منهما، فإذا كانت قياسات كل منهما تخضع لتوزيع طبيعي تباينه ١٤ ثانية وكان الوسط الحسابي لقياسات الجندي الأول ١٣٠ ثانية وللجندي الثاني ١٢٨ ثانية فهل توجد فروق جوهرية بين متوسطيْ كفاءتيهما؟

٩ - مصنع للأدوية يدَّعي أن دواءً من انتاجه له فاعلية بنسبة ٨٥٪ في شفاء مرض معين. أخذت عينة مكونة من ١٥٠ شخصًا مصابين بهذا المرض. أدى الدواء الى شفاء ١٢٠ شخصًا منهم. اختبر ما إذا كان ادعاء المصنع صحيحًا؟

١٠- متوسط العمر الإنتاجي لعينة من ١٢٠ مصباحًا كهربائيًا من انتاج أحد المصانع هو ١٥٠٠ ساعة وانحرافها ٩٦ ساعة. إذا كان متوسط العمر الإنتاجي لجميع المصابيح المنتجة من المصنع هو تو فاختبر الفرض فر. = ١٦٠٠ ساعة من الفرض البديل فر١ ≠ ١٦٠٠ ساعة مستخدمًا مستوى المعنوية ا إذا كان:

(١) ا = ٠,٠٥ (٢) ا = ٠,٠١

١١- عينة من ١٢ قياسًا لأقطارة كرة أعطت متوسط سَ = ٤,٣ ملم وانحراف معياري نجع = ٠,٠٥ ملم. اوجد ما يأتي:

ا - اختبر افرض القائل إن العينة مأخوذة من مجتمع متوسطه ٤,٥ ملم.

ب - اوجد تقدير حدود الثقة لمتوسط المجتمع تو عند مستوى معنوية ا = ٠,٠٥.

١٢- اختبرت ٨ حبال من انتاج أحد المصانع لمعرفة قوة مقاومتها للقطع فأظهرت مقاومتها مقدار ٧٥٠٠ ثقل كجم بانحراف معياري قدره ١٢٠ ثقل كجم. بينما يدعي المصنع المنتج أن قوة المقاومة للقطع لإنتاجه من الحبال هي ٧٨٠٠ ثقل كجم. هل يمكن تأييد ادعاء المصنع عند مستوى المعنوية إذا كان:

(١) ا = ٠,٠٥ (٢) ا = ٠,٠١

١٣- إذا كانت نسبة الذكاء لعينة من ١٢ طالبًا في أحد المناطق متوسطها ٩٩ وحدة بانحراف معياري ٨ وحدات. بينما نسبة الذكاء لعينة من ١٤ طالبًا في منطقة أخرى كان متوسطها ١٠٨ وحدات بانحراف معياري ١٢ وحدة فهل هناك اختلاف معنوي بين نسب الذكاء في المجموعتين؟ عند مستوى المعنوية:

(١) ا = ٠,٠٥ (٢) ا = ٠,٠١

١٤- إذا أخذنا عينة مكونة من ٨ أشخاص وقرأنا ضغط الدم س لكل واحد من العينة ثم أعطينا كل شخص دواءً معينًا لمدة معينة ثم أعدنا قراءة الضغط بعد الدواء ص لكل واحد في العينة فكانت النتائج كما في الجدول التالي:

قراءات الضغط لثمانية أشخاص قبل وبعد تناول دواء معين

رقم الفرد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
القراءة س	١٧٠	١٦٠	١٥٠	١٨٠	١٨٥	١٩٠	١٩٥	٢٠٠
القراءة ص	١٦٠	١٥٥	١٤٠	١٦٥	١٧٠	١٧٥	١٨٠	١٨٠

اوجد كلًا من :

١) اختبر الفرض القائل إن الفروق بين متوسطيْ القراءتين غير معنوي عند مستوى معنوية ا إذا كانت ا = ٠,٠٥ و ا = ٠,٠١ .

٢) اوجد تقديرًا لحدود الثقة للفروق بين متوسطيْ القراءتين عند مستوى معنوية ا إذا كانت أ = ٠,٠٥ و ا = ٠,٠١ .

١٥- في حالة محاكمة قضائية لشخص متهم بالغش والتزوير فأي من نوعيْ الخطأ في الحكم يحتمل ظهوره وأي من نوعيْ الخطأ أهم بالنسبة للمجتمع .

١٦- تبين من الامتحانات السابقة في أول فصل للدورة المكثفة في اللغة الانجليزية أن متوسط الدرجات هو ٧٥ بانحراف معياري ١٠ وقد حصل ٦٥ طالبًا من خريجي إحدى المدارس الثانوية بمدينة الرياض على متوسط درجات قدره ٧٩ فهل يمكن القول: إن خريجي هذه المدرسة الثانوية أحسن مستوى في اللغة الإنجليزية من بقية الطلاب؟

١٧- من عينة عشوائية حجمها ١٩٦ شخصًا مأخوذة من أحد أحياء مدينة ما وجد أن عدد النساء ٤٠ فهل يمكن اختبار الفرض القائل: إن نسبة النساء في هذا الحي ٠,٣ باحتمال ٩٥٪؟

١٨- في إحدى التجارب التي قام بها طلاب قسم الحيوان لمعرفة تأثير غذاء معين على زيادة الوزن، أخذت عينة مكونة من عشرة فئران وأعطيت الغذاء، وكانت أوزانها بعد التغذية بفترة مناسبة هي :

٢٦٠ ، ٣٢٠ ، ٤٨٠ ، ٢٨٠ ، ٣٤٠ ، ٣٠٠ ، ٤٦٠ ، ٤٢٠ ، ٣٠٠ ، ٣٦٠ .

فهل نستطيع أن نحكم على أن هذه العينة مأخوذة من مجتمع متوسط الوزن فيه ٣٨٠ وذلك باعتبار أن مستوى المعنوية ا = ٠٥, ٠؟

١٩ـ اشرح عمليًا لماذا لا يمكن الجزم بأن قطعة نقدية متزنة إذا رميت ألف مرة حصلنا على ٥٥٠ صورة؟

الفصل الثاني عشر

استخدام مربع كاي لحسن المطابقة وجدول التجانس

(١٢ - ١) مقدمـــة

استخدمنا في الفصول السابقة اختبار ص (التوزيع المعتدل) لاختبار تساوي وسطين أو تساوي نسبتين وذلك في العينات الكبيرة كما استخدمنا اختبار تي لاختبار تساوي وسطين للعينات الصغيرة، وذلك عندما تكون البيانات المدروسة كميّة. ولكن إذا كان المطلوب اختبار البيانات لأكثر من مجموعتين أو إذا كانت بعض أو كل البيانات المدروسة وصفية فإنه لا يمكن استخدام الاختبارات السالفة الذكر. لذلك فإنه لابد من استحداث بعض الاختبارات المناسبة لمعالجة مثل هذه الأوضاع.

في هذا الفصل سنتعرض لدراسة أحد الاختبارات المشهورة وهو المسمى اختبار مربع كاى. يعتبر اختبار مربع كاى من الاختبارات الإحصائية غير المعلمية لأنه لا يعتمد على طبيعة التوزيعات التي تتبعها البيانات المدروسة أو صيغ التوزيعات الاحتمالية التي تحكمها. وما يزيد أهمية استخدام مربع كاى في الإحصاء التطبيقي هو تحديد الصيغة الاحتمالية لتوزيع مربع كاى ووجود جداول رياضية لها مثل جدول (٤) في نهاية هذا الكتاب.

(١٢ - ١ - ١) فكرة توضيحية عن استخدام مربع كاى

لتكن لدينا تجربة لها الحوادث الشاملة $ا_١$، $ا_٢$، . . . ، $ا_ن$ حيث إن التكرارات المشاهدة لهذه الحوادث هي مش$_١$، مش$_٢$، . . . ، مش$_ن$ والتكرارات المتوقعة لهذه

الحوادث هي مت$_{١}$، مت$_{٢}$، . . . ، مت$_{ن}$ على الترتيب، كما هو موضح في الجدول التالي.

التكرارات المشاهدة للحوادث والتكرارات المتوقعة لها

الحادثـــة	أ$_{١}$	أ$_{٢}$	. . . .	أ$_{ن}$
التكرار المشاهد (مش)	مش$_{١}$	مش$_{٢}$	. . . .	مش$_{ن}$
التكرار المتوقع (مت)	مت$_{١}$	مت$_{٢}$	. . . .	مت$_{ن}$

وغالبا ما تتركز الدراسة في معرفة ما إذا كانت التكرارات المشاهدة تختلف عن التكرارات المتوقعة حسب قيمة معنوية معينة. وتحسب قيمة مربع كاى التي يرمز لها بالرمز كا^{٢} كما يلي:

$$كا^{٢} = \frac{(مش_{١} - مت_{١})^{٢}}{مت_{١}} + \frac{(مش_{٢} - مت_{٢})^{٢}}{مت_{٢}} + \ldots + \frac{(مش_{ن} - مت_{ن})^{٢}}{مت_{ن}}$$

$$= مجـ \frac{(مش - مت)^{٢}}{مت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

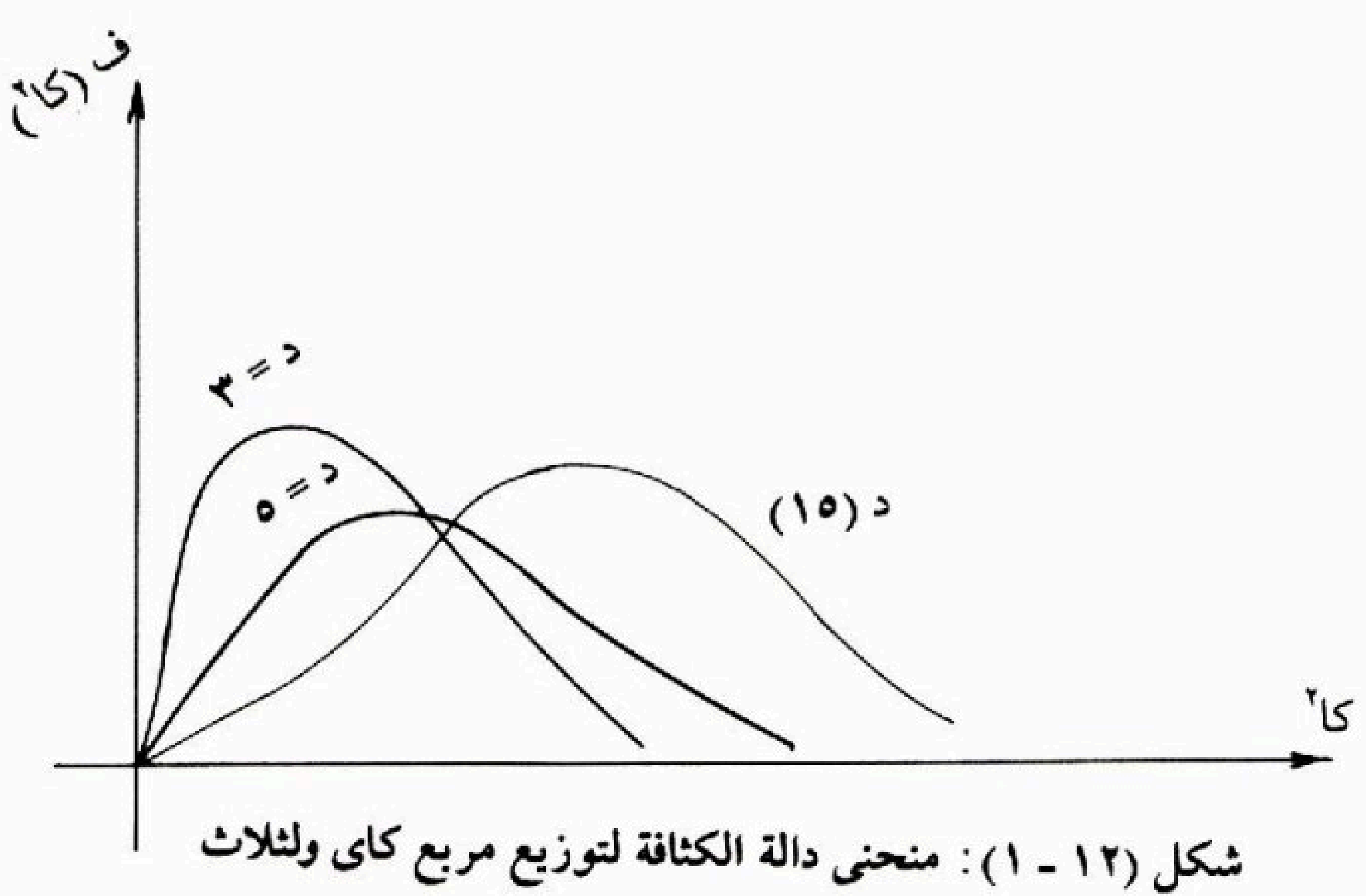
وهذه القيمة تحدد مدى التفاوت بين التكرارات المتوقعة والتكرارات المشاهدة، يلاحظ أن قيمة كا^{٢} تساوى صفرًا إذا تساوت كل قيمة مشاهدة بالقيمة المتوقعة المناظرة لها وتـزداد قيمتها بازدياد الفرق بين القيم المشاهدة والقيم المتوقعة. إذا كان مجموع التكرارات الكلي يساوي ن فإن:

$$مجـ مش = مجـ مت = ن \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

ويتلخص الاختبار بمقارنة القيمة المسحوبة بالعلاقة (١) السابقة مع القيمة المستخرجة من الجدول لتوزيع كاى الذي تعطى دالة الكثافة الاحتمالية بالصيغة التالية:

$$ف(كا^{٢}) = ك(كا^{٢})^{\frac{د-٢}{٢}} هـ^{\frac{-كا^{٢}}{٢}} \quad ، \quad كا^{٢} > صفر$$

ويحدد المقدار (د) درجات الحرية، ك ثابت يعتمد على د بحيث تكون المساحة تحت منحنى الـدالة ف (كا٢) تساوي الوحدة، كما أن د تحدد شكل منحنى الدالة ف (كا٢) كما هو موضح بالشكل التالي:



شكل (١٢ ـ ١): منحنى دالة الكثافة لتوزيع مربع كاى ولثلاث درجات حرية د = ٣، ٥ ، ١٥

وتحدد درجات الحرية كما يلي:

١ ـ تكون د = ن - ١ إذا لم نحتاج في حساب القيم المتوقعة إلى تقدير أية معالم من معالم المجتمع المدروس وقد طرحنا ١ من ن وذلك نظرًا لوجود القيد (٢) الذي يعني أن معرفة ن - ١ من التكرارات المتوقعة يكفي لتحديد التكرار الباقي.

٢ ـ تكون درجات الحرية د = ن - ١ - م إذا كان لا يمكن حساب التكرارات المتوقعة إلا في حالة تقدير م من معالم المجتمع.

وسنوضح في المثالين التاليين طريقة استخدام اختبار مربع كاى لاختبار حسن المطابقة.

مثـال (١)

رميت زهرة نرد تسعين مرة وكان التوزيع التكراري لظهور الأرقام من ١ إلى ٦ هي كما يلي:

تكرار ظهور أوجه زهرة النرد

الوجه الظاهر	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد مرات ظهوره	١٥	٧	١٥	٨	٣٠	١٥

والمطلوب فحص، إذا كانت زهرة النرد متزنة أم لا.

الحـــل

من البديهي أننا نتوقع أنه عند رمي زهرة نرد متزنة تسعين مرة فإن كل وجه يظهر بنفس الاحتمال وبالتالي بنفس عدد المرات أو ١٥ مرة وهو عدد المرات المتوقعة أو النظرية لظهور أي رقم. ولإجراء اختبار مربع كاى نجري الخطوات التالية:

أولًا: نحدد عدد المرات المشاهدة (مش) لظهور أي رقم.

ثانيًا: نحدد عدد المرات المتوقعة (مت) أو النظرية لكل رقم.

ثالثًا: نحسب الفرق بين القراءة المشاهدة والقراءة المتوقعة (مش - مت)، وكذلك مربع الفرق $(\text{مش} - \text{مت})^2$.

رابعًا: نقسم $(\text{مش} - \text{مت})^2$ لكل رقم على مت المناظرة له.

خامسًا: نجمع المقادير الناتجة من «رابعًا» أي: $\text{مجـ} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}}$

ومن المثال الحالي نجد ذلك حسب الجدول التالي:

رقم حجر النرد	١	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
مـش	١٥	٧	١٥	٨	٣٠	١٥	٩٠
مـت	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	٩٠
(مش - مت)	٠	٨-	٠	٧-	١٥	٠	٠
$\frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}}$	٠	٤,٣	٠	٣,٣	١٥	٠	٢٢,٦

وبالتالي فإن

$$\text{مج} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}} = ٢٢,٦$$

ويتبع هذا المجموع توزيع مربع كاى أو كا^2 تحت الفرضية الأولية بأن حجر النرد متزن. ويعتمد كا^2 على ثابت أو معلمة يمكن تحديدها أو تمثيلها بعدد درجات الحرية. وفي هذه الحالة فإن القراءات الست ليست مستقلة تماما عن بعضها، ففي القراءات المشاهدة يجب أن يكون مجموع الفروق بين القراءات ووسطها الحسابي مساويًا للصفر. وبالتالي سيكون لدينا ٦ − ١ = ٥ أزواج من القراءات المستقلة أو درجات الحرية التي عن طريقها يمكن إيجاد قيمة كا^2 من الجدول.

في الواقع يمكن النظر إلى هذه المسألة على صورة تعبئة أو ملء ست خلايا تحت شرط واحد بأن مجموع قراءاتها يساوي تسعين، وبالتالي سيكون لدينا ست خيارات مطروحًا منها شرط واحد وتساوي ٥ درجات للحرية.

وبذلك لابد أن يكون $\text{مج} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}} = \text{كا}^2 (٥)$ أو مربع كاى بخمس درجات للحرية والمستوى معنوي ٥٪ نأخذ أحد القرارين التاليين:

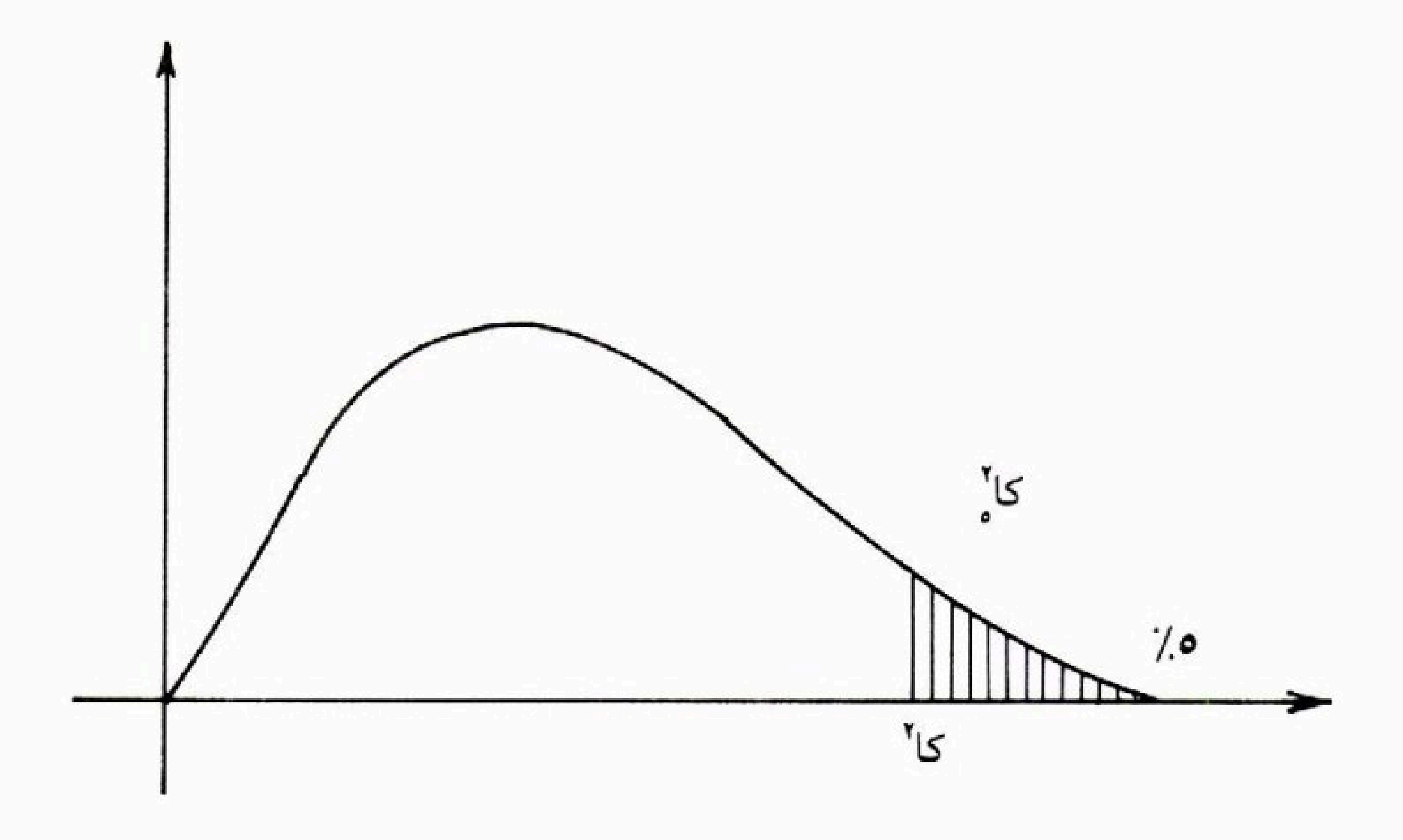
أولًا: نرفض الفرضية الأولية إذا كانت

$$\text{مج} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}} \geqslant \text{كا}^2_{٠,٠٥} (٥)$$

ثانيًا: نقبل الفرضية الأولية إذا كانت

$$\text{مج} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}} < \text{كا}^2_{٠,٠٥} (٥)$$

تحدد المنطقة الحرجة عادة بنهاية المساحة تحت منحنى كا^2 كما في الشكل التوضيحي التالي:



شكل (١٢ - ٢): المنطقة المظللة تمثل منطقة الرفض لفرض العدم

ومن الجدول نجد أن كا$^{٢}_{٠,٠٥}$ (٥) = ١١,٠٧ وهي أقل بكثير من **٢٢,٦** وبالتالي فإن القيمة المحسوبة لمربع كاى عالية المعنوية وبالتالي فإن الفرضية الأولية مرفوضة أي أن حجر النرد غير متزن.

مثال (٢)

رميت قطعة نقدية مئة مرة. ظهرت صورة في ٦٠ مرة وكتابة في ٤٠ مرة والمطلوب اختبارإذا كانت القطعة النقدية متزنة تحت مستوى ٥٪.

الحل

من المعروف أنه إذا كانت القطعة النقدية متزنة فإن:

$$ح\ (ص) = \frac{١}{٢}\ ،\ ح\ (ك) = \frac{١}{٢}\ ،$$

وبالتالي فإن عدد ظهور الصور أو الكتابة لابد أن يساوي $\frac{١}{٢} \times ١٠٠ = ٥٠$.

والآن نجري الحسابات التالية كما في الجدول

التكرارات المشاهدة لوجهي القطعة النقدية وتكراراتها المتوقعة

	ص	ك	المجموع
مش	٦٠	٤٠	١٠٠
مت	٥٠	٥٠	١٠٠
(مش - مت)	١٠	-١٠	٠
$\frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}}$	٢	٢	٤

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$\text{كا}^2 = \text{مجـ} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}} = \frac{(٦٠ - ٥٠)^2}{٥٠} + \frac{(٤٠ - ٥٠)^2}{٥٠}$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

ولتحديد درجات الحرية فإن لدينا زوجين من القراءات والشرط الوحيد هو أن مجموعهما ١٠٠ وبذلك فإننا نجد أن قيمة $\text{كا}^2_{٠,٠٥}$ (١) المناظر لدرجة حرية واحدة، والتي تساوي من الجدول $\text{كا}^2_{٠,٠٥}$ (١) = ٣,٨٤ وبالتالي فإننا نرفض الفرضية الأولى بأن القطعة النقدية متزنة.

(١٢ - ٢) اختبار حسن المطابقة لتوزيع ذي الحدين

ندرس في هذا الفصل استخدام اختبار كا^2 لفحص ما إذا كانت الاحتمالات المشاهدة من توزيع ذي الحدين أم لا، وذلك عن طريق إيجاد القراءات المشاهدة والقراءات المتوقعة التي يمكن حسابها بضرب الاحتمال المتوقع في عدد المرات أو التكرارات، حيث إن دالة الثقل الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين تعطى بالعلاقة

$$\text{ح}(\text{س}) = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ح}^{\text{س}} \text{ل}^{\text{ن} - \text{س}}$$

حيث إن ن عدد المحاولات أو التجارب، ح احتمال النجاح في كل محاولة أو تجربة،

ل = ١ ـ ح ولتوضيح استخدام اختبار كا^{٢} في حالة التوزيع ذي الحدين نورد المثالين التاليين.

مثـال (٣)

لنفرض أنه في أحد التجارب التي أعيدت مئة مرة كانت النتائج كما يلي:

تكرار المشاهدات لقيم متغير عشوائي س

المتغير س	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	المجموع
مـش	١٦	صفر	٣٠	٢٠	٢٤	١٠	صفر	صفر	١٠٠

حيث إن القيم من صفر إلى ٧ للمتغير س هي عناصر فضاء العينة أو القيم الممكن ظهورها. والمطلوب فحص ما إذا كان المتغير العشوائي الذي يحكم نتائج هذه التجربة يتبع توزيع ذي الحدين أم لا.

الحـل

من الواضح أنه لابد من حساب ح لتوزيع ذي الحدين حتى يمكن إيجاد القيم المتوقعة للقراءات، ولأن هذه القيم ليست معطاة في المثال فإننا نلجأ إلى حساب الوسط أولاً، حيث إنه في حالة توزيع ذي الحدين فإن تو = ن ح الذي يمكن تقريبه بوسط العينة وهو $\bar{س}$. ومن القراءات المعطاة في الجدول فإن:

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك}$$

وهذه يمكن حسابها كما يلي:

$$\bar{س} = \frac{١٦\times٠ + ٠\times١ + ٣٠\times٢ + ٢٠\times٣ + ٢٤\times٤ + ١٠\times٥ + ٠\times٦ + ٠\times٧}{١٦ + ٠ + ٣٠ + ٢٠ + ٢٤ + ١٠ + ٠ + ٠}$$

$$= \frac{٢٨٢}{١٠٠} = ٢,٨٢$$

ومن ذلك نجد أن

$$ح = \frac{\bar{س}}{ن}$$

$$= \frac{٢,٨٢}{٧} = ٠,٤$$

ومن ذلك نجد احتمال حدوث أي من القيم من صفر إلى ٧ من العلاقة التالية:

$$ح\ (س) = \binom{٧}{س} (٠,٤)^{س} (١ - ٠,٤)^{٧ - س}$$

حيث إن

س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

والقيم المتوقعة لأي قيمة للمتغير س هي عبارة عن مجموع عدد المشاهدات في احتمال حدوثه أي ١٠٠ ح (س).

ومن ذلك نجد الجدول التالي

س	ح (س)	مـت
٠	٠,٠٢٧٩٩٣٦	٢,٨
١	٠,١٣٠٦٣٦٧	١٣,١
٢	٠,٢٦١٢٧٣٦	٢٦
٣	٠,٢٩٠٣٠٤	٢٩
٤	٠,١٩٣٥٣٦	١٩,٤
٥	٠,٠٧٧٤١٤٤	٧,٧٤
٦	٠,٠١٧٢٠٣٢	١,٧٢
٧	٠,٠٠١٦٣٨٤	٠,١٦
المجموع	١	١٠٠

في الواقع لابد أن يكون مجموع القراءات المتوقعة يساوي مئة ولكن لتقريب الكسور فإن المجموع الحالي يساوي ٩٩,٩٢ (≈ ١٠٠).

يلاحظ أن القراءة المتوقعة الأولى أقل من ٥ ، وكذلك بالنسبة للقيمتين المتوقعتين الأخيرتين لذا نضيف مثل هذه القيم إلى القيم المجاورة لها ونجري نفس الإضافة بالنسبة للقراءات المشاهدة لنحصل على الجدول التالي :

س	٠، ١	٢	٣	٤	٥، ٦، ٧
مش	١٦	٣٠	٢٠	٢٤	١٠
مت	١٥,٩	٢٦	٢٩	١٩,٤	٩,٦٢

وتكون قيمة مربع كاى المشاهدة هي :

$$\text{كا}^{2} = \text{مجـ} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^{2}}{\text{مت}}$$

وبالتعويض يكون :

$$\text{كا}^{2} = \frac{(١٦-١٥,٩)^{2}}{١٥,٩} + \frac{(٣٠-٢٦)^{2}}{٢٦} + \frac{(٢٠-٢٩)^{2}}{٢٩} + \frac{(٢٤-١٩,٤)^{2}}{١٩,٤} + \frac{(١٠-٩,٦٢)^{2}}{٩,٦٢}$$

$$= ٤,٥١$$

ومن جدول مربع كاى تحت مستوى ٥٪ حيث إن درجات الحرية هي عدد أزواج القراءات مطروحًا منها عدد الشروط المفروضة على المتغير العشوائي المراد اختباره. أصبح عدد خلايا مربع كاى خمسًا فقط كما في الجدول الأخير ولوجود شرطين هما :

ا) مجموع القراءات والمشاهدات يساوي ١٠٠

ب) أن يكون متوسط القراءات $\bar{\text{س}}$ = ٢,٨٢

ومن ذلك يكون عدد درجات الحرية هو ٥ - ٢ = ٣

وبالتالي تصبح قيمة مربع كاى تحت مستوى ٥٪ من جدول (٤) في نهاية الكتاب هي :

$$كا^{٢}_{٠,٠٥} \ (٣) = ٧,٧٢$$

نستنتج من ذلك أن المقدار كا^{٢} = ٤,٥١ غير معنوية لرفض الفرضية الأولية أو أن المتغير العشوائي المعطى في المثال يتبع توزيع ذي الحدين.

يلاحظ أنه في حالة أن كون قيمة ح معطاة ولا نحتاج إلى تقديرها من قيمة $\bar{س}$ فإن عدد الشروط المفروضة تصبح واحدًا فقط، وهو أن يكون مجموع المشاهدات ثابتًا.

مثال (٤)

رميت أربع قطع نقدية ٢٠٠ مرة وكان عدد الصورة الظاهر كما في الجدول التالي:

تكرارات الصور عند رمي أربع قطع نقدية ٢٠٠ مرة

عدد الصور	٠	١	٢	٣	٤
عدد المرات	١٦	٢٥	٧٠	٧٥	١٤

والمطلوب اختبار اتزان أربع القطع النقدية.

الحــل

نفترض في البداية أن الفرضية الأولية هي أن القطع النقدية متزنة ونستخدم توزيع ذي الحدين لتوليد القيم المتوقعة لقراءات مثل هذه التجربة.

واتزان أي قطعة يعني أن ح = $\frac{١}{٢}$ وبالتالي تحتاج إيجاد كيفية توزيع ٢٠٠ رمية بين عدد الصور.

$$ح\,(س) = ح\,(س = س) = \binom{٤}{س} \left(\frac{١}{٢}\right)^{س} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤ - س}$$

حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

والقيمة المتوقعة في كل مرة هي مت (س) = ن ح ، وتحسب كالتالي

ح (٠) = $(\frac{١}{٢})^{٤}$ مت (٠) = ٢٠٠ $(\frac{١}{٢})^{٤}$ = ١٢,٥

ح (١) = ٤ $(\frac{١}{٢})^{٤}$ مت (١) = ٢٠٠ (٤) $(\frac{١}{٢})^{٤}$ = ٥٠

ح (٢) = ٦ $(\frac{١}{٢})^{٤}$ مت (٢) = ٢٠٠ (٦) $(\frac{١}{٢})^{٤}$ = ٧٥

ح (٣) = ٤ $(\frac{١}{٢})^{٤}$ مت (٣) = ٢٠٠ (٤) $(\frac{١}{٢})^{٤}$ = ٥٠

ح (٤) = $(\frac{١}{٢})^{٤}$ مت (٤) = ٢٠٠ $(\frac{١}{٢})^{٤}$ = ١٢,٥

ومن ذلك نجد أن

عدد الصور	٠	١	٢	٣	٤
مش	١٦	٢٥	٣٠	٧٥	١٤
مت	١٢,٥	٥٠	٧٥	٥٠	١٢,٥

ومن ذلك نجد

$$\text{كا}^{٢} = \text{مجـ} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^{٢}}{\text{مت}}$$

$$\therefore \text{كا}^{٢} = \frac{(١٦-١٢,٥)^{٢}}{١٢,٥} + \frac{(٢٥-٥٠)^{٢}}{٥٠} + \frac{(٣٠-٧٥)^{٢}}{٧٥} + \frac{(٧٥-٥٠)^{٢}}{٥٠} + \frac{(١٤-١٢,٥)^{٢}}{١٢,٥}$$

$$\therefore \text{كا}^{٢} = ٥٣,١٦$$

وبمقارنة هذه القيمة مع قيمة مربع $\text{كا}^{٢}$ في مستوى ٥٪ وبدرجات حرية عددها ٥ (عدد الخلايا) -١ (عدد الشروط أو مجموع الرميات) يساوي ٤ في جدول مربع كاى في نهاية الكتاب نجد أن :

$$\text{كا}^{٢}_{٠,٠٥} (٤) = ٩,٤٩$$

أي أن توزيع ذي الحدين لا يعتبر تطابقه حسنا لتوزيع العينة المعطى أي أن القطع غير متزنة كما سبق أن فرضنا في البداية .

(١٢ ـ ٣) اختبار حسن المطابقة لتوزيع بواسون

يعتـبر توزيع بواسـون من التـوزيعـات المهمـة في دراسة العديد من الظواهر العشوائية كما سبق أن أشرنا عند دراسة بعض التوزيعات الإحصائية وكثيراً ما تواجهنا معلومات أو بيانات، ونود التأكد فيما إذا كانت تتبع توزيع بواسون أم لا .

عادة تكون المشاهدات أو التوزيعات الفعلية المشاهدة معطاة سواءً من التجارب أو من أي ظاهرة طبيعية مثلاً. وكل ما نفعله هو إيجاد توزيع بواسون المناظر ومن ثم إيجـاد القيم المتوقعة أو المقدرة للتوزيع التكراري نظريًا، ومن ثم نستخدم علاقة مربع كـاى المعتادة في الصيغـة كا^2 = مجـ $\frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}}$. وعلى خلاف مـا درسنا في توزيع ذي الحدين فإن لتوزيع بواسون حالة واحدة (كانت ح أحيانا مجهولة أو معلومة في توزيع ذي الحدين) . ويمكن توليد توزيع بواسون النظري إذا علم متوسط التوزيع تو ومجموع التكرارات الكلي، وبالتالي يوجد شرطان في كل استخدامات توزيع بواسون لحسن المطابقة . لتوضيح ذلك نورد المثال التالي .

مثـال (٥)

اختبر حسن مطابقة توزيع بواسون للتوزيع التكراري المعطى بالجدول التالي :

تكرارات متغير بواسون العشوائي

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦ أو أكثر
ك	١٩	٢٦	٢٧	١٣	١١	٢	٠

يجب أن نحسب أولا قيمة $\bar{\text{س}}$ أو م (معلم توزيع بواسون) كما يلي

مجـ ك = ٩٨ ، مجـ س ك = ١٧٣

فــإن :

$$\bar{س} = \frac{١٧٣}{٩٨} = ١,٧٦٥$$

وبالتعويض في صيغة بواسون نجد أن :

$$ح(س) = \frac{(١,٧٦٥)^{س} هـ^{-(١,٧٦٥)}}{\underline{س}}$$

وبالتعويض عن قيم س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ والضرب في مجموع التكرارات ٩٨ نحصل على القيم النظرية المتوقعة .

حيث إن مت (س) = ٩٨ ح (س)

ومن ذلك نجد أن :

مت (٠) = ١٦,٧٨ ، مت (١) = ٢٩,٦١

مت (٢) = ٢٦,١٣ ، مت (٣) = ١٥,٣٧

مت (٤) = ٦,٧٨ ، مت (٥ أو أكثر) = ٣,٣٣

في الواقع أمكن إيجاد مت (٥ أو أكثر) كما يلي :

مت (٥ أو أكثر) = ٩٨ - (مت (٠) + مت (١) + مت (٢) + مت (٣) + مت (٤))

ومن الواضح أن القيمة المتوقعة الأخيرة أقل من ٥ وبالتالي لابد من إضافتها إلى القيمة السابقة لها فيكون لدينا مايلي :

س	٠	١	٢	٣	٤ أو أكثر
مـش	١٩	٢٦	٢٧	١٣	١٣
مت	١٦,٨	٢٩,٦١	٢٦,١	١٥,٣٧	١٠,١

وبحساب قيمة مربع كاى نجد أن

$$كا^{2} = \frac{(19-16,8)^{2}}{16,8} + \frac{(26-29,61)^{2}}{29,61} + \frac{(27-26,1)^{2}}{26,1} + \frac{(13-15,37)^{2}}{15,37} + \frac{(13-10,1)^{2}}{10,1}$$

$$= 1,964$$

حيث إن عدد درجات الحرية تساوي عدد الخلايا ٥ مطروحًا منه عدد الشروط ٢ أي تساوي ٣ ومن جدول مربع كاى (رقم ٤) في نهاية الكتاب وتحت مستوى ٥٪

$$كا^{2}_{0,05}(3) = 7,81$$

أي أن القيمة الناتجة ١,٩٦٤ أقل من ٧,٨١ وبالتالي ليست معنوية لرفض الفرضية الأولى بأن القراءات تتبع توزيع بواسون.

(١٢ ـ ٤) اختبار حسن المطابقة للتوزيع الطبيعي

بنفس الطريقة التي اتبعناها في حساب حسن المطابقة في توزيعي ذي الحدين وبواسون يمكن اختبار حسن مطابقة التوزيع الطبيعي لبعض القراءات أو البيانات التي تواجهنا. ويختلف حساب درجات الحرية عن التوزيعين السابقين لأنه لابد من تقدير كل من $\bar{س}$ و تبا أي الوسط والتباين في كل مرة وكذلك تحديد مجموع التكرارات أي أنه توجد ثلاثة شروط في حالة التوزيع الطبيعي ولتوضيح كيفية اختبار حسن المطابقة نورد المثال التالي.

مثال (٦)

بيّن مدى مطابقة التوزيع الطبيعي لبيانات الجدول التالي:

تكرارات المتغير العشوائي للتوزيع الطبيعي

فئة س	أقل من ١٥	١٥ ـ ٢٠	٢٠ ـ ٢٥	٢٥ ـ ٣٠	٣٠ ـ ٣٥	أكثر من ٣٥
التكرار	٣	٧	١٥	٢٠	٩	٤

الحــل

لحسـاب ذلـك نوجد أولاً الوسط $\bar{س}$ والانحراف المعياري نحر بالطرق التي درسناها سابقاً عند دراسة التوزيعات التكرارية.

وجـدنـا أن $\bar{س}$ = ٢٥,٧ و نحر = ٦,١٤، حيث اعتبرنا أن الحد الأدنى للفئة الأولى ١٠ والحد الأعلى للفئة الأخيرة. ٤٠ ($\bar{س} = \frac{مجـ ك س}{مجـ ك}$ حيث س هي مركزالفئات).

نعيّن الحدود العليا للفئات ومن ثم نوجد القيم المعيارية لها ولتكن ص ومن ثم نجد الاحتمالات المناظرة لها أو ح (ص ≧ ص) ونحسب من ذلك الاحتمال والتكرار المتوقع لتلك الفئة كما في الجدول.

الفئـــة	أقل من ١٥	١٥ ـ ٢٠	٢٠ ـ ٢٥	٢٥ ـ ٣٠	٣٠ ـ ٣٥	أكثر من ٣٥
الحد الأعلى للفئة	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	
القيمة المعيارية للحد الأعلى للفئة	١,٧٤-	٠,٩٣-	٠,١١-	٠,٧٠	١,٥١	—
ح (ص ≧ص)	٠,٠٤٠٩	٠,١٧٦٢	٠,٤٥٦٢	٠,٧٥٨٠	٠,٩٣٤٥	١
الاحتمـال ح	٠,٠٤٠٩	٠,١٣٥٣	٠,٢٨٠٠	٠,٣٠١٨	٠,١٧٦٥	٠,٠٦٥٥
التكرار المتوقع ح × مجـ ك	٢,٤	٧,٩	١٦,٢	١٧,٥	١٠,٢	٣,٨

يلاحظ أنه لابد من دمج الفئتين الأولى والثانية وكذلك الفئتين الخامسة والسادسة لأن القيمة المتوقعة في الفئة الأولى والأخيرة أقل من ٥.

لتوضيح طريقة الحساب فإن القيم المعيارية للحدود العليا للفئات نحصل عليها كما يلي:

$$ص = \frac{س - \bar{س}}{نحـر}$$

فمثــلاً :

$$\text{ص للفئة الأولى} = \frac{١٥ - ٢٥,٧}{٦,١٤} = -١,٧٤$$

$$\text{ص للفئة الثانية} = \frac{٢٠ - ٢٥,٧}{٦,١٤} = -٠,٩٣$$ وهكذا

أمـا الصف الـرابع وهو الاحتمالات فنجدها من جدول التوزيع الطبيعي المعتاد أما احتمالات الصف الخامس فهي كما يلي :

الاحتمال الأول = ٠,٠٤٠٩ ،

الاحتمال الثاني = ٠,١٧٦٢ - ٠,٠٤٠٩ = ٠,١٣٥٣

الاحتمال للفئة الثالثة = ٠,٤٥٦٢ - ٠,١٧٦٢ = ٠,٢٨٠٠ وهكذا .

والصف الأخير هو حاصل ضرب كل احتمال في مجموع التكرارات ٥٨ .

وبعد دمج الفئات المشار إليها نحصل على الجدول التالي :

مــش	١٠	١٥	٢٠	١٣
مــت	١٠,٣	١٦,٢	١٧,٥	١٤

ومن ذلك نحسب قيمة مربع كاى وهي :

$$\text{كا}^{٢} = \frac{(١٠ - ١٠,٣)^{٢}}{١,٣} + \frac{(١٥ - ١٦,٢)^{٢}}{١٦,٢} + \frac{(٢٠ - ١٧,٥)^{٢}}{١٧,٥} + \frac{(١٣ - ١٤)^{٢}}{١٤}$$

$$= ٠,٥٣$$

ولوجود أربع خلايا وكذلك لتقدير قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري وكذلك

الالتزام بشرط مجموع التكرارات فإن عدد درجات الحرية = ٤ - ٣ = ١ وستكون قيمة مربع كاى تحت مستوى ٥٪ هي :

$$كا^{٢}_{٠,٠٥} (١) = ٣,٨٤$$

أي أننا نقبل الفرضية الأولى بأن المشاهدات المعطاة في بداية المثال تتبع التوزيع الطبيعي .

(١٢ ـ ٥) جـداول التجانـس

في كثير من المسائل العملية والدراسات الإحصائية نحتاج إلى تصنيف البيانات حسب عوامل معينة كما نحدد مقدار العامل في كل مرة مثلاً قد ندرس مستوى النجاح (راسب، جيد، جيد جدًا، ممتاز) وعلاقته بجنس الطالب (ذكر، أنثى)، أو علاقة جنس المريض بدرجة حساسيته لمرض معين، أو نوع القمح وعلاقته لنمو أنواع معينة من الفطر فيه. كذلك من الأشياء التي نوردها كمثال على دراسة الترابط بين العوامل في المجالات الأخرى أيضًا، العلاقة بين تعدد الزوجات والمستوى الاقتصادي للزوج، أو العلاقة بين التدخين للابن والتدخين في حالة أن يكون أحد الوالدين أو كلاهما من المدخنين. . الخ .

ولتـوضيح فكـرة دراسـة العـلاقة بين عاملين أو أكثر، أو ما يشار إليه أحيانا بموضوع ارتباط العوامل، أو قياس الاستقلال بين العوامل نورد المثالين التاليين .

مثـال (٧)

إذا كان في عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ طالب وطالبة كانت أعداد الناجحين والراسبين في امتحان الإحصاء التطبيقي كمايلي :

التكرارات المشتركة للطلاب حسب الجنس ونتيجة الإمتحان

النتيجة / الجنس	ناجــح	راســـب
طالـــب	٤٠	١٥
طالبـــة	٣٥	١٠

ولدراسة العلاقة بين جنس الطلبة ونتائجهم في الامتحان أو أن هذين العاملين مستقلان عن بعضهما نوجد أولا مجموع الصفوف والأعمدة حيث أن جدول التجانس في هذه الحالة هو ٢ × ٢ أي أن له صفان وعمودان.

الجنس / النتيجة	ناجح	راسب	المجموع
طالب	٤٠	١٥	٥٥
طالبة	٣٥	١٠	٤٥
المجموع	٧٥	٢٥	١٠٠

ومن الجدول الأخير نلاحظ أن احتمال أن يكون الشخص طالبًا هو ح (طالب) = $\frac{٥٥}{١٠٠}$ وهو مجموع تكراري الصف الأول على مجموع التكرارات.

أما احتمال أن يكون الشخص ناجحًا فهو:

ح (ناجح) = $\frac{٧٥}{١٠٠}$ وهو مجموع تكرار العمود الأول على مجموع التكرارات وبالمثل يمكن حساب الاحتمالات الأخرى كالتالي:

ح (طالبة) = $\frac{٤٥}{١٠٠}$ ، ح (راسب) = $\frac{٢٥}{١٠٠}$

وفي البداية نجعل فرضيتنا الأولية وهو أن لا توجد علاقة بين الجنس والنتيجة في الامتحان أو أن الجنس مستقل عن النتيجة، ولاختبار ذلك نوجد أولاً التكرارات المتوقعة للجدول السابق.

نلاحظ أنه لو كان جنس الشخص (طالبًا) لا يؤثر على نجاحه فإن

ح (طالب وناجح) = ح (طالب) ح (ناجح)

ح (طالب وناجح) = $\frac{٥٥}{١٠٠} \times \frac{٧٥}{١٠٠}$

والقيمة المتوقعة هي حاصل ضرب مجموع التكرارات والاحتمال وبالتالي :

مت (طالب وناجح) = ١٠٠ $(\frac{٥٥}{١٠٠})$ $(\frac{٧٥}{١٠٠})$

$= \frac{٥٥ \times ٧٥}{١٠٠}$

= ٤١,٢٥

وبنفس الطريقة يمكن حساب بقية القيم المتوقعة فيكون :

ح (طالب وراسب) = ح (طالب) ح (راسب)

ح (طالب وراسب) = $\frac{٥٥}{١٠٠} \times \frac{٢٥}{١٠٠}$

مت (طالب وراسب) = ١٠٠ × $\frac{٥٥}{١٠٠} \times \frac{٢٥}{١٠٠}$

$= \frac{٥٥ \times ٢٥}{١٠٠}$

= ١٣,٧٥

مت (طالبه وناجحة) = ١٠٠ × $\frac{٤٥}{١٠٠} \times \frac{٧٥}{١٠٠}$

= ٣٣,٧٥

مت (طالبه وراسبة) = ١٠٠ × $\frac{٤٥}{١٠٠} \times \frac{٢٥}{١٠٠}$

= ١١,٢٥

ويكون جدول البيانات المشاهدة والمتوقعة كالتالي :

النتيجة / الجنس	ناجـح	راسـب	المجمـوع
طالـب	٤٠ ٤١,٢٥	١٥ ١٣,٧٥	٥٥
طالبـة	٣٥ ٣٣,٧٥	١٠ ١١,٢٥	٤٥
المجمـوع	٧٥	٢٥	١٠٠

حيث إن القيم في الجزء الأعلى من الخلية هي القيم المتوقعة.

وبذلك يمكن حساب قيم كا^2 كما يلي:

$$\text{كا}^2 = \text{مجـ} \frac{(\text{مش} - \text{مت})^2}{\text{مت}}$$

$$\text{كا}^2 = \frac{(٤٠ - ٤١,٢٥)^2}{٤١,٢٥} + \frac{(٣٥ - ٣٣,٧٥)^2}{٣٣,٧٥} + \frac{(١٥ - ١٣,٧٥)^2}{١٣,٧٥} + \frac{(١٠ - ١١,٢٥)^2}{١١,٢٥}$$

$$= ٠,٣٣٦٧$$

وبإيجاد قيمة كا^2 تحت مستوى ٥٪ حيث إن عدد درجات الحرية تساوي عدد الخلايا ٤ وهي ٢ × ٢ مطروحًا منه عدد الشروط وهي ٣، وهي مجموع الصفوف والأعمدة حيث إن إعطاء أي مجموع ٣ من صفوف وأعمدة يمكن استنتاج الصف أو العمود الباقي أي ٤ - ٣ = ١، أو لو كان عدد الصفوف م والأعمدة ن فإن درجات الحرية تساوي (م - ١) (ن - ١) وفي هذه الحالة

درجات الحرية = (٢ - ١) × (٢ - ١) = ١

ومن ذلك نجد من الجدول أن:

$$\text{كا}^2_{٠,٠٥} \; (١) = ٣,٨٤$$

ونظرًا لأن القراءة المحسوبة لمربع كاى أقل من القراءة الجدولية فإنه لا علاقة بين جنس الشخص ومدى نجاحه في ذلك المقرر.

ملاحظة:

يمكن استخدام نفس الطريقة حتى لو كانت العوامل المدروسة تتوزع بأكثر من صفتين.

(١٢ - ٦) تمارين

١ - رميت قطعة نقدية ٢٠٠ مرة، وكانت النتيجة ظهور ١١٥ صورة، و ٨٥ كتابة. بيّن ما إذا كانت القطعة متزنة أم لا.

٢ - في خمسين مشاهدة لمتغير عشوائي متقطع كانت البيانات المشاهدة والمتوقعة لجميع القيم الممكنة كما يلي:

التكرارات المشاهدة والمتوقعة لمتغير عشوائي متقطع

س	صفر	١٠	٢٠	٣٠
مـش	١٣	١٠	٢٠	٧
مـت	١٠	١٣	١٥	١٢

استخدم اختبار مربع كاى للتأكد من حسن مطابقة توزيع المتغير العشوائي لتلك البيانات إذا علمت بوجود شرطين على البيانات.

٣ - إذا كانت الكتب المستعارة من المكتبة المركزية بجامعة الملك سعود في خمسة أيام في أحد الأسابيع هي:

أعداد الكتب المستعارة حسب أيام العمل الأسبوعية

اليـوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء
عددالكتب	٤٥٠	٣٠٠	٤٠٠	٣٥٠	٦٠٠

استخدم اختبار مربع كاى لفحص ما إذا كان هناك زيادة ملموسة للاستعارة في عدد أيام ذلك الأسبوع.

٤ - إذا كانت الأهداف التي سجلها أحد الأندية الرياضية في ٥ مباريات من الدوري العام هي كمايلي:

أعداد الأهداف في خمس مباريات

عدد المباريات	١	٢	٣	٤	٥
عدد الأهداف	٧	٤	٣	١	٠

علق على النتيجة، ومدى مطابقة توزيعيْ بواسون أو ذي الحدين للبيانات المعطاة، مستخدمًا فحص مربع كاى لحسن المطابقة.

٥ ـ إذا كان عدد المكالمات الواردة لأحد المكاتب الحكومية من الساعة الثامنة وحتى الثانية عشرة في ٥٠ يومًا كمايلي:

تكرارات المكالمات في خمسين يومًا

عدد المكالمات	٠	١	٣	٤	٦	٧	أكثر من ٧
عدد الأيـام	٣	٢	٩	١٥	١٢	٥	٤

بين مدى مطابقة توزيع بواسون لهذه البيانات.

٦ ـ أطوال ٦٠ طالبًا من إحدى المدارس الابتدائية كمايلي:

التوزيع التكراري لأطوال الطلاب

الفئـــة	أقل من ١١٥	١١٥ ـ ١٢٠	١٢٠ ـ ١٣٥	١٣٥ ـ ١٤٠	أكثر من ١٤٠
التكـــرار	٥	١٤	٢٠	١٣	٨

بيّن مدى ملاءمة التوزيع الطبيعي لتمثيل مثل هذه البيانات.

٧ ـ في عينة مكونة من ١٠٠ من الأولاد «أقل من ١٢ سنة» وجد عدد المدخنين منهم الذين أحد والديهم من المدخنين كمايلي:

التكرارات المشتركة لأحد الوالدين والولد حسب عادة التدخين

الولـــد / أحد الوالدين	مدخـــــن	غيـر مدخـن
مدخـــــن	٣٠	١٠
غيـر مدخـــن	١٥	٤٥

اختبر العلاقة بين عادة التدخين لدى أحد الوالدين أو كليهما وعادة التدخين عند الأبناء.

٨ ـ في عينة مكونة من ١٥٠ مريضًا بثلاثة أنواع من مرض السرطان كانت البيانات كالتالي:

التكرارات المشتركة لمرض السرطان حسب مكان الإصابة والجنس وعادة التدخين

الجنس والتدخين / مكان السرطان	ذكر		أنثى	
	مدخن	غير مدخن	مدخن	غير مدخن
الرأس	١٩	١٥	٢٠	٦
المعدة	٢٢	١٠	١١	٧
الأطراف	١٥	١٨	٧	١٠

ادرس علاقة أنواع السرطان بجنس المريض وبعادة التدخين.

٩ - إذا كانت نسب الأشخاص المنتمين لقبيلة ما حسب فصائل الدم الأربع هي ٠,١٥ ، ٠,٤٥ ، ٠,٢٥ ، ٠,١٥ ، فإذا كانت التكرارات المشاهدة لعينة من الأشخاص من قبيلة أخرى هي ١٠٠ ، ١٥٠ ، ١٥٠ ، ٣٥٠ ، ٢٠٠ فناقش فيما إذا كان لأفراد القبيلتين نفس توزيع نسب فصائل الدم.

١٠- عدد خوادث السيارات المرورية في ١٢ شهرًا في إحدى الدول هي كمايلي: ٥٥٠ ، ٩٠٠ ، ٦٠٧ ، ١٣٥٠ ، ٨٥١ ، ١٢١٠ ، ٦١٣ ، ١٥٢٠ ، ٨١٢ ، ٧٢٤ ، ١١٠٠ ، ٦٩٠.

بيّن فيما إذا كانت هذه التكرارات تنسجم مع الافتراض القائل: إن عدد الحوادث الشهرية ثابتة في تلك السنة.

١١- في تجربة لفحص نظرية مندل للوراثة لأربعة أنواع من سلالات نبات البازلاء ذات البذور الدائرية الصفراء والخضراء، وغير الدائرية الصفراء والخضراء كانت التكرارات المشاهدة للنتيجة كمايلي:

دائرية صفراء = ٣٢٠ ، دائرية خضراء = ١١٠ ، غير دائرية صفراء = ١٢٠ ، غير دائرية خضراء = ٤٠ .

بيّن ما إذا كانت هذه البيانات تنطبق مع نظرية مندل للوراثة، والتي توضح أن هذه النسب من هذه الأنواع من البازلاء هي ٩:٣:٣:١ على الترتيب وذلك باحتمال ٩٥٪.

١٢- الجدول التالي يمثل كميات انتاج أحد آبار البترول بآلاف البراميل في ٢٦٠ يومًا :

توزيع كميات البترول المنتجة بآلاف البراميل في ٢٦٠ يومًا

عـدد الأيـام	٧	٢٣	٦٠	٨٠	٦٥	٢٠	٥
كمية البترول المنتجة	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢

بين فيما إذا كانت هذه البيانات تتبع التوزيع الطبيعي .

١٣- في دراسة لفحص تأثير عقارين أ، ب على أحد أنواع الصداع كانت النتائج كما في الجدول التالي :

التكرارات المشتركة لعقارين حسب درجه الشفاء

الحالة / العقار	شفي تمامًا	زاد الصداع	لم يؤثر كليًا
العقار أ	٧٠	١٥	٣٥
العقار ب	٥٥	١٠	١٥

اختبر مدى صحة القول: إن للعقارين نفس التأثير في معالجة ذلك الصداع .

الفصل الثالث عشر

الاختبارات غير المعلمية

(١٣ - ١) مقدمـــة

يختار بعض الباحثين اختبارًا احصائيًا بعد التأكد من أن المعلومات والبيانات التي يريدون فحصها تتبع توزيعًا ما ولو بصورة تقريبية مثل التوزيع الطبيعي، أو توزيع ذي الحدين، أو توزيع بواسون. . . الخ ولكننا نواجه في كثير من الأحيان بيانات واقعية في بعض البحوث الاجتماعية، أو اللغوية، أو الزراعية يصعب فيها التعرف على الطبيعة أو الصيغة الدالية للتوزيع الاحتمالي الذي تتبعه. في مثل هذه الحالات نلجأ عادة إلى ما يسمى الاختبارات غير المعلمية أو طرق التوزيع الحر.

والاختبارات غير المعلمية لا تستلزم الإلمام بالتوزيع الاحتمالي الذي يحكم مجتمع البيانات المسحوبة منها العينة، كما أنها تتميز ببساطة استيعابها وسهولة حسابها كما يستحسن عادة استخدامها عندما يكون حجم بيانات العينة قليلاً نسبيًا.

وسنستعرض فيما يلي أهم الاختبارات غير المعلمية بصورة مبسطة مع استخدام الأمثلة في التوضيح.

(١٣ - ٢) اختبار الإشارة

تكـون البيانات في كثير من الأحيان على صورة زوج من القراءات مثل دخل الزوجين في عينة من الأسر السعودية مثلاً، أو كمية الأمطار الشهرية الساقطة على مدينة

الـــرياض في عامىْ ١٣٩٠ و ١٤٠٠هـ مثـلاً، وحـالـة ضربـات القلب لعينـة من الأشخاص قبل وبعد استخدام علاج ما، قيل: إن له تأثيرًا على تغيير عدد ضربات القلب. . . الخ.

ولفحص وجود اختلاف بين دخل الزوجين أو كميات الأمطار الشهرية الساقطة على مدينة الرياض في عامين أو تأثير العقار على ضربات القلب نستخدم اختبار الإشارة الـذي يمكن اعتباره أسلوبًا جيدًا لفحص زوج من القراءات، ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي.

مثـال (١)

استخدم عقار جديد لعلاج مرض السكر، والمطلوب معرفة ما إذا كان له تأثير على ضربات القلب فأعطي العلاج لاثني عشر مريضًا وكان عدد ضربات القلب في الدقيقة لكل منهم كمايلي:

ضربات القلب قبل العلاج وبعده لاثني عشر مريضًا

رقم المريض	قبل العلاج	بعد العلاج	الإشارة
١	٧٦	٧٨	+
٢	٨٠	٨١	+
٣	٩١	٩٢	+
٤	٧٥	٧٤	-
٥	٨١	٨٤	+
٦	٧٧	٧٧	٠
٧	٧٩	٧٨	-
٨	٨٢	٨٣	+
٩	٨٨	٨٣	-
١٠	٨١	٨٠	-
١١	٧٨	٧٩	+
١٢	٨٥	٨٥	٠

من الجدول السابق نلاحظ أننا نضع إشارة (+) إذا زادت ضربات القلب بعد العلاج كما نضع إشارة (-) إذا نقصت ضربات القلب بعد العلاج ونضع صفرًا إذا تساوت ضربات القلب للمريض قبل وبعد العلاج. نستبعد القراءتين رقم ٦، ١٢ من الدراسة وبالتالي نتعامل فقط مع عشر الحالات الباقية. لو لم يوجد تأثير للعقار على ضربات القلب فإن احتمال زيادة ضربات القلب أو نقصانها يكون متساويًا أي أن عدد الإشارات (+) يساوي عدد الإشارات (-) أوح (+) = ح (-) = $\frac{١}{٢}$ وذلك بعد استبعاد القيم الصفرية في عمود الإشارات. تصبح المسألة بعد ذلك عبارة عن توزيع ذي الحدين يكون فيها المطلوب معرفة احتمال الحصول على ٦ إشارات (+) أو أكثر بالصدفة فقط أي أن يكون للعقار تأثير في زيادة ضربات القلب.

وحيث إن:

متوسط توزيع ذي الحدين هو ن ح وانحرافه المعياري هو $\sqrt{\text{ن ح (١ - ح)}}$

فإن الوسط = $\frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$

والانحراف المعياري = $\sqrt{١٠ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}} = ١,٥٨$

ونود الآن معرفة إمكانية الحصول على ست قيم أو أكثر من ست قيم موجبة (+) بالصدفة فقط.

نحسب الحد الأدنى الفعلي للرقم ٦ ويكون ٥,٥، وتكون القيمة المعيارية (أو الإحصائية) ص المحسوبة كالتالي:

$$\text{ص} = \frac{٥,٥ - ٥}{١,٥٨} = ٠,٣١٦٥$$

وهذه القيمة أقل مما يجب لنرفض الفرضية الأولية أو بعبارة أخرى نستبعد أن يكون للعقار أي تأثير وذلك لأن القيمة المناظرة من جدول التوزيع الطبيعي لفحص ذو جهة

واحدة لمقدار ٥٪ العليا هي ص = ١,٦٤ وهي قيمة ص المناظرة لمساحة تحت المنحنى الطبيعي مقدارها ٠,٩٥ .

ولتوضيح استخدام اختبار الإشارة بصورة مختصرة نورد المثال التالي .

مثـال (٢)

اتبـع ستـة عشر مريضا نوعين من الحمية (طريقة التغذية) فكانت التغيرات النـاتجـة في وزن كل منهم (بعد وزنهم باستخدام الحمية الأولى ومن ثم وزنهم بعد استخدام الحمية الثانية) هي :

+١ ، -٦ ، +٩ ، +٤ ، -٤ ، +٨ ، -٩ ، +٧ ، -٣ ، +٩ ، +٥ ، +٦ ، +١ ، -٦ ، +٤ ، +٢

والمطلوب اثبات ما إذا كان للحمية الثانية تأثير ملموس في زيادة وزن المرضى .

الحـــل

نلاحظ أن عدد الإشارات الموجبة (+) هي ١١ من بين ١٦ قراءة وبالتالي فإن :

المتوسط = ١٦ × $\frac{١}{٢}$ = ٨

والانحراف المعياري = $\sqrt{١٦ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}$ = ٢

ومن ذلك نوجد قيمة ص المحسوبة وهي ص كالتالي :

$$ص = \frac{١٠,٥ - ٨}{٢} = ١,٢٥$$

أما قيمة ص من الجدول المناظر لأكثر من ١٠٪ فهي ص = ١,١٩ ، أي أنه يوجـد فرق بين الحميتين أو أن الحمية الأولى تزيد في الوزن بصورة ملموسة مقارنة بالحمية الثانية لأن قيمة ص المحسوبة أكبر من قيمة ص الجدولية .

نلاحظ أننا لو أخذنا على سبيل المثال قيم ص الجدولية المناظرة للنقطة ٥٪ العليا لوجدنا أن ص = ١,٦٥ أي لا يوجد فرق بين الحميتين لأن قيمة ص المحسوبة الأولى أقل من قيمة ص الجدولية في هذه الحالة.

(١٣ - ٣) اختبار مان ويتني (يو)

سنشير إلى هذا الاختبار يو اختصارًا. ويستخدم عادة عند الرغبة في فحص الفرق بين عينتين مختارتين ومستقلتين عن بعضهما. ويعتبر اختبار يو البديل الآخر لاختبار تي في حالة عدم معرفة التوزيع الاحتمالي الذي تتبعه الظاهرة المطلوبة دراستها.

وسنوضح طريقة تطبيق استخدام اختبار يو أو اختبار مان ويتني (Mann Whitney) بالمثال التالي.

مثال (٣)

يود شخص معرفة ما إذا كان يوجد فرق بين دخل فئتين من عمال البناء وعمال السباكة على سبيل المثال. أخذت عينة من ١١ عامل بناء و ١٠ عمال سباكة وسجلنا دخل كل منهم كما في الجدول الآتي.

الدخل السنوي بآلاف الريالات والرتب المناظرة لفئتين من العمال

الدخل السنوي لعمال السباكة (س$_1$)	٢٠	٢٠,٥	٢١,٥	٢١	٩٥	٢٢	٢٧,٥	٣٠	١٥,٥	١٥	
الرتبة (ر$_1$)	٨	٧	٥	٦	١	٤	٣	٢	١٤	١٥	
الدخل السنوي لعمال البناء (س$_2$)	٨	٨,٥	١٠	١٠,٥	١٩,٥	١٩	١٨	١٧,٥	١٧	١٤,٥	١٤
الرتبة (ر$_2$)	٢١	٢٠	١٩	١٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٦	١٧

ولأن المنحنى التكراري لدخل المجتمع بصفة عامة ملتو (غير متماثل حول المتوسط) فالقراءات الناتجة لا يتوقع أن تتبع التوزيع الطبيعي. وبالتالي نستخدم اختبار

يو غير المعلمي لمثل هذه الحالات، نجد الرتبة المناظرة لكل قراءة من بين **٢١** قراءة مجتمعة كما هو موضح في الجدول وبنفس الطريقة التي حددنا فيها الرتب عند حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان. والهدف من هذا الاجراء هو معرفة ما إذا كانت إحدى مجموعات الرتب تقل بصورة ملموسة عن المجموعة الأخرى.

وتكون الفرضية الأولية هي $فر_{.} : ر_{١} = ر_{٢}$

وتكون الفرضية البديلة هي $فر_{١} : ر_{١} \neq ر_{٢}$

ولحساب مقدار يو نحتاج إلى المقادير التالية:

عدد عمال السباكة $ن_{١} = ١٠$

عدد عمال البنـاء $ن_{٢} = ١١$

مجموع رتب عمال السباكة $مجـ ر_{١} = ٦٥$

ونعرِّف مقدار يو بالعلاقة التالية:

$$يو = ن_{١} ن_{٢} + \frac{ن_{١}(ن_{١} + ١)}{٢} - مجـ ر_{١}$$

وبالتعويض عن قيم المقادير $ن_{١}$، $ن_{٢}$ و $مجـ ر_{١}$ نجد أن:

$$يو = ١٠ \times ١١ + \frac{١٠ \times ١١}{٢} - ٦٥$$

$$= ١١٠ + ٥٥ - ٦٥ = ١٠٠$$

بعد ذلك نجد قيمة الإحصائية ص المناظرة للمقدار يو من العلاقة التالية:

$$ص = \frac{يو - \frac{ن_{١} ن_{٢}}{٢}}{\sqrt{\frac{ن_{١} ن_{٢} (ن_{١} + ن_{٢} + ١)}{١٢}}}$$

$$ص = \frac{١٠٠ - \frac{١٠ \times ١١}{٢}}{\sqrt{\frac{١٠ \times ١١ \times (١٠ + ١١ + ١)}{١٢}}}$$

$$= \frac{١٠٠ - ٥٥}{\sqrt{٢٠١,٦٧}}$$

$$= \frac{٤٥}{١٤,٢} = ٣,١٧$$

وحيث إن قيمة ص من جدول التوزيع الطبيعي في حالة أن أ = ٥٪ أو أ = ١٪ هي كالتالي:

$$ص_{٠,٠٢٥} = \pm ١,٩٦$$
$$ص_{٠,٠٠٥} = \pm ٢,٥٨$$

ولأن قيمة ص الجدولية < ص المحسوبة فإننا نرفض الفرضية الأولية وهي أن $ر_١ = ر_٢$ أي أنه يوجد فرق بين الدخل السنوي لعمال السباكة والدخل السنوي لعمال البناء أي نقبل فرضية البديلة $ر_١ \neq ر_٢$. وكذلك لأن مجموع رتب الدخل السنوي لعمال البناء منذ البداية كان أكبر حيث إن مجـ $ر_٢$ = ١٦٦ أي أن عمال البناء يحصلون على دخل لا يساوي دخل عمّال السباكة.

يلاحظ أنه لا يمكن استخدام اختبار يو في حالة أن حجم أي من العينتين أقل من ٩ قراءات وسيستخدم في ذلك جدولاً خاصًا لن نتعرض له في مستوى الكتاب الحالي.

(١٣ ـ ٤) اختبـار ولكوكسـون (Wilcoxon)

يستخـدم اختبـار ولكـوكسـون لاختبـار ما إذا كان يوجد فرق بين مجموعتين مرتبطتين من القراءات. أي فحص البيانات الأولية لمجموعتين من الأزواج المتناظرة أي قد تكون القراءات عبارة عن دخل زوجين في مجموعة من الأسر، أو وزنهما مثلاً، يستخـدم اختبـار ولكـوكسـون كذلك لفحص مدى جدوى تطبيق طرق جديدة في التعليم، أو تطبيق عقوبات معينة من قبل اجراءات المرور، أو عقوبة بعض المخالفات الإدارية... الخ.

ولتوضيح كيفية استخدام اختبار ولكوكسون نورد المثال التالي .

مثـال (٤)

اقترح أحد التربويين طريقة جديدة لتدريس أحد دروس مقرر الرياضيات في السنة الثانية من المرحلة المتوسطة . ولفحص جدوى هذه الطريقة أخذنا عينة مكونة من عشرين طالبًا على صورة عشرة أزواج بحيث أن كل زوج يتكون من طالبين لهما نفس درجة الرياضيات في المرحلة السابقة (السنة الأولى). أُلْقِيَ الدرس على عشرة من الطلاب بالطريقة الجديدة، وعلى العشرة الآخرين بالطريقة المعتادة، وأُجْرِيَ امتحان بعد ذلك فكانت نتائجهم كما في الجدول التالي (لاحظ أن رقم الزوج تعني الطالبين اللذين حصلا على نفس الدرجة في المرحلة السابقة).

رقم الزوج	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
درجات الطلاب حسب الطريقة الجديدة (س$_1$)	٧٠	٩٠	٨١	٩١	٧٩	٨٨	٩٢	٨٩	٩٤	٩٦
درجات الطلاب حسب الطريقة المعتادة (س$_2$)	٧١	٩٥	٨٥	٩٣	٧٩	٩٠	٩٥	٩٥	٨٧	٨٦
الفـرق (س$_1$ − س$_2$)	−١	−٥	−٤	−٢	صفر	−٢	−٣	−٦	+٧	+١٠
القيمة المطلقة للفرق	١	٥	٤	٢	—	٢	٣	٦	٧	١٠
رتبـة الفـرق	١	٦	٥	٢,٥	—	٢,٥	٤	٧	٨	٩

لاحظ أننا استبعدنا القراءة الناتجة من الزوج صفر لعدم وجود فرق بين الطريقتين في تلك القراءة أي نحصر دراستنا على بقية الأزواج وعددها ٩ .

نجد الفرق بين س$_1$ − س$_2$ كما في الصف الرابع . ثم نوجد القيمة المطلقة للفرق كما هو موضح في الصف الخامس نوجد الرتبة المناظرة لكل قيمة مطلقة من قيم الفـروق كما في الصف السادس .

لاحظ أن الزوجين رقم ٤ ، ورقم ٦ لهما نفس قراءة الفرق ٢ ، وبالتالي فإن رتبة كل منهما هي $\frac{٢ + ٣}{٢}$ = ٢,٥ لأن أحدهما لابد وأن يأخذ الرتبة الثانية والآخر يأخذ الرتبة الثالثة وبالتالي فإن كلاً منهما يأخذ متوسط الرتبتين ٢ ، ٣ (كما سبق عند دراسة معامل ارتباط الرتب). نحسب بعد ذلك مجموع الرتب للفروق الموجبة أو السالبة ونختار دائمًا الإشارة الأقل تكرارًا. ففي مثالنا الحالي نأخذ الإشارة الموجبة (+) حيث تتكرر مرتين فقط ومن ذلك نجد أن قيمة احصائية ولكوكسون و هي :

و = مجموع الرتب الناتجة من الزوجين رقمي ٩ و ١٠

= ٨ + ٩ = ١٧

أما قيمة و من جدول ولكوكسون [جدول رقم (٦) آخر الكتاب] لتسع قراءات وتحت ٠,٠٥ هي :

$$و_{٩ (٠,٠٥)} = ٦$$

نلاحظ أن و الجدولية < و المحسوبة وبالتالي فإننا نقبل الفرضية الأولية (وهي أن قراءات الطريقتين الجديدة والمعتادة لهما نفس التوزيع) ونلاحظ أنه على عكس الاختبارات الأخرى فإننا نرفض الفرضية الأولية في اختبار ولكوكسون فقط إذا كانت قيمة و المحسوبة أقل أو تساوي قيمة و الناتجة من الجدول.

نلاحظ كذلك أن الجدول رقم (٦) يعطي القراءات من ٦ إلى ٢٥ زوجًا من القراءات أما عندما يكون لدينا أكثر من ٢٥ زوجًا من القراءات فإننا نستخدم التقريب التالي للقيمة (و) ويمكن مقارنتها باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري حيث الإحصائية ص في هذه الحالة هي :

$$ص = \frac{و - \frac{ن (ن - ١)}{٤}}{\sqrt{\frac{ن (ن + ١) (٢ن + ١)}{٢٤}}}$$

حيث إن ن عدد الفروق غير الصفرية .

وبذلك نقارن قيمة ص المحسوبة مع ص = ± ١,٩٦ لمستوى معنوية ٠,٠٥ أو ص = ± ٢,٥٨ لمستوى معنوية ٠,٠١ .

(١٣ ـ ٥) اختبار كروسكال واليس (Kruskal - Wailis)

يمكن اعتبار اختبار كروسكال واليس على أنه تعميم لاختبار ولكوكسون الذي درسناه في البند السابق حيث يدرس م عينة بدل من عينتين أو مجموعتين من القراءات .

لنفرض أن العينات المطلوب دراستها هي :

$\text{س}_{١١}$ ، $\text{س}_{٢١}$ ، . . . . ، $\text{س}_{١\text{ن}_١}$ العينة الأولى وحجمها $\text{ن}_١$.

$\text{س}_{١٢}$ ، $\text{س}_{٢٢}$ ، . . . . ، $\text{س}_{٢\text{ن}_٢}$ العينة الثانية وحجمها $\text{ن}_٢$.

. . . .

$\text{س}_{\text{م}١}$ ، $\text{س}_{\text{م}٢}$ ، . . . . ، $\text{س}_{\text{م}\text{ن}_\text{م}}$ العينة رقم م وحجمها $\text{ن}_\text{م}$.

والفرضية الأولية المطلوب فحصها هي أن توزيع المتغيرات $\text{س}_{.١}$ ، $\text{س}_{.٢}$ ، . . . ، $\text{س}_{.\text{م}}$ متساوية .

ولتـطبيق اختبار كروسكال واليس نرتب العينة المختلطة من جميع المتغيرات، ولنفرض أن ر $(\text{س}_{\text{ص}.})$ هو مجموع رتب المتغير $\text{س}_{\text{ص}.}$ حيث ١ < ص < م ويكون معدل رتب المتغـير $\text{س}_{\text{ص}.}$ هو $\bar{\text{ر}}\ (\text{س}_{\text{ص}.}) = \frac{\text{ر}\ (\text{س}_{\text{ص}.})}{\text{ن}_\text{ص}}$ ومن ذلـك يمكن ملاحظة أنه لو كانت توزيعات المتغيرات متساوية فإنه يمكن اعتبار رتب المتغير $\text{س}_{\text{ص}.}$ وكأنها عينة مقدارها $\text{ن}_\text{ص}$ مأخوذة من ن قراءة حيث $\text{ن} = \text{ن}_١ + \text{ن}_٢ + \cdots + \text{ن}_\text{م}$

ومن ذلك نجد أن :

$$\text{تباين}\ \bar{\text{ر}}_\text{ص} = \frac{\text{ن} - \text{ن}_\text{ص}}{\text{ن} - ١} \cdot \frac{\text{تبا}}{\text{ن}_\text{ص}}$$

ويكـــون:

$$\text{متوسط } \bar{ر}_{ص} = \text{تو}$$

حيث إن:

$$\text{تبـا} = \frac{ن^{٢} - ١}{١٢} \quad ، \quad \text{تو} = \frac{ن + ١}{٢}$$

ويمكن رفض الفرضية الأولية إذا كان تباين $\bar{ر}_{ص}$ كبيرًا.

عادة ما تستخدم الكمية المرجحة $\sum_{ص=١}^{م} ن_{ص} (\bar{ر}_{ص} - \frac{ن + ١}{٢})^{٢}$
التي سيكون توقعها هو:

$$(م - ١) \frac{ن (ن + ١)}{١٢}$$

وبالتالي فإن اختبار كروسكال واليس للإحصائية ك هو:

$$ك = \frac{٤٢}{ن (ن + ١)} \sum_{ص=١}^{م} ن_{ص} (ر_{ص} - \frac{ن + ١}{٢})^{٢}$$

أو:

$$ك = \frac{١٢}{ن (ن + ١)} \sum_{ص=١}^{م} \frac{ر^{٢}}{ن_{ص}} - ٣ (ن + ١)$$

حيث إن القيمة المتوقعة للمقدار ك هي $كا^{٢}$ (م – ١)، والمقدار ك يتبع توزيع مربع كاى بدرجة حرية (م – ١) ولتوضيح تطبيق اختبار كروسكال واليس نورد المثال التالي.

مثـال (٥)

كانت درجات ثلاثة إخوة في مادة الرياضيات في خمس سنوات كما في الجدول التالي:

درجات ثلاثة إخوة في مادة الرياضيات خلال خمس سنوات

السنة / الاسم	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	المتغير
محمد	٨٠	٨٥	٧٤	٦٠	-	$س_١$
علي	٧٠	٨٥	٩٥	٨٦	٩٠	$س_٢$
سعيد	٩١	٧٢	٨١	-	-	$س_٣$

عدم وجود رقم يشير إلى أنه لا توجد قراءة أي أن درجات محمد كانت لأربع سنوات وعلي لخمس سنوات وسعيد لثلاث سنوات. والمطلوب فحص ما إذا كان يوجد أية فروق بين درجات الإخوة الثلاثة أم لا. نرتب القراءات مجتمعة تصاعديًا، ونحدد المتغير المناظر لكل حالة كمايلي:

القراءة	الرتبة	المتغير	القراءة	الرتبة	المتغير
٦٠	١	$س_١$	٨٥	٧,٥	$س_١$
٧٠	٢	$س_٢$	٨٥	٧,٥	$س_٢$
٧٢	٣	$س_٣$	٨٦	٩	$س_٢$
٧٤	٤	$س_١$	٩٠	١٠	$س_٢$
٨٠	٥	$س_١$	٩١	١١	$س_٣$
٨١	٦	$س_٣$	٩٥	١٢	$س_٢$

مجموع الرتب هي:

$ر_١$ = ١ + ٤ + ٥ + ٧,٥ = ١٧,٥

$ر_٢$ = ٢ + ٧,٥ + ٩ + ١٠ + ١٢ = ٤٠,٥

$ر_٣$ = ٣ + ٦ + ١١ = ٢٠

$$\underset{ص=1}{\overset{3}{\text{مجـ}}} \frac{ر_{ص}^{2}}{ن_{ص}} = \frac{(١٧,٥)^2}{٤} + \frac{(٤٠,٥)^2}{٥} + \frac{(٢٠)^2}{٣}$$

$$= ٥٣٧,٩٤٥$$

ومن ذلك نجد باستخدام العلاقة الثانية للإحصائية ك أن :

$$ك = \frac{١٢}{١٢ \times ١٣} (٥٣٧,٩٤٥) - ٣ \times ١٣$$

$$= ٢,٣٨$$

ومن جدول مربع كاى أو كا^2 نجد أن :

$$ك = كا^{2}_{٢،٠,٠٥} = ٥,٩٩$$

حيث إن عدد درجـات الحرية تساوي عدد المجموعات المراد اختبارها مطروحًا منه واحـد. ولأن قيمـة ك المحسوبة < ك الجدولية فإننا نقبل الفرضية الأولية وهي أن توزيعات درجات الإخوة الثلاثة متساوية.

(١٣ ـ ٦) تماريـــــن

١ ـ استخـدم اختبـار الإشـارة في مستـوى ٥٪ لفحص ما إذا كان لمجمـوعـة من الفيتامينات تأثير في زيادة الوزن إذا استخدمها ١٠ أشخاص، وكانت أوزانهم قبل استخدامها وبعده كمايلي :

أوزان عشرة أشخاص قبل وبعد استخدام الفيتامينات

الوزن قبل استخدام الفيتامينات	٨٠	٧٥	٩٠	٦٠	٧٤	٧٥	٥٥	٥٩	٦٠	٧١
الوزن بعد استخدام الفيتامينات	٨٢	٧٢	٩٤	٦٣	٧٥	٧١	٥٦	٥٩	٦٥	٧٠

٢ ـ استخدم اختبار ولكوكسون لفحص تأثير مجموعة الفيتامينات على الوزن في تمرين (١).

٣ ـ لقد وجد أن ساعات خارج الدوام التي يطالب بالتعويض عنها موظفان من إحدى الشركات في كل شهر لمدة سنة كما يلي :

ساعات خارج الدوام لموظفين من إحدى الشركات خلال عام

الشهـــر	عدد ساعات الموظف الأول	عدد ساعات الموظف الثاني
محـــرم	٧٠	٦٠
صفـــــر	٧٩	٤٨
ربيع الأول	٥٠	٦٥
ربيع الآخر	٧١	٧٢
جمادى الأولى	٣٠	٥٥
جمادى الآخرة	٦٢	٦٢
رجـــب	٤٨	٤٧
شعبـــان	٥٠	٥٢
رمضـــان	٤١	٤١
شـــوال	٥١	٥٤
ذو القعدة	٦٣	٥١
ذو الحجـة	٣٨	٤٠

استخدم اختبار ولكوكسون لفحص ما إذا كان يوجد فرق في توزيع ساعات خارج الدوام التي يطالب بها الموظفان.

٤ ـ استخدم اختبار مان ويتني (يو) لفحص مايلي:

أ) إذا كان للفيتامينات تأثير في زيادة الوزن في تمرين (١).

ب) إذا كان لساعات خارج الدوام للموظفين في تمرين (٣) نفس التوزيع.

٥ ـ في إحـدى المؤسسات الخاصة العاملة في مجال الدراسات الاقتصادية أخذت ٣ عينات لموظفين فيها مكونة من السعوديين وحجمها ٥ والباكستانيين وحجمها ٤ والأمريكيين وحجمها ٣ من خمسة أقسام مختلفة والمراد معرفة ما إذا كانت توزيعات أعمار الموظفين للعينات الثلاثة متساوية، إذا كانت البيانات كما في الجدول التالي:

توزيعات ثلاث جنسيات في خمسة أقسام في إحدى المؤسسات

القسم / الجنسية	١	٢	٣	٤	٥
السعـوديـون	٢٩	٢٧	٣٠	٣٣	٢٨
الباكستانيـون	٢٨	٢٦	٣٦	٣٩	-
الأمريكيـون	٤٣	٢٤	٣٥	-	-

حيث إن (-) في أي خانة تعني لا توجد قراءة.

(استخدم اختبار كروسكال واليس)

٦ ـ إذا كانت عدد خلايا الدم الحمراء (مليون لكل ملليمتر مكعب) لتسعة من الرجال والنساء هي كمايلي:

رجال ٤,٧٠، ٥,١٥، ٥,٣٥، ٤,٥٠، ٤,٦٠، ٥,٥٥، ٥,١٠، ٤,٣٠، ٦,٦٠

نساء ٤,١٠، ٤,٧٥، ٤,٢٠، ٤,٤٠، ٤,٥٥، ٤,١٠، ٤,٣٠، ٤,٦٠، ٤,٥٠

فاستخدم اختبار مان ويتني لفحص ما إذا كان يوجد فرق بين الجنسين بالنسبة لخلايا الدم الحمراء.

٧ ـ كانت عدد الحوادث المرورية بين السيارات لمدة ١٢ شهرًا في إحدى المدن قبل تطبيق نظام المرور (الجديد) وبعده كمايلي:

الشهر	محرم	صفر	ربيع الأول	ربيع الآخر	جمادى الأولى	جمادى الآخرة	رجب	شعبان	رمضان	شوال	ذو القعدة	ذو الحجة
عدد الحوادث قبل تطبيق النظام	٩٠	٧٥	٨٥	١٣٠	٦٥	٨٩	٤٩	٩٠	١٤٠	٨٥	٨٣	٧٤
عدد الحوادث بعد تطبيق النظام	٩٤	٥٥	٧٠	١٠٥	٨٠	٦٠	٥٥	٦٧	١٢٠	٩٢	٨٣	٧١

استخدم اختبار ولكوكسون للتعليق على جدوى النظام الجديد للمرور.

٨ ـ إذا كانت تقديرات ٣ مجموعات من الطلبة (من خريجي ثلاث ثانويات مختلفة) في مادة الرياضيات هي كمايلي:

المجموعة الأولى: أ ، جـ ، ب + ، جـ +، د

المجموعة الثانية: ب ، هـ ، جـ + ، أ ، أ ، ب ، ب

المجموعة الثالثة: أ ، ب ، أ ، أ ، هـ ، هـ ، جـ + ، د ، ب +

ادرس ما إذا كان يوجد فرق معنوي بين مجموعات الطلاب الثلاث في مادة الرياضيات.

الفصل الرابع عشر

تحليل التباين

(١٤ ـ ١) مقدمـــة

استخدمنا فيما سبق الإحصائية ص والإحصائية تي في فحص مدى وجود فرق بين متـوسطي عينتين. كما أشرنا في الفصل الثاني عشر إلى الاختبارات غير المعلمية لفحص الفرق بين مجموعتين في حالة عدم امكانية معرفة التوزيع الذي تتبعه البيانات ولو بصورة تقريبية. والجدير بالذكر أن مثل هذه الاختبارات يمكن استخدامها في حالة وجود أكثر من مجموعتين على حدة، ومقارنتهما معًا. ولكن من الملاحظ أننا نحتاج إلى إجـراء الفحص ٦ مرات مثـلاً عنـدمـا نود فحص وجود فرق بين متوسطات ثلاث مجمـوعـات من البيانـات مثلاً أى $^{3}\text{ق}_{2}$ وعند فحص مدى اختلاف المتوسطات في م مجموعة نحتاج إلى $^{\text{م}}\text{ق}_{2}$ مرة.

من الملاحظ أنه بالإضافة إلى أن هذه الطريقة متعبة ومملة فإنها أكثر عرضةً للخطأ الحسابي لكثرة المقادير المراد حسابها فيها. في الواقع إن اختبار كروسكال واليس يعتبر تعميما لمثل هذه الفحوصات عند عدم معرفة التوزيع الاحتمالي الذي يحكم البيانات المدروسة، ولكنه تقريبي أسوة بجميع الاختبارات غير المعلمية ولا نلجأ إليه عادة إلا عند صغر العينة أو عدم إمكانية التعرف على توزيعها.

وقبـل أن نستعـرض البديل الأدق والأسرع لمقارنة متوسطات عدة مجموعات وفحص ما إذا كان يوجد فروق معنوية أم لا. نورد بعض الأمثلة التي تبين مدى الحاجة له.

نحتاج أحيانًا إلى معرفة مستويات مجموعات مختلفة من الطلاب مثلاً كخريجي عدد من الثانويات أو الذين درسوا عبر برامج تعليمية مختلفة، وذلك بإجراء امتحان موضوع أو أكثر ومقارنة الدرجات لهذه المجموعات. ترتكز معظم الأبحاث الزراعية على المقارنة بين تأثير أسمدة على نمو محصول أو نبات ما أو تأثير أنظمة معينة للتغذية على حيوان ما، فمثلاً لو أراد باحث أن يدرس تأثير الأسمدة أ، ب، جـ على محصول القمح فلابد أن يزرع نوعية القمح المطلوبة تحت نفس الظروف، ويعالج عددًا من أجزاء أو مساحات متساوية من الأرض المزروعة بالسماد أ، ب، جـ كل على حدة ومن ثم نرصد مقادير المحاصيل الناتجة تحت تأثير هذه الأسمدة لدراستها واختبار مدى وجود فروق فيما بينها.

كما قد يكون الموضوع المراد دراسته هو معرفة مدى وجود فرق في الواردات أو الصادرات الشهرية للمملكة على مدى ٣ سنوات أو أكثر أو مقارنة الواردات، أو الصادرات، أو المؤشرات الاقتصادية الأخرى الشهرية من عدة دول.. الخ.

دراسات هذه المقارنة بين متوسطات عدد من المجموعات تظهر في مجالات متعددة من الحياة العملية ففي الطب قد يراد معرفة الفروق بين تأثيرات عقارات معينة على الشفاء من مرض ما، أو تأثير عقار ما على مجموعات مختلفة من البشر مثلاً، في السن، أو الوزن، أو فصيلة الدم، أو عدد كريات الدم الحمراء، أو البيضاء في المليمتر المكعب.. الخ. كما تظهر هذه الدراسات في الصناعة والهندسة والإدارة والتجارب البحثية في مختلف العلوم كالفيزياء والكيمياء والأحياء.. الخ.

ويعتبر مفهوم تحليل التباين من أنجح الأساليب الإحصائية في المقارنة بين متوسطات مجموعات ومن أدقها وأقلها تكاليفًا من الناحية الحسابية كما توجد حزم من برامج الحاسب الآلي لإنجاز حسابات تحليل التباين، مثل حزم ساس و إس بي إس إس و بي إم دى بي. سنحاول في هذا الفصل استعراض (وبصورة مبسطة) كيفية إجراء تحليل التباين مع التركيز على توضيح الأسس الداخلية في تبرير خطوات هذا الأسلوب.

وتجدر الإشارة إلى أننا سنقتصر في هذا الفصل على تحليل التباين باتجاه واحد، أي فحص مجموعات القراءات من متغير مستقل وحيد، أي دراسة إمكانية وجود تأثير على المتغير من استخدام علاجات، أو معاملته بطرق مختلفة، وستتضح الصورة لمثل هذا التحليل من الأمثلة التي سنقدمها فيما بعد.

(١٤ ـ ٢) فرضيات تحليل التباين

يمكن التعبير عن تحليل التباين على أنه نموذج خطي على الصيغة

س = تو + ع + خ

أو

س - تو = ع + خ

أي أنه في أي تجربة فإن القراءة المشاهدة س تختلف عن وسط المجتمع تو بمقدارين الأول ع ناتج من تأثير المعالجة التي تعرضت لها الوحدة التي قراءتها س، والثاني هو التغيير الطبيعي أو الخطأ خ، ولو كانت المعالجة عديمة التأثير أي أن ع = صفرًا فإن الفرق الناتج بين مختلف القراءات هو عبارة عن الخطأ العشوائي الذي سببه الفحص الإحصائي، وأنه فرق سطحي وليس معنويًا.

والفرضيات التي لا يمكن تطبيق أسلوب تحليل التباين أو الاعتماد عليه إلا بتوفرها هي:

ا) يجب أن يكون الخطأ المتوقع عشوائيًا في كل المجموعات المعالجة أي أن تكون معالجة المجموعات محل الدراسة باتجاه واحد، وتحت الظروف نفسها تقريبًا.

ب) يجب ألا يكون الاختلاف في قيم بيانات المجموعات كبيرًا جدًّا بحيث يعزى إلى أكثر من كون ذلك صدفة فقط. أي تكون بيانات المجموعات متجانسة أو متقاربة وفي حالة ظهور تباين إحدى المجموعات بقيمة مختلفة وبصورة متميزة عن تباينات المجموعات الأخرى، فلا بد من إعادة النظر في تصميم التجربة، أو الظروف التي أجريت فيها.

جـ) يجب أن يتبـع المتغير المراد دراسته عن طريق تحليل التباين التوزيع الطبيعي، وذلـك لأن تحليل التبـاين من الاختبـارات المعلمية التي ترتبط بطبيعـة توزيع المجتمع المراد دراسته، وتجدر الإشارة إلى إمكانية تطبيق تحليل التباين في حالة الإنحراف البسيط للبيانات عن التوزيع الطبيعي.

وسنستعرض في هذا الفصل تحليل التباين لبيانات تتفق مع الفرضيات الأساسية للتحليل. علمًا بأنه يمكن استخدام بعض التحويلات مثل أخذ لوغاريثم البيانات الناتجة لجعلها تقترب من الفرضيات السابقة ومن ثم إجراء تحليل التباين بالصورة المعتادة.

(١٤ ـ ٣) استخدام تحليل التباين

أراد أحد الباحثين في قسم الإنتاج الحيواني معرفة تأثير ثلاث نوعيات من أنظمة التغـذية أ، ب، جـ على أحـد أنـواع البقر. اختار لذلك ١٨ بقرة تعيش في نفس الحظيرة، وتحت نفس الظروف وأعطى كل ست أختيرت عشوائيًا منها الرموز أ أو ب أو جـ على التوالي. وبعد فترة زمنية كافية وجد أن الزيادة في الوزن مقربة لأقرب كيلوجرام هي كما في الجدول التالي:

الزيادة في أوزان الأبقار للأغذية الثلاثة

أ	ب	جـ
١٦	٩	١٤
١٧	١٣	١٩
١١	١٢	١٣
١٥	١١	١١
١٨	١٥	١٣
١٩	١٢	١٤

في هذه الحالة يكون عدد المجموعات ل = ٣ وعدد القراءات في كل مجموعة هي $ن_أ$ ، $ن_ب$ ، $ن_ج$ حيث إن كلاً منها تساوي ٦ (في هذه التجربة) كما أن ن = $ن_أ$ + $ن_ب$ + $ن_ج$ = ١٨ ، ونوجد لكل مجموعة متوسطها وتباينها كما يلي :

$$\therefore \bar{س}_أ = \frac{س_{١أ} + س_{٢أ} + \cdots + س_{نأ}}{ن_أ}$$

$$\therefore \bar{س}_أ = \frac{١٦ + ١٧ + ١١ + ١٥ + ١٨ + ١٩}{٦}$$

$$= ١٦$$

$$\therefore تبا(س_أ) = \frac{مجـ(س_أ - \bar{س}_أ)^٢}{ن_أ}$$

$$\therefore تبا(س_أ) = \frac{(١٦ - ١٦)^٢ + (١٧ - ١٦)^٢ + \cdots + (١٩ - ١٦)^٢}{٥}$$

$$= ٨,٠٠٤$$

وبالمثل نجد أن :

$\bar{س}_ب = ١٢$ ، $\bar{س}_ج = ١٤$

$تبا(س_ب) = ٣,٩٩٦$ ، $تبا(س_ج) = ٧,٢٠٠$

أما المتوسط الكلي للقراءات الناتج من جمع جميع القراءات في المجموعات الثلاث ومن ثم تقسيمها على ن فيكون :

$$\bar{س} = \frac{مجـ س._أ + مجـ س._ب + مجـ س._ج}{ن}$$

أى أنه في هذه الحالة يكون :

$$\bar{س} = \frac{\bar{س}_أ + \bar{س}_ب + \bar{س}_ج}{٣}$$

وذلك لأن عدد المفردات في كل المجموعات متساوي .

$$\therefore \quad \bar{س} = \frac{١٦ + ١٢ + ١٤}{٣} = ١٤$$

أما التباين الكلي فهو أن نجد متوسط تباعد جميع القراءات في كل المجموعات الثلاث عن الوسط الكلي أي أن :

$$تبا = \frac{تبا (س_{أ}) + تبا (س_{ب}) + تبا (س_{جـ})}{٣}$$

$$\therefore تبا = \frac{٨,٠٠٤ + ٣,٩٩٦ + ٧,٢}{٣}$$

$$= ٦,٤$$

أما مجموع مربع انحرافات الأوساط عن الوسط الكلي فتحسب كمايلي :

$$م م = مجـ (\bar{س}_{.} - \bar{س})^{٢}$$

$$= (١٦ - ١٤)^{٢} + (١٢ - ١٤)^{٢} + (١٤ - ١٤)^{٢}$$

$$= ٨$$

وبذلك نجد أن تباين $\bar{س}$ هو مجموع مربعات الانحراف السابق على عدد المجموعات ل مطروحًا منه واحد بغرض الحصول على التباين غير المتحيز أي أن :

$$م م_{\bar{س}} = \frac{م م_{.}}{ل - ١}$$

$$تبا (\bar{س}) = \frac{٨}{٣ - ١} = ٤$$

ويعطى التغير الحاصل بين أوساط المجموعات تقديرًا لتباين المجتمع . فمعلوم أننا نستطيع نظريًا سحب عشرات أو مئات المجموعات ، كل مجموعة تتكون من ست قراءات حيث إن ن = ٦ ومن ذلك نوجد توزيع العينة لأوساط المجموعات ، حيث إننا نحسب تباين توزيع الأوساط من تباين المجتمع من العلاقة على الصورة :

$$تبا (\bar{س}) = \frac{تبا}{ن}$$

أي أن :

تبـا = ن تبا ($\bar{س}$)
= ٦ × ٤
= ٢٤

وهذا تقدير آخر لتباين المجتمع من التقديرات الحاصلة بين المجموعات ومن الملاحظ أنه يختلف في قيمته عن التباين داخل المجموعات الذي كانت قيمته ٦,٤ . ومن الملاحظات الأساسية في هذه الحالة هو أن تقدير التباين بين المجموعات يعتمد على ثلاث قراءات فقط، بينما يعتمد التباين داخل المجموعات على ١٨ قراءة، وهي مجموع قراءات المجموعات الثلاث.

وقبل أن نجري اختبار تحليل التباين بصورة نهائية نشير إلى قاعدة مهمة يعتمد عليها هذا التحليل، وهي :

«أي تغير ناتج بين أوساط المجموعات يتكون من تقدير تباين المجتمع بالإضافة إلى كمية ناتجة بسبب الاختلافات الناتجة بتأثير المعالجات المستخدمة».

ولاختبار ما إذا كان تقدير تباين المجتمع عن طريق تباين متوسطات المجموعات هو التقدير الوحيد لتباين المجتمع، أو يحتوي على كمية إضافية لاختلاف قيم أوساط المجموعات، نستخدم توزيع ف حيث تكون قيمة ف المحسوبة (ف) هي :

$$ف = \frac{٢٤}{٦,٤} = ٣,٧٥$$

وتقل قيمة ف المحسوبة كلما قلت قيمة تقدير تباين المجتمع الناتجة عن الفروق بين أوساط المجموعات والعكس بالعكس أي أن ف تعكس التغير بين قيم المجموعات أو بين المعالجات المستخدمة في كل مجموعة.

أما حساب ف من الجدول رقم (٥) والملحق في نهاية الكتاب نتجت عن قيمة ف تحت ٠,٠٥ أو ٠,٠١، ففي التقاء العمود الثاني مع الصف ١٥ نجد أن قيمة $ف_{(٢، ١٥)}$ هي ٣,٦٨، وتناظر ٠,٠٥ أو $ف_{(٢، ١٥)}$ = ٦,٧٦ وتناظر ٠,٠١.

ونتيجة التحليل هي أنه تحت مستوى معنوي ١٪ فإن الاختلاف بين أوساط المجموعات ليس معنويًا أو أنه ليس كبيرًا لدرجة أنه لا يمكن استخدامه في تقدير تباين المجتمع لأن قيمة ف المحسوبة ٣,٧٥ أقل من قيمة ف المجدولة في جدول رقم (٥) تحت مستوى ١٪ وهي ٦,٣٦. وبعبارة أخرى لا يوجد فرق بين المجموعات أو المعالجات الثلاث السابقة تحت مستوى ٠,٠١.

بينما نلاحظ أنه ـ تحت مستوى ٠,٠٥ ـ يوجد فرق معنوي لأن قيمة ف المحسوبة تساوي ٣,٧٥، بينما قيمة $ف_{(٢، ١٥)}$ = ٣,٦٨، وبالتالي هناك فرق بين المعالجات أو المجموعات الثلاث السابقة تحت مستوى معنوية ٠,٠٥.

والآن نلخص الحسابات السابقة في جدول يسمى جدول تحليل التباين كمايلي:

جدول تحليل التباين

المصدر	م م	د.ح.	تو(م)	اختبار ف
الفرق بين المجموعات	$م م_{ب}$	(ل - ١)	ا = $م م_{ب}$ ÷ (ل - ١)	$\frac{أ}{ب}$
الفرق داخل المجموعات	$م م_{د}$	(($ن_{١}$ - ١) + ... + ($ن_{ل}$ - ١))	ن = $م م_{د}$ ÷ (($ن_{١}$ - ١) + ... + ($ن_{ل}$ - ١))	
المجموع	$م م_{ك}$	ن - ١		

حيث إن $م م_{ب}$ هي مجموع مربعات الانحرافات بين المجموعات.

$م م_{د}$ مجموع مربعات الانحرافات داخل المجموعات.

$م م_{ك}$ مجموع مربعات الانحرافات الكلي.

د.ح . درجات الحريـة .
تو (م) متوسط مجموع مربعات الانحرافات .

ففي مثالنا السابق في مسألة تغذية الأبقار يكون :

$$م م_{ب} = \frac{(مجـ س_{أ.})^{٢}}{ن_{١}} + \frac{(مجـ س_{ب.})^{٢}}{ن_{٢}} + \frac{(مجـ س_{جـ.})^{٢}}{ن_{٣}} - \frac{(مجـ س_{أ.} + مجـ س_{ب.} + مجـ س_{جـ.})^{٢}}{ن}$$

$$م م_{ك} = مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}$$

$$م م_{د} = م م_{ك} - م م_{ب}$$

حيث إن $ن = ن_{١} + ن_{٢} + ... + ن_{ل}$

أما درجات الحرية بالنسبة لمجموع المربعات بين المجموعات فهي ل - ١ ، ودرجات الحرية بالنسبة لمجموع المربعات داخل المجموعات $[(ن_{١} - ١) + (ن_{٢} - ١) + ... + (ن_{ل} - ١)]$.

وبتطبيق ذلك المثال السابق تحسب أولاً المقادير التالية :

	أ	أ٢	ب	ب٢	جـ	جـ٢
	١٦	٢٥٦	٩	٨١	١٤	١٩٦
	١٧	٢٨٩	١٣	١٦٩	١٩	٣٦١
	١١	١٢١	١٢	١٤٤	١٣	١٦٩
	١٥	٢٢٥	١١	١٢١	١١	١٢١
	١٨	٣٢٤	١٥	٢٢٥	١٣	١٦٩
	١٩	٣٦١	١٢	١٤٤	١٤	١٩٦
المجموع	٩٦	١٥٧٦	٧٢	٨٨٤	٨٤	١٢١٢

ومن ذلك نجد أن :

$$\text{م م}_{\text{ب}} = \frac{(٩٦)^٢}{٦} + \frac{(٧٢)^٢}{٦} + \frac{(٨٤)^٢}{٦} - \frac{(٩٦ + ٧٢ + ٨٤)^٢}{١٨}$$

$$= ٣٥٧٦ - ٣٥٢٨$$

$$= ٤٨$$

$$\text{م م}_{\text{ك}} = (١٥٧٦ + ٨٨٤ + ١٢١٢) - \frac{(٩٦ + ٧٢ + ٨٤)^٢}{١٨}$$

$$= ٣٦٧٢ - ٣٥٢٨$$

$$= ١٤٤$$

ومنه نجد أن :

$$\text{م م}_{\text{د}} = \text{م م}_{\text{ك}} - \text{م م}_{\text{ب}}$$

$$= ١٤٤ - ٤٨$$

$$= ٩٦$$

ويكون جدول تحليل التباين هو:

المصـــدر	م م	د.ح.	تو (م)	قيمة ف
الفرق بين المجموعات	٤٨	٣ - ١ = ٢	٢٤	٣,٧٥
الفرق داخل المجموعات	٩٦	(٦ - ١) + (٦ - ١) + (٦ - ١) = ١٥	٦,٤	

ونجد قيمة ف سواءً في مستوى ٠,٠١ ، أو ٠,٠٥ وبدرجات حرية (٢ ، ١٥) وهي ٦,٣٦ أو ٣,٦٨ وبالتالي فإننا نجد أن قيمة ف المحسوبة غير معنوية عند مستوى ٠,٠١ ومعنوية عند مستوى ٠,٠٥ لأن ف المحسوبة = ٣,٧٥. ويشار أحيانًا في بعض جداول تحليل البيانات للفرق بين المجموعات بالمعالجة، والفرق داخل المجموعات بالخطأ، ويضاف كذلك المجموع، وسنوضح هذه الصيغة في البند التالي.

(١٤ ـ ٤) تحليل تصميم تام العشوائية

ما زلنا في طور تحليل التباين وفي اتجاه واحد وذلك لدراسة الاختلاف في أوساط قراءات متغير ما تعرَّض لتأثير خارجي ، أراد أحد الباحثين اختبار تأثير حضور المدرس دورة في الرياضيات المعاصرة واستيعاب الطلاب لمقرر الرياضيات ، فجرى اختيار عينة مكـونة من ١٦ طالبًا من المستوى الدراسي نفسه ولهم مستوى الذكاء نفسه تقريبًا ، وأخـذت عينة لها المؤهلات نفسها من المدرسين بعضهم حضر دورة ، وجرى توزيع هؤلاء الطلاب على فصول المدرسين ، وكانت نتائجهم في نهاية البرنامج المعد كمايلي :

جدول (١٤ ـ ٢) درجات الطلاب حسب دورة الرياضيات للمدرس

بدون دورة (س$_{١}$)	دورة قصيرة (س$_{٢}$)	دورة متوسطة (س$_{٣}$)	دورة طويلة (س$_{٤}$)
٥٥	٦٥	٨٠	٨٥
٦٠	٦٥	٨٠	١٠٠
٥٥	٧٠	٧٥	٩٥
٥٠	٦٠	٨٥	٩٥

ومن ذلك نحسب المقادير كما في الجدول الآتي :

	س$_{١}$	س$_{١}^{٢}$	س$_{٢}$	س$_{٢}^{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٣}^{٢}$	س$_{٤}$	س$_{٤}^{٢}$
	٥٥	٣٠٢٥	٦٥	٤٢٢٥	٨٠	٦٤٠٠	٨٥	٧٢٢٥
	٦٠	٣٦٠٠	٦٥	٤٢٢٥	٨٠	٦٤٠٠	١٠٠	١٠٠٠٠
	٥٥	٣٠٢٥	٧٠	٤٩٠٠	٧٥	٥٦٢٥	٩٥	٩٠٢٥
	٥٠	٢٥٠٠	٦٠	٣٦٠٠	٨٥	٧٢٢٥	٩٥	٩٠٢٥
المجموع	٢٢٠	١٢١٥٠	٢٦٠	١٦٩٥٠	٣٢٠	٢٥٦٥٠	٣٧٥	٣٥٢٧٥

$$م م_{ك} = مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}$$

$$\therefore م م_{ك} = (١٢١٥٠+١٦٩٥٠+٢٥٦٥٠+٣٥٢٧٥) - \frac{(٢٢٠ + ٢٦٠ + ٣٢٠ + ٣٧٥)^{٢}}{١٦}$$

$$= ٩٠٠٢٥ - ٨٦٢٨٩,٠٦٢$$

$$= ٣٧٣٥,٩٣٨$$

$$م م_{ب} = \frac{(مجـ س_{١})^{٢}}{ن_{١}} + \frac{(مجـ س_{٢})^{٢}}{ن_{٢}} + \frac{(مجـ س_{٣})^{٢}}{ن_{٣}} + \frac{(مجـ س_{٤})^{٢}}{ن_{٤}} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}$$

$$= \frac{(٢٢٠)^{٢}}{٤} + \frac{(٢٦٠)^{٢}}{٤} + \frac{(٣٢٠)^{٢}}{٤} + \frac{(٣٧٥)^{٢}}{٤} - ٨٦٢٨٩,٠٦٢$$

$$= ٨٩٧٥٦,٢٥٠ - ٨٦٢٨٩,٠٦٢$$

$$= ٣٤٦٧,١٨٨$$

وبالتالي نجد أن

$$م م_{د} = م م_{ك} - م م_{ب}$$

$$= ٣٧٣٥,٩٣٨ - ٣٤٦٧,١٨٨$$

$$= ٢٦٨,٧٥٠$$

ويكون جدول تحليل التباين على الصورة

المصـــدر	م م	د.ح.	تو(م)	ف
المعالجـات	٣٤٦٧,١٨٨	٣	١١٥٥,٧٢٩	٥١,٦
الخطـــأ	٢٦٨,٧٥	١٢	٢٢,٣٩٥٨	
المجموع الكلي	٣٧٣٥,٩٣٨	١٥	-	

وباستخدام جدول ف نجد أنه تحت مستوى ٥٪ و ١٪ هي على التوالي:

$ف_{(٣، ١٢)} = ٣,٨٨$ ، $ف_{(٣، ١٢)} = ٦,٩٣$

أي أنه توجد فروق معنوية بين درجات الطلاب الذين قام بتدريسهم مدرسون بمدد مختلفة من الدورات في الرياضيات ونستنتج من ذلك أن دورات الرياضيات المعاصرة ذات تأثير إيجابي على استيعاب الطلاب للمقرر.

نلاحظ أنه يمكن تطبيق أسلوب تحليل التباين حتى في حالة وجود مجموعة ليست متساوية القراءات، والفرق الوحيد يكمن في حساب $م م_{ب}$ ، وكذلك في درجات الحرية، وسنورد بعضًا من هذه الحالات في التمارين. علمًا أنه من المستحسن تقليل عدد المتغيرات ما أمكن ذلك وبالتالي يجب أن تكون أعداد القراءات في كل المجموعات متقاربة إلا في حالة الضرورة كأن تكون طبيعة التجربة لا تمكننا من ذلك.

(١٤ ـ ٥) تمارين

١ ـ وجد أن عدد الأطفال في الأسرة السعودية في ثلاث عينات كل منها يتكون من ٥ أسر من ثلاث مناطق في مدينة الرياض هي كما يلي:

أعداد الأطفال في خمس أسر في ثلاث مناطق مختلفة

المنطقة أ عدد الأطفال	المنطقة ب عدد الأطفال	المنطقة جـ عدد الأطفال
٤	٦	٥
٠	٨	٢
٨	١٢	١
٥	٨	٠
٢	٥	٣

استخدم تحليل التباين واختبار ف لمعرفة ما إذا كان يوجد فرق بين متوسط عدد الأطفال في المناطق الثلاث.

٢ ـ أعطي أحد الباحثين قراءات ثلاث عينات من ثلاثة مواقع لكمية النيتروجين مقاسة بالميللجرام في ١٠٠ جرام والمطلوب فحص ما إذا كان يوجد اختلاف معنوي في كميات النيتروجين في هذه المواقع الثلاثة.

كميات النيتروجين لثلاث عينات في ثلاث مناطق مختلفة

موقع أ	موقع ب	موقع جـ
٢٦٠	٢٥٠	٢٤٠
١٩٨	١٩٠	١٨٠
٢١١	٢٠٥	١٩٥
٢٢٦	٢٥٠	١٩٠
٣٢٠	٣١٠	٢٠٠
٢٥٠	٢٣٠	—

٣ ـ لاختبار فاعلية أربعة أنواع من السماد على محصول القمح أخذت عشرون قطعة من الأرض متجانسة تمامًا واستعمل لكل منها نوع من الأسمدة أ، ب، جـ، د وكانت النتائج كالتالي:

إنتاج القمح باستخدام أربع أنواع مختلفة من السماد

أ	ب	جـ	د
٣٩٠	٤٢٥	٣٧٥	٤١٧
٣٥٠	٤٠٥	٣٦٠	٤٠٨
٤١٠	٣٧٠	٤٣٥	٣٩٠
٣٦٨	٤٢٥	٣١٥	٤٠٥
٤٠٤	٤٠٣	—	٤٢٠
—	٤٠٥	—	٤٥٦

والمطلوب اختبار فاعلية الأسمدة الأربعة عند مستوى معنوية ٠,٠٥.

٤ ـ يوجد أربع آلات في مصنع يعمل على كل آلة عامل مدرب بطريقة معينة. أخذت عينات من الآلات الأربع أ، ب، جـ، د، وكانت النتائج كالتالي:

إنتاج أربع عُمّال مدربين بطريق مختلفة

أ	ب	جـ	د
١٠٥	١٠٧	١١٢	١١٣
١٠٧	١١٠	١١١	١١١
١١٢	١٠٧	١١٢	١١٠
١١١	١٠٦	١١٠	١٠٩

والمطلوب عند مستوى معنوي ٠,٠٥ اختبر ما إذا كان إنتاج الآلات الأربع متجانسًا (أي له نفس التوزيع).

٥ ـ استخدمت أربع أنواع من الحمية (نظام التغذية لمجموعة الأطفال) يعاني كل منهم من مرض نفسي ما وكانت الزيادة في أوزانهم بالكيلوجرام هي كمايلي:

الحمية الأولى:	٣,٢	٢	٣	٤,٢	٣,٥
الحمية الثانية:	٢,٣	٢,٧	٣,٤	٢,٩	٢,٩
الحمية الثالثة:	٦,٣	٣,٩	٥,٧	٤,٥	٥,١
الحمية الرابعة:	٤,٥	٣	٣,٤	٤	٢,٥

استخدم تحليل التباين لفحص الفرق بين أنواع الحمية على أوزان الأطفال.

٦ ـ أخذت عينات من السيارات غير متساوية الحجم أصحابها يسكنون في ثلاثة أحياء مختلفة، وكان سعر سيارة كل منهم بآلاف الريالات وحسب سعر السوق الحالية هي كمايلي:

أسعار السيارات لعينة من سكان ثلاثة أحياء مختلفة

أسعار سيارات ساكني الحي الأول	٩	١٣	١٩	٢٥	٣٦	
أسعار سيارات ساكني الحي الثاني	١٠	٢١	٢٩	٤٠		
أسعار سيارات ساكني الحي الثالث	١٢	١٦	١٢	١٧	٢٠	١٩

بيّن ما إذا كان يوجـد اختـلاف في متوسط أسعار السيارات في الأحياء الثلاثة باستخدام تحليل التباين.

٧ ـ أعد أحد الباحثين التربويين ثلاث نسخ من إجابة أحد الامتحانات النهائية لعشرة طلاب في مادة ما في المستوى الأول في جامعة الملك سعود وأعطيت لثلاثة مدرسين للمقرر لتصحيحها فكانت النتائج كالتالي:

درجات تصحيح ثلاثة مدرسين لتسعة أوراق إجابة

المدرس الأول	٩	٧	٣	٤	٥	٦	٨	٩	٣
المدرس الثاني	٥	٨	٧	٩	٧	٦	٨	٨	٥
المدرس الثالث	٧	٣	٧	٨	٦	٥	٤	٣	٥

بيّن ما إذا كان يوجد اختلاف معنوي في التصحيح للمدرسين الثلاثة.

٨ ـ البيانات التالية تعطى النقاط التي حصل عليها مجموعة من الجنود في التهديف لإصابة هدف باستخدام نفس البندقية، ونفس العدد من الطلقات، وباستخدام ثلاث طرق للتهديف وهي عندما تكون العينان مفتوحتان، أو العين اليسرى فقط مفتوحة، وأخيراً عندما تكون العين اليمنى فقط مفتوحة، وكانت النتائج كما يلي:

نقاط التهديف باستخدام ثلاث طرق مختلفة

استخدام العينين معا	٥٢	٦٤	٥٢	٤٥	٤٦	٦٢	٥٥
استخدام العين اليسرى فقط	٤٠	٤٥	٥٦	٤٩	٣٨		
استخدام العين اليمنى فقط	٤٧	٤٩	٥٢	٥٣	٤٥	٦٠	

بيِّن ما إذا كان يوجد اختلاف معنوي في استخدام الثلاث طرق السابقة.

ثبت الرموز والمصطلحات

الرمز	المصطلح
تبا	تبايـــن
تبع	تباين العينة
تق$_{٠}$	تقدير سنة الأساس
تق$_{ن}$	تقدير سنة (ن)
تو	توقـــع
تو (م)	متـــوسـط مجمـوع مـربـعـات الانحرافات
ح (٠)	احتمال حادثة
د. ح.	درجات الحرية
ر$_{١}$	الربيع الأدنى (أو الأول)
ر$_{٣}$	الربيع الأعلى (أو الثالث)
ر	نصف المدى الربيعي
$\overline{\text{س}}$	المتوسط
س	القيمة المعيارية للمقدار س
فر$_{٠}$	الفرضية الأولية
فر$_{١}$	الفرضية البديلة
ك	تكرار الفئة تحت الدراسة
كا^{٢}	مربع كاى

الرمز	المصطلح
م	المنوال
م$_{ب}$	معـامـل الارتبـاط الخـطـي (بيرسون)
م$_{ت}$	معامل التوافق
مت	التكرارات المتوقعة
م$_{ر}$	المئين رقم ر
م$_{س}$	معـامـل ارتـبـاط الـرتـب (سبيرمان)
م$_{ق}$	معامل اقتران يل
مش	التكرارات المشاهدة
م م	مجمـوع مربعـات انحـرافـات الأوساط عن الوسط الكلي (أو العام)
م م$_{ب}$	مجمـوع مربعـات الانحرافات بين المجموعات
م م$_{د}$	مجمـوع مربعـات الانحرافات داخل المجموعات

$م م_{\bar{س}}$	متوسط مربعات انحرافات الأوساط عن الوسط العام
$م م_{ك}$	مجموع مربعات الانحرافات الكلي
$م_{و}$	معامل تشاوبر للاقتران
$م_{ى}$	معامل بيرسون للاقتران
نجع	الانحراف المعياري للعينة
نحر	انحراف معياري

المراجع

أولاً: المراجع العربية

أبو صالح، محمد صبحي، وعوض، عدنان محمد (١٩٨٣). *مقدمة في الإحصاء*. نيويورك: دار وايلي للنشر.

الصياد، جلال و سمرة، عادل (١٩٧٦). *مبادىء الإحصاء لطلاب الدراسات الأدبية*. الطبعة الأولى. جدة: جامعة الملك عبدالعزيز.

بنيخلف، مصطفى (١٩٧٥). *الاحتمالات والإحصاء الرياضى*. المغرب، الدار البيضاء: دار النشر المغربي.

بيوسشتز، سيمور (١٩٧٤). *الاحتمالات*. ماجروهيل للنشر؛ ترجمة سامح داود ومراجعة عبدالعظيم أنيس، الرياض: دار المريخ.

زايد، مصطفى (١٩٨٤). *الإحصاء ووصف البيانات*. الرياض: دار العلوم للطباعة والنشر.

سرحان، **أحمد عباده (١٩٦٥).** *طرق التحليل الإحصائي*. القاهرة: دار المعارف.

عاشور، سمير كامل (١٩٧٧). *مبادىء الإحصاء الوصفي والتحليلي*. القاهرة: معهد الإحصاء، جامعة القاهرة.

عبدالرحمن، جوهرة فهد محمد (١٤٠٠). العدد ودلالته، دراسة لغوية نحوية قرآنية. بحث مقدم كجزء من متطلبات *الماجستير في علوم اللغة العربية*، الرياض: كلية التربية للبنات.

كنجو، أنيس (١٩٨٠). *الإحصاء وطريق تطبيقه في طرق البحث العلمي*. الجزء الثاني. بيروت: مؤسسة الرسالة.

مصطفى، مدني دسوقي (١٩٧٥). *مبادىء في علم الإحصاء*. القاهرة: دار النهضة العربية.

مصطفى، مدني دسوقي (١٩٧٩). *مبادىء في نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي*. القاهرة: دار النهضة العربية.

منتصر، سعدية (١٩٧٥). *الإحصاء الوصفي مع مقدمة في الحاسبات الإلكترونية*. القاهرة: مكتبة التجارة والتعاون.

منصور، أنيس فرنسيس و عبدالعزيز، زكي محمد (١٩٧٢) *مقدمة إلى الإحصاء*. القاهرة: مكتبة الأنجلو المصرية.

هويل، ح. (١٩٨٤). *المبادىء الأولية في الإحصاء*. الطبعة الرابعة؛ ترجمة بدرية شوقي عبدالوهاب ومحمد كامل الشربيني، نيويورك: جون وايلي.

هيكل، عبدالعزيز فهمي و أحمد، فاروق عبدالعظيم (١٩٨٠). *الإحصاء*. بيروت: دار النهضة العربية للطباعة والنشر.

ثانيًا: المراجع الأجنبية

Ferguson, G.A. (1981). *Statistical Analysis in Psychology and Education*. London: McGraw Hill.

Francis, A. (1979). *Advanced Level Statistics*. Stanley Thrones (Publ.) Ltd.

Gupta, C.B. (1973). *An Introduction to Statistical Methods*. India, Sahibabad: Vikas Pub. House Pvt. Ltd.

Huntsbarger, D.V. and **Billingsley, P.** (1973). *Elements of Statistical Inference*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Lapin, L. (1980). *Statistics: Meaning and Method*. New York: Harcourt Blace Jonanorrich Inc.

Lindley, D.V. and **Miller, J.C.P.** (1953). *Cambridge Elementary Statistical Tables*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Mendenhall, W. (1980). *Introduction to Probability and Statistics:* North Scituate: Duscbury Press.

Regier, M.H.; Mohapatra, R.N. and **Mohapatra, S.N.** (1982). *Biochemical Statistics with Computing*. Chichester: Research Studies Press.

Scheffer, W.C. (1979). *Statistics for Biological Sciences*. 2nd Ed. Reading, MA, U.S.A.: Addison-Wesley.

Sprinthall, R.C. (1982). *Basic Statistical Analysis*. Reading, MA, U.S.A.: Addison-Wesley.

الجـداول

جدول (١) الأرقام العشوائية

٠٩	١٨	٨٢	٠٠	٩٧	٣٢	٨٢	٥٣	٩٥	٢٧	٠٤	٢٢	٠٨	٦٣	٠٤	٨٣	٣٨	٩٨	٧٣	٧٤
٩٠	٠٤	٥٨	٥٤	٩٧	٥١	٩٨	١٥	٠٦	٥٤	٩٤	٩٣	٨٨	١٩	٩٧	٩١	٨٧	٠٧	٦١	٥٠
٧٣	١٨	٩٥	٠٢	٠٧	٤٧	٦٧	٧٢	٦٢	٦٩	٦٢	٢٩	٠٦	٤٤	٦٤	٢٧	١٢	٤٦	٧٠	١٨
٧٥	٧٦	٨٧	٦٤	٩٠	٢٠	٩٧	١٨	١٧	٤٩	٩٠	٤٢	٩١	٢٢	٧٢	٩٥	٣٧	٥٠	٥٨	٧١
٥٤	٠١	٦٤	٤٠	٥٦	٦٦	٢٨	١٣	١٠	٠٣	٠٠	٦٨	٢٢	٧٣	٩٨	٢٠	٧١	٤٥	٣٢	٩٥
٠٨	٣٥	٨٦	٩٩	١٠	٧٨	٥٤	٢٤	٢٧	٨٥	١٣	٦٦	١٥	٨٨	٧٣	٠٤	٦١	٨٩	٧٥	٥٣
٢٨	٣٠	٦٠	٣٢	٦٤	٨١	٣٣	٣١	٠٥	٩١	٤٠	٥١	٠٠	٧٨	٩٣	٣٢	٦٠	٤٦	٠٤	٧٥
٥٣	٨٤	٠٨	٦٢	٣٣	٨١	٥٩	٤١	٣٦	٢٨	٥١	٢١	٥٩	٠٢	٩٠	٢٨	٤٦	٦٦	٨٧	٩٥
٩١	٧٥	٧٥	٣٧	٤١	٦١	٦١	٣٦	٢٢	٦٩	٥٠	٢٦	٣٩	٠٢	١٢	٥٥	٧٨	١٧	٦٥	١٤
٨٩	٤١	٥٩	٢٦	٩٤	٠٠	٣٩	٧٥	٨٣	٩١	١٢	٦٠	٧١	٧٦	٤٦	٤٨	٩٤	٩٧	٢٣	٠٦
٧٧	٥١	٣٠	٣٨	٢٠	٨٦	٨٣	٤٢	٩٩	٠١	٦٨	٤١	٤٨	٢٧	٧٤	٥١	٩٠	٨١	٣٩	٨٠
١٩	٥٠	٢٣	٧١	٧٤	٦٩	٩٧	٩٢	٠٢	٨٨	٥٥	٢١	٠٢	٩٧	٧٣	٧٤	٢٨	٧٧	٥٢	٥١
٢١	٨١	٨٥	٩٣	١٣	٩٣	٢٧	٨٨	١٧	٥٧	٠٥	٦٨	٦٧	٣١	٥٦	٠٧	٠٨	٢٨	٥٠	٤٦
٥١	٤٧	٤٦	٦٤	٩٩	٦٨	١٠	٧٢	٣٦	٢١	٦٤	٠٤	٩٩	١٣	٤٥	٤٢	٨٣	٦٠	٩١	٩١
٩٩	٥٥	٩٦	٨٣	٣١	٦٢	٥٣	٥٢	٤١	٧٠	٦٩	٧٧	٧١	٢٨	٣٠	٧٤	٨١	٩٧	٨١	٤٢
٣٣	٧١	٣٤	٨٠	٠٧	٩٣	٥٨	٤٧	٢٨	٩٦	٥١	٩٢	٦٦	٤٧	٢١	٥٨	٣٠	٣٢	٩٨	٢٢
٨٥	٢٧	٤٨	٦٨	٩٣	١١	٣٠	٣٢	٩٢	٧٠	٢٨	٨٣	٤٣	٤١	٣٧	٧٣	٥١	٥٩	٠٤	٠٠
٨٤	١٣	٣٨	٩٦	٤٠	٤٤	٠٣	٥٥	٢١	٦٦	٧٣	٨٥	٢٧	٠٠	٩١	٦١	٢٢	٢٦	٠٥	٦١
٥٦	٧٣	٢١	٦٢	٣٤	١٧	٣٩	٥٩	٦١	٣١	١٠	١٢	٣٩	١٦	٢٢	٨٥	٤٩	٦٥	٧٥	٦٠
٦٥	١٣	٨٥	٦٨	٠٦	٨٧	٦٤	٨٨	٥٢	٦١	٣٤	٣١	٣٦	٥٨	٦١	٤٥	٨٧	٥٢	١٠	٦٩
٣٨	٠٠	١٠	٢١	٧٦	٨١	٧١	٩١	١٧	١١	٧١	٦٠	٢٩	٢٩	٣٧	٧٤	٢١	٩٦	٤٠	٤٠
٣٧	٤٠	٢٩	٦٣	٩٧	٠١	٣٠	٤٧	٧٥	٨٦	٥٦	٢٧	١١	٠٠	٨٦	٤٧	٣٢	٤٦	٢٦	٠٥
٩٧	١٢	٥٤	٠٣	٤٨	٨٧	٠٨	٣٣	١٤	١٧	٢١	٨١	٥٣	٩٢	٥٠	٧٥	٢٣	٧٦	٠٢	٤٧
٢١	٨٢	٦٤	١١	٣٤	٤٧	١٤	٣٣	٤٠	٧٢	٦٤	٦٣	٨٨	٥٩	٠٢	٤٩	١٣	٩٠	٦٤	٤١
٧٣	١٣	٥٤	٢٧	٤٢	٩٥	٧١	٩٠	٩٠	٣٥	٨٥	٧٩	٤٧	٤٢	٩٦	٠٨	٧٨	٩٨	٨١	٥٦
٢٥	٨٠	٧٢	٤٢	٦٠	٧١	٥٢	٩٧	٨٩	٢٠	٧٢	٦٨	٢٠	٧٣	٨٥	٩٠	٧٢	٦٥	٧١	٦٦
٠٦	١٧	٠٩	٧٩	٦٥	٨٨	٣٠	٢٩	٨٠	٤١	٢١	٤٤	٣٤	١٨	٠٨	٦٨	٩٨	٤٨	٣٦	٢٠
٦٠	٨٠	٨٥	٤٤	٤٤	٧٤	٤١	٢٨	١١	٠٥	٠١	١٧	٦٢	٨٨	٣٨	٣٦	٤٢	١١	٦٤	٨٩
٨٠	٩٤	٠٤	٤٨	٩٣	١٠	٤٠	٨٣	٦٢	٢٢	٨٠	٥٨	٢٧	١٩	٤٤	٩٢	٦٣	٨٤	٠٥	٣٣
١٩	٥١	٦٩	٠١	٢٠	٤٦	٧٥	٩٧	١٦	٤٣	١٣	١٧	٧٥	٥٢	٩٢	٢١	٠٣	٦٨	٢٨	٠٨
٤٩	٣٨	٦٥	٤٤	٨٠	٢٣	٦٠	٤٢	٣٥	٥٤	٢١	٧٨	٥٤	١١	٠١	٩١	١٧	٨١	٠١	٧٤
٠٦	٣١	٢٨	٨٩	٤٠	١٥	٩٩	٥٦	٩٣	٢١	٤٧	٤٥	٨٦	٤٨	٠٩	٩٨	١٨	٩٨	١٨	٥١
٦٠	٩٤	٢٠	٠٣	٠٧	١١	٨٩	٧٩	٢٦	٧٤	٤٠	٤٠	٥٦	٨٠	٣٢	٩٦	٧١	٧٥	٤٢	٤٤
٩٢	٣٢	٩٩	٨٩	٣٢	٧٨	٢٨	٤٤	٦٣	٤٧	٧١	٢٠	٩٩	٢٠	٦١	٣٩	٤٤	٨٩	٣١	٣٦
٧٧	٩٣	٦٦	٣٥	٧٤	٣١	٣٨	٤٥	١٩	٢٤	٨٥	٥٦	١٢	٩٦	٧١	٥٨	١٣	٧١	٧٨	٢٠

جدول (١) الأرقام العشوائية

٨٥	٣٨	٨١	٦٤	٤٧	٦٧	٧٠	٩٥	٨٨	٩٥	٩٧	٣٨	٧١	٦٥	١١	٥٦	٧٧	١٧	١٠	٣٨
٠٣	٦٢	٧٥	٩٤	١١	١٩	٩٧	٣٨	٦١	٩٢	٠٢	٢٥	٩٢	٣٣	٩١	٥٧	٩٤	١٦	٦٤	٣٩
٤٥	٦٨	١٩	١٨	٦٩	٣١	٠٦	٧٦	٦٦	٦٧	٨٠	٣٦	٦٦	٣٩	٩٩	٥٥	٠٤	٤٤	٠٥	٨٤
٥٣	٣١	٤٢	٠٠	١٤	٩٤	١٥	٠٧	٧٠	٢٤	٦٦	٣٢	٩٦	٦٤	٥٧	٧٧	٣٥	٨٠	٤٦	٤٧
٨٩	٧٥	٢٠	٣٤	٦٢	٦٢	٨٥	٩٦	٤٧	٧٦	٩٦	٣٨	٧٢	٩٧	٢٨	٧٠	١٣	١٣	٣٢	٤٣
٩٩	٦٤	١١	٨٥	٧٨	٦٥	٣٣	٣٣	١٧	١٣	٣٧	٤٩	٥٦	٥٥	١٨	٢٦	١٨	١٦	٢٨	٦٤
٦٣	٧٤	٣٧	٣١	٢٦	٤٦	٨٧	٦٣	٧١	٨٦	٨٥	٢٩	٠٠	٣٥	٣٢	٩٥	٠٤	٧٧	٨٤	٦٦
٧٦	٦٢	٨٦	٤٣	٧٨	٦٢	٢٢	١٠	٥٨	٩٢	٢٤	٣٤	٩٥	٥٢	٢١	٣٠	٣٢	١٣	٤٦	٧٢
٣٩	٦١	٢٧	٢٩	١٥	٠٠	٦٥	٠٥	٤٧	١٢	١٨	٦٢	٨١	٠٥	١٣	٥٠	١٠	٢٩	٠٣	٢١
٧٤	٦٣	٨٥	٠١	٥٥	٥٧	٠٨	٦٠	٠١	٠١	٣٦	٦١	١١	٦٥	٠٦	١١	٧٠	٢٦	٣٦	٩٥
٧١	٠٢	١١	٢١	٧٥	٢٦	٠٧	٠٦	٠٣	٣٤	٥٢	٥٤	٤٥	٤٠	١٠	٨٠	٧٣	٢٩	٧١	٤٩
٩٢	٦٠	٥٤	١٩	٧٨	٤٥	٦٣	٩٤	٢٥	٥٠	١٦	٤٧	٦٥	٥٨	٩٧	٦٤	١٧	٥٦	٢٧	٥٨
٧٧	٠٢	٢٤	٣٤	٣٠	٤٥	٦١	٩٧	٩٥	٧٣	١٧	٣٤	٤٢	٢٢	٦٨	٨٨	١٧	٤١	٥١	٨٩
١٩	٩٨	٥٠	٤٦	٧٣	٨٨	٧٠	٤٣	٨٧	٤٦	٣٢	٦٧	٩٣	١٣	٤٨	٦٩	٠٦	٢٥	٤٧	١٥
٨٦	٦٧	٧٣	٤٣	٢١	٠٩	٢١	٣٥	٨٨	٦٠	٠٢	٤٣	٧٤	٢٤	٥١	٢٤	٦١	٠٨	١٢	١٢
٤٣	٥٨	٤٢	٦٥	٦٤	٦٣	٦١	٠٩	٨٢	٥٩	٧٧	٨٢	٤٤	٤٤	٣٢	٧٤	٦٨	٥٤	٠١	٩٤
٥٠	٤٧	٥١	٧٥	٠١	٣٥	١٠	٤٩	٧٠	٢٥	١٥	٤٠	٠٧	٥٧	٨٨	٢٢	٨٢	٨٨	١٠	٧٤
٣٤	٧٣	٧١	٨٧	٧٢	١٤	٠٣	٤٩	٣٠	٢٢	٢١	٩٢	١٥	١٦	٩٥	٧٣	٧٨	٠٨	٨٨	٦٢
٥٠	٧٨	٤٠	٥٥	٠٦	٢١	٩٦	٠٥	٧١	١٧	٦٧	١٨	٠٤	٥٨	٨٠	٠٢	٢١	٨١	٧٤	١١
١٨	٩٦	٦٣	٢١	٥٧	٠٥	٨٩	٢٥	٨٥	٢٥	٤٣	٣٣	٨٠	٤٧	٦٠	٠٠	٥٦	٤٠	٩٤	١٧
٨١	٩٤	١٥	٩٧	٠٩	٨٧	٦٤	٠٥	٧٨	٤٦	٨٠	٢٦	٣٥	٠٤	٩٥	٩٢	٢٧	٧٤	٠٦	٦٦
٤٧	١٦	٩٢	٤٥	٦١	٩٦	٦١	٩٩	٤٨	٥٩	١٨	٠٨	٧٧	٥٤	٤٥	٣٠	١٠	٤٩	٢٤	٥٤
٦٦	٥٣	٦٢	٣٧	٤٦	٥٤	٧٦	٠٠	٦٧	٤٧	٦٠	٧٢	٢٥	٧٣	٣١	٨٩	٧٥	٥٥	٩٤	٣٠
١١	٥٥	٥٠	٨٢	٢٦	٠٣	١٨	٤٧	٣٠	٩٤	٠٧	٠٣	٥٩	٩٩	٨٦	٠٣	٧٤	٠٣	١٧	٦٩
٧٦	١٤	٢٢	١١	٨٧	٧٨	٩٩	٥٥	١٠	٠٨	٧١	٥٧	١٨	٨٤	٣٥	٧٥	٨٩	٥٨	٣٤	٠٨
٠٧	١٢	٥٤	٠٣	٧٣	١٤	٩٧	٠٦	٤٩	٢٩	٧٧	٨٩	١٨	٣٠	٨٥	٨٤	٣٥	٧٤	٧٦	٢٧
٠٥	٣٩	١٤	٤٣	٤٧	٣٣	٦٧	٤٦	٧٢	٤٧	٤٣	٥٢	٦١	٠٦	٥٤	٣٨	٤٣	٥١	٠٢	١٣
٧٤	٨٨	٧٥	٢٧	٤٣	٩٦	٤٨	٢٢	٤٣	٢٤	٣٥	٤٣	٥٢	٥٢	٩٨	٩٢	٦٢	٧٣	٢١	٨٠
٤٣	٠٧	٦٣	٨٥	٥٣	٦٨	٦٣	١٠	٤١	٥٧	٠٥	١١	١٦	٣٩	٩٠	٠٤	٢٠	٥٦	٨٧	١٠
٨٦	٧٨	٠٢	٥٤	٣٠	٧٩	٨٧	٢٨	٤٧	٢٤	٨٧	٩٠	٩١	٦٢	٢٦	٢٦	٧٣	٧٥	١٢	٥٤
٠٣	٢٠	٤٥	٣٧	١٧	٤٢	٣٢	٠٤	٩٩	٤٥	٧٨	٢٦	١٤	٣٠	٣٧	٢٤	٢٨	١٤	٣١	٦٠
٧٣	١٩	٢١	٢٠	٥٩	٠٩	٣٢	٨٧	٦٦	٧٦	٨٦	٨٠	٣٩	٠٠	٩٢	٨٤	١٤	٩٧	٧٣	٤٩
٣٢	٩٨	٢٠	٠١	٨٣	٦٦	٧٠	٤٩	٠١	٣٩	١٤	٤٦	٣٩	٤٥	١٦	٩٤	١٥	٦٥	٦٢	٧٨
١٢	٦٤	٤٩	٥٠	٠٩	٨٧	٤٩	٢٤	٢٣	٨١	٨٢	٠٥	٧٠	٨٣	٩٩	٨٦	٣٩	٢١	٦٩	٦٦
٣١	٧٨	٤٩	٥٢	٩٨	٣٧	٢٥	٧٤	٤٤	٧٦	٠٣	٧٧	٢٩	٣٦	٠٧	٩١	٨٠	١٢	٠٧	٤٤
٥٦	٠٥	٤٠	٢٩	٩٥	٥٠	٩٦	٤٣	٩٢	١٤	٩٤	٧٩	٤١	٥٥	٤٩	٤٩	٥١	٨٨	٤٦	٤١
٩٩	٤٠	٦٣	٩٨	٦٦	٨٢	٥٦	٢٠	٠١	٧٠	١٩	٠١	٨٥	٦٧	٤٩	٥٩	٩٥	٩٣	٥٥	٩٤
٩٠	١٧	٠٥	٦٢	٨٠	١٨	٤٦	٠٦	٨٥	٩٠	٦٠	٨٦	٤٥	١١	٦٤	٦٠	٠٣	٥٧	٦١	٤١
٦٧	٥٦	١٨	٤١	٥٥	٨٣	٩٦	١٨	٧٨	٢٤	٦١	٦٨	٤٨	٧٩	٤١	١٣	٣١	٣٩	٢٧	٥٠
٨٣	٦٧	٣٠	٠٨	٩٥	٦٩	٥٠	٢٠	٩٠	٤٠	٨٩	٨٢	٠٠	٦٧	٩٠	٠٤	٠٥	٦٨	٣٩	٤١
٣٨	٩٥	١٩	٨٢	٢٣	٥٦	٤١	٧٤	٢٠	٩٦	٧٢	٨٠	١١	٠٦	٠٣	٢٩	٧٩	٨٧	٦٣	٠٧
٣٩	٢١	٣٥	٥٣	٠٥	٩٥	٠٦	٥٢	١٧	٥٩	١٤	٩٨	٤١	٩٥	٠٧	٤١	٣٤	٨٨	٥٢	٦٠
٨٣	٣٧	٣٥	٤٣	٧٧	١٩	٩٧	٨٠	١٢	٠٥	٨٣	٢٩	٨٩	٩٥	٠٦	٥٥	٥٦	٦٣	٥٩	٦٨
٣٩	١٨	٥٧	٠٧	٥٣	١٩	٦٣	٩٠	٤٩	١٣	٠٧	٠٥	٩١	٥٩	٩٩	٤٦	٢٧	٠٦	٨٥	١٠
٥١	٩٣	٠٠	٨٠	٤٣	١٤	٠٨	١٨	٤٢	٦٤	٤٧	٣١	٢٦	٦٢	٤٣	٥٢	٨٩	٠٩	٨٢	٣٩
٥٦	٦١	٨٠	٧٦	٢٣	٨٦	٤٤	٥٥	٨٣	٨٨	٠٠	٨٨	٩٧	٥٦	٧٥	٧٨	٦٤	٠٠	٥٨	٥٩
٠٧	٤٢	٩٠	٧١	١٧	٢٢	٧٠	٢٩	٨٢	٩٠	٦٣	٨٧	٣٤	٧٩	٢٣	٤١	٧٣	٨٠	٥٠	٣٨
٠٠	٣٤	٧٦	٠٦	٨٢	٩١	٠٠	٦٨	١٩	٥٦	٢٧	٦١	٨١	٦٨	٩٤	٦٨	٠٦	٢٧	٦٩	٣٠
٧٦	٥٦	٧٦	٣٣	٠٨	٤١	٤٠	٢٢	٦٣	٤٩	٣٧	٧٤	٨٢	٢٨	١٨	٥٩	٥٦	٣٩	٤٤	٦٥
١١	٨٩	٥٤	٩٨	١٧	٠٦	٤٦	٧٤	٤٧	٠٧	٩٤	٢٢	٢٧	١٩	١٣	٦٤	٠٢	٧٥	٢٦	٢٧
٩٣	٥٧	٥٣	٨٢	٢٨	٢٨	٣٧	٩٥	٦٩	٣٦	١٠	٤٢	٢٢	٠٧	١٩	٩١	٦٩	٧٠	٣٠	٩١
٩٠	٢٥	٣٨	٨٤	١٢	٠٨	٨٤	٦٩	١٢	٦٢	٢٢	٣٦	٣١	٤٧	٨٤	٨٨	٤٦	٤٩	٤٣	٦٨
٩٢	٢٦	٤٥	٨٢	٨٣	٥٤	٤٧	٠٠	٧٠	٣٥	٩١	٥٤	٥٢	٧٤	٥٤	٧٧	٥٨	٨١	٩٠	٤٨
٠١	٨٩	١٩	٠١	٦٣	٢٨	٩٥	٣٠	٨٨	١١	٠١	٨٦	٢٧	٦٧	٤٢	٩٧	٥١	٣٤	٩١	٠٦
٥١	٠٨	٥٨	٣٢	٨٨	٢١	٧٨	٢٣	٣٤	٩١	١٢	٣٧	٠٣	٢١	١٤	١٩	٦٠	٥١	٤٥	١٠

جدول (٢) المساحات التي تحت المنحنى الطبيعي القياسي

ص	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
-٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠٦٩٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١
-٠,١	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٥٤٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٤	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
-٠,٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٤	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
-٠,٣	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
-٠,٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
-٠,٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
-٠,٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
-٠,٧	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٧	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
-٠,٨	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٦٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧
-٠,٩	٠,١٨٤١	٠,١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
-١,٠	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
-١,١	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
-١,٢	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٣	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٩٨٨٣
-١,٣	٠,٠٩٦٨٠	٠,٠٩٥١٠	٠,٠٩٣٤٢	٠,٠٩١٧٦	٠,٠٩٠١٢	٠,٠٨٨٥١	٠,٠٨٦٩١	٠,٠٨٥٣٤	٠,٠٨٣٧٩	٠,٠٨٢٢٦
-١,٤	٠,٠٨٠٧٦	٠,٠٧٩٢٧	٠,٠٧٧٨٠	٠,٠٧٦٣٦	٠,٠٧٤٩٣	٠,٠٧٣٥٣	٠,٠٧٢١٥	٠,٠٧٠٧٨	٠,٠٦٩٤٤	٠,٠٦٨١١
-١,٥	٠,٠٦٦٨١	٠,٠٦٥٥٢	٠,٠٦٤٢٦	٠,٠٦٣٠١	٠,٠٦١٧٨	٠,٠٦٠٥٧	٠,٠٥٩٣٨	٠,٠٥٨٢١	٠,٠٥٧٠٥	٠,٠٥٥٩٢
-١,٦	٠,٠٥٤٨٠	٠,٠٥٣٧٠	٠,٠٥٢٦٢	٠,٠٥١٥٥	٠,٠٥٠٥٠	٠,٠٤٩٤٧	٠,٠٤٨٤٦	٠,٠٤٧٤٦	٠,٠٤٦٤٨	٠,٠٤٥٥١
-١,٧	٠,٠٤٤٥٧	٠,٠٤٣٦٣	٠,٠٤٢٧٢	٠,٠٤١٨٢	٠,٠٤٠٩٣	٠,٠٤٠٠٦	٠,٠٣٩٢٠	٠,٠٣٨٣٦	٠,٠٣٧٥٤	٠,٠٣٦٧٣
-١,٨	٠,٠٣٥٩٣	٠,٠٣٥١٥	٠,٠٣٤٣٨	٠,٠٣٣٦٢	٠,٠٣٢٨٨	٠,٠٣٢١٦	٠,٠٣١٤٤	٠,٠٣٠٧٤	٠,٠٣٠٠٥	٠,٠٢٩٣٨
-١,٩	٠,٠٢٨٧٢	٠,٠٢٨٠٧	٠,٠٢٧٤٣	٠,٠٢٦٨٠	٠,٠٢٦١٩	٠,٠٢٥٥٩	٠,٠٢٥٠٠	٠,٠٢٤٤٢	٠,٠٢٣٨٥	٠,٠٢٣٣٠
-٢,٠	٠,٠٢٢٧٥	٠,٠٢٢٢٢	٠,٠٢١٦٩	٠,٠٢١١٨	٠,٠٢٠٦٨	٠,٠٢٠١٨	٠,٠١٩٧٠	٠,٠١٩٢٣	٠,٠١٨٧٦	٠,٠١٨٣١
-٢,١	٠,٠١٧٨٦	٠,٠١٧٤٣	٠,٠١٧٠٠	٠,٠١٦٥٩	٠,٠١٦١٦	٠,٠١٥٧٨	٠,٠١٥٣٩	٠,٠١٥٠٠	٠,٠١٤٦٤	٠,٠١٤٢٦
-٢,٢	٠,٠١٣٩٠	٠,٠١٣٥٥	٠,٠١٣٢١	٠,٠١٢٨٧	٠,٠١٢٥٥	٠,٠١٢٢٢	٠,٠١١٩١	٠,٠١١٦٠	٠,٠١١٣٠	٠,٠١١٠١
-٢,٣	٠,٠١٠٧٢	٠,٠١٠٤٤	٠,٠١٠١٧	٠,٠٠٩٩٠٣	٠,٠٠٩٦٤٢	٠,٠٠٩٣٨٧	٠,٠٠٩١٣٧	٠,٠٠٨٨٩٤	٠,٠٠٨٦٥٦	٠,٠٠٨٤٢٤
-٢,٤	٠,٠٠٨١٩٨	٠,٠٠٧٩٧٦	٠,٠٠٧٧٦٠	٠,٠٠٧٥٤٩	٠,٠٠٧٣٤٤	٠,٠٠٧١٤٣	٠,٠٠٦٩٤٧	٠,٠٠٦٧٥٦	٠,٠٠٦٥٦٩	٠,٠٠٦٣٨٧
-٢,٥	٠,٠٠٦٢١٠	٠,٠٠٦٠٣٧	٠,٠٠٥٨٦٨	٠,٠٠٥٧٠٣	٠,٠٠٥٥٤٣	٠,٠٠٥٣٨٦	٠,٠٠٥٢٣٤	٠,٠٠٥٠٨٥	٠,٠٠٤٩٤٠	٠,٠٠٤٧٩٩
-٢,٦	٠,٠٠٤٦٦١	٠,٠٠٤٥٢٧	٠,٠٠٤٣٩٦	٠,٠٠٤٢٦٩	٠,٠٠٤١٤٥	٠,٠٠٤٠٢٥	٠,٠٠٣٩٠٧	٠,٠٠٣٧٩٣	٠,٠٠٣٦٨١	٠,٠٠٣٥٧٣
-٢,٧	٠,٠٠٣٤٦٧	٠,٠٠٣٣٦٤	٠,٠٠٣٢٦٤	٠,٠٠٣١٦٧	٠,٠٠٣٠٧٢	٠,٠٠٢٩٨٠	٠,٠٠٢٨٩٠	٠,٠٠٢٨٠٣	٠,٠٠٢٧١٨	٠,٠٠٢٦٣٥
-٢,٨	٠,٠٠٢٥٥٥	٠,٠٠٢٤٧٧	٠,٠٠٢٤٠١	٠,٠٠٢٣٢٧	٠,٠٠٢٢٥٦	٠,٠٠٢١٨٦	٠,٠٠٢١١٨	٠,٠٠٠٢٥٢	٠,٠٠١٩٨٨	٠,٠٠١٩٢٦
-٢,٩	٠,٠٠١٨٦٦	٠,٠٠١٨٠٧	٠,٠٠١٧٥٠	٠,٠٠١٦٩٥	٠,٠٠١٦٤١	٠,٠٠١٥٨٩	٠,٠٠١٥٣٨	٠,٠٠١٤٨٩	٠,٠٠١٤٤١	٠,٠٠١٣٩٥
-٣,٠	٠,٠٠١٣٥٠	٠,٠٠١٣٠٦	٠,٠٠١٢٦٤	٠,٠٠١٢٢٣	٠,٠٠١١٨٣	٠,٠٠١١١٤	٠,٠٠١١٠٧	٠,٠٠١٠٧٠	٠,٠٠١٠٣٥	٠,٠٠١٠٠١
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٣	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٦١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٤٧
١,٣	٠,٩٠٣٢٠	٠,٩٠٤٩٠	٠,٩٠٦٥٨	٠,٩٠٨٢٤	٠,٩٠٩٨٨	٠,٩١١٤٩	٠,٩١٣٠٩	٠,٩١٤٦٦	٠,٩١٦٢١	٠,٩١٧٧٤
١,٤	٠,٩١٩٢٤	٠,٩٢٠٧٣	٠,٩٢٢٢٠	٠,٩٢٣٦٤	٠,٩٢٥٠٧	٠,٩٢٦٤٧	٠,٩٢٦٨٥	٠,٩٢٩٢٢	٠,٩٣٠٥٦	٠,٩٣١٨٩
١,٥	٠,٩٣٣١٩	٠,٩٣٤٤٨	٠,٩٣٥٧٤	٠,٩٣٦٦٩	٠,٩٣٨٢٢	٠,٩٣٩٤٣	٠,٩٤٠٦٢	٠,٩٤١٧٩	٠,٩٤٢٩٥	٠,٩٤٤٠٨
١,٦	٠,٩٤٥٢٠	٠,٩٤٦٣٠	٠,٩٤٧٣٨	٠,٩٤٨٤٥	٠,٩٤٩٥٠	٠,٩٥٠٥٣	٠,٩٥١٥٤	٠,٩٥٢٥٤	٠,٩٥٣٥٢	٠,٩٥٤٤٩
١,٧	٠,٩٥٥٤٣	٠,٩٥٦٣٧	٠,٩٥٧٢٨	٠,٩٥٨١٨	٠,٩٥٩٠٧	٠,٩٥٩٩٤	٠,٩٦٠٨٠	٠,٩٦١٦٤	٠,٩٦٢٤٦	٠,٩٦٣٢٧
١,٨	٠,٩٦٤٠٧	٠,٩٦٤٨٥	٠,٩٦٥٦٢	٠,٩٦٦٣٨	٠,٩٦٧١٢	٠,٩٦٧٨٤	٠,٩٦٨٥٦	٠,٩٦٩٢٦	٠,٩٦٩٩٥	٠,٩٧٠٦٢
١,٩	٠,٩٧١٢٨	٠,٩٧١٩٣	٠,٩٧٢٥٧	٠,٩٧٣٢٠	٠,٩٧٣٣١	٠,٩٧٤٤١	٠,٩٧٥٠٠	٠,٩٧٥٥٨	٠,٩٧٦١٥	٠,٩٧٦٧٠
٢,٠	٠,٩٧٧٢٥	٠,٩٧٧٧٨	٠,٩٧٨٣١	٠,٩٧٨٨٢	٠,٩٧٩٣٢	٠,٩٧٩٨٢	٠,٩٨٠٣٠	٠,٩٨٠٧٧	٠,٩٨١٢٤	٠,٩٨١٦٩
٢,١	٠,٩٨٢١٤	٠,٩٨٢٥٧	٠,٩٨٣٠٠	٠,٩٨٣٤١	٠,٩٨٣٦٢	٠,٩٨٤٢٢	٠,٩٨٤٦١	٠,٩٨٥٠٠	٠,٩٨٥٣٧	٠,٩٨٥٧٤
٢,٢	٠,٩٨٦١٠	٠,٩٨٦٤٥	٠,٩٨٦٧٩	٠,٩٨٧١٣	٠,٩٨٧٤٥	٠,٩٨٧٧٨	٠,٩٨٨٠٩	٠,٩٨٨٤٠	٠,٩٨٨٧٠	٠,٩٨٨٩٩
٢,٣	٠,٩٨٩٢٨	٠,٩٨٩٥٦	٠,٩٨٩٨٣	٠,٩٩٠٠٩٧	٠,٩٩٠٣٥٨	٠,٩٩٠٦١٣	٠,٩٩٠٨٦٣	٠,٩٩١١٠٦	٠,٩٩١٣٤٤	٠,٩٩١٥٧٦
٢,٤	٠,٩٩١٨٠٢	٠,٩٩٢٠٢٤	٠,٩٩٢٢٤٠	٠,٩٩٢٤٥١	٠,٩٩٢٦٥٦	٠,٩٩٢٨٥٧	٠,٩٩٣٠٥٣	٠,٩٩٣٢٤٤	٠,٩٩٣٤٣١	٠,٩٩٣٦١٣
٢,٥	٠,٩٩٣٧٩٠	٠,٩٩٣٩٦٣	٠,٩٩٤١٣٢	٠,٩٩٤٢٩٧	٠,٩٩٤٤٥٧	٠,٩٩٤٦١٤	٠,٩٩٤٧٦٦	٠,٩٩٤٩١٥	٠,٩٩٥٠٦٠	٠,٩٩٥٢٠١
٢,٦	٠,٩٩٥٣٣٩	٠,٩٩٥٤٧٣	٠,٩٩٥٦٠٤	٠,٩٩٥٧٣١	٠,٩٩٥٨٥٥	٠,٩٩٥٩٧٥	٠,٩٩٦٠٩٣	٠,٩٩٦٢٠٧	٠,٩٩٦٣١٩	٠,٩٩٦٤٢٧
٢,٧	٠,٩٩٦٥٣٣	٠,٩٩٦٦٣٦	٠,٩٩٦٧٣٦	٠,٩٩٦٨٣٣	٠,٩٩٦٩٢٨	٠,٩٩٧٠٢٠	٠,٩٩٧١١٠	٠,٩٩٧١٩٧	٠,٩٩٧٢٨٢	٠,٩٩٧٣٦٥
٢,٨	٠,٩٩٧٤٤٥	٠,٩٩٧٥٢٣	٠,٩٩٧٥٩٩	٠,٩٩٧٦٧٣	٠,٩٩٧٧٤٤	٠,٩٩٧٨١٤	٠,٩٩٧٨٨٢	٠,٩٩٧٩٤٨	٠,٩٩٨٠١٢	٠,٩٩٨٠٧٤
٢,٩	٠,٩٩٨١٣٤	٠,٩٩٨١٩٣	٠,٩٩٨٢٥٠	٠,٩٩٨٣٠٥	٠,٩٩٨٣٥٩	٠,٩٩٨٤١١	٠,٩٩٨٤٦٢	٠,٩٩٨٥١١	٠,٩٩٨٥٥٩	٠,٩٩٨٦٠٥
٣,٠	٠,٩٩٨٦٥٠	٠,٩٩٨٦٩٤	٠,٩٩٨٧٣٦	٠,٩٩٨٧٧٧	٠,٩٩٨٨١٧	٠,٩٩٨٨٥٦	٠,٩٩٨٨٩٣	٠,٩٩٨٩٣٠	٠,٩٩٨٩٦٥	٠,٩٩٨٩٩٩

جدول (٣) القيم الحرجة لـ تي

درجات الحرية	مستوى المعنوية لطرف واحد					
	٠,١٠	٠,٠٥	٠,٠٢٥	٠,٠١	٠,٠٠٥	٠,٠٠٠٥
	مستوى المعنوية لطرفين					
	٠,٢٠	٠,١٠	٠,٠٥	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠١
١	٣,٠٧٨	٦,٣١٤	١٢,٧٠٦	٣١,٨٢١	٦٣,٦٥٧	٦٣٦,٦١٩
٢	١,٨٨٦	٢,٩٢٠	٤,٣٠٣	٦,٩٦٥	٩,٩٢٥	٣١,٥٩٨
٣	١,٦٣٨	٢,٣٥٣	٣,١٨٢	٤,٥٤١	٥,٨٤١	١٢,٩٤١
٤	١,٥٣٣	٢,١٣٢	٢,٧٧٦	٣,٧٤٧	٤,٦٠٤	٨,٦١٠
٥	١,٤٧٦	٢,٠١٥	٢,٥٧١	٣,٣٦٥	٤,٠٣٢	٦,٨٥٩
٦	١,٤٤٠	١,٩٤٣	٢,٤٤٧	٣,١٤٣	٣,٧٠٧	٥,٩٥٩
٧	١,٤١٥	١,٨٩٥	٢,٣٦٥	٢,٩٩٨	٣,٤٩٩	٥,٤٠٥
٨	١,٣٩٧	١,٨٦٠	٢,٣٠٦	٢,٨٩٦	٣,٣٥٥	٥,٠٤١
٩	١,٣٨٣	١,٨٣٣	٢,٢٦٢	٢,٨٢١	٣,٢٥٠	٤,٧٨١
١٠	١,٣٧٢	١,٨١٢	٢,٢٢٨	٢,٧٦٤	٣,١٦٩	٤,٥٨٧
١١	١,٣٦٣	١,٦٩٦	٢,٢٠١	٢,٧١٨	٣,١٠٦	٤,٤٣٧
١٢	١,٣٥٦	١,٧٨٢	٢,١٧٩	٢,٦٨١	٣,٠٥٥	٤,٣١٨
١٣	١,٤٥٠	١,٧٧١	٢,١٦٠	٢,٦٥٠	٣,٠١٢	٤,٢٢١
١٤	١,٣٤٥	١,٧٦١	٢,١٤٥	٢,٦٢٤	٢,٩٧٧	٤,١٤٠
١٥	١,٣٤١	١,٧٥٣	٢,١٣١	٢,٦٠٢	٢,٩٤٧	٤,٠٧٣
١٦	١,٣٣٧	١,٧٤٦	٢,١٢٠	٢,٥٨٣	٢,٩٢١	٤,٠١٥
١٧	١,٣٣٣	١,٧٤٠	٢,١١٠	٢,٥٦٧	٢,٨٩٨	٣,٩٦٥
١٨	١,٣٣٠	١,٧٣٤	٢,١٠١	٢,٥٥٢	٢,٨٧٨	٣,٩٢٢
١٩	١,٣٢٨	١,٧٢٩	٢,٠٩٣	٢,٥٣٩	٢,٨٦١	٣,٨٨٣
٢٠	١,٣٥٥	١,٧٢٥	٢,٠٨٦	٢,٥٢٨	٢,٨٤٥	٣,٨٥٠
٢١	١,٣٢٣	١,٧٢١	٢,٠٨٠	٢,٥١٨	٢,٨٣١	٣,٨١٩
٢٢	١,٣٢١	١,٧١٧	٢,٠٧٤	٢,٥٠٨	٢,٨١٩	٣,٧٩٢
٢٣	١,٣١٩	١,٧١٤	٢,٠٦٩	٢,٥٠٠	٢,٨٠٧	٣,٧٦٧
٢٤	١,٣١٨	١,٧١١	٢,٠٦٤	٢,٤٩٢	٢,٧٩٧	٣,٧٤٥
٢٥	١,٣١٦	١,٧٠٨	٢,٠٦٠	٢,٤٨٥	٢,٧٨٧	٣,٧٢٥
٢٦	١,٣١٥	١,٧٠٦	٢,٠٥٦	٢,٤٧٩	٢,٧٧٩	٣,٧٠٧
٢٧	١,٣١٤	١,٧٠٤	٢,٠٥٢	٢,٤٧٣	٢,٧٧١	٣,٦٩٠
٢٨	١,٣١٣	١,٧٠١	٢,٠٤٨	٢,٤٦٧	٢,٧٦٣	٣,٦٧٤
٢٩	١,٣١١	١,٦٩٩	٢,٠٤٥	٢,٤٦٢	٢,٧٥٦	٣,٦٥٩
٣٠	١,٣١٠	١,٦٩٧	٢,٠٤٢	٢,٤٥٧	٢,٧٥٠	٣,٦١٦
٤٠	١,٣٠٣	١,٦٨٤	٢,٠٢١	٢,٤٢٣	٢,٧٠٤	٣,٥٥١
٦٠	١,٢٩٦	١,٦٧١	٢,٠٠٠	٢,٣٩٠	٢,٦٦٠	٣,٤٦٠
١٢٠	١,٢٨٩	١,٦٥٨	٢,٩٨٠	٢,٣٥٨	٢,٦١٧	٣,٣٧٣
–	١,٢٨٢	١,٦٤٥	١,٩٦٠	٢,٣٢٦	٢,٥٧٦	٣,٢٩١

جدول (٤) مربع كاي

أ / دج	٠,٢٥	٠,١٠	٠,٠٥	٠,٠٢٥	٠,٠١	٠,٠٠٠٥
١	١,٣٢٣	٢,٧٠٦	٣,٨٤١	٥,٠٢٤	٦,٦٣٥	٧,٨٧٩
٢	٢,٧٧٣	٤,٦٠٥	٥,٩٩١	٧,٣٧٨	٩,٢١٠	١٠,٥٩٧
٣	٤,١٠٨	٦,٢٥١	٧,٨١٥	٩,٣٤٨	١١,٣٤٥	١٢,٨٣٨
٤	٥,٣٨٥	٧,٧٧٩	٩,٤٨٨	١١,١٤٣	١٣,٢٧٧	١٤,٨٦٠
٥	٦,٦٢٦	٩,٢٣٦	١١,٠٧١	١٢,٨٣٣	١٥,٠٨٦	١٦,٧٥٠
٦	٧,٨٤١	١٠,٦٤٥	١٢,٥٩٢	١٤,٤٤٩	١٦,٨١٢	١٨,٥٤٨
٧	٩,٠٣٧	١٢,٠١٧	١٤,٠٦٧	١٦,٠١٣	١٨,٤٧٥	٢٠,٢٧٨
٨	١٠,٢١٩	١٣,٣٦٢	١٥,٥٠٧	١٧,٥٣٥	٢٠,٠٩٠	٢١,٩٥٥
٩	١١,٣٨٩	١٤,٦٨٤	١٦,٩١٩	١٩,٠٢٣	٢١,٦٦٦	٢٣,٥٨٩
١٠	١٢,٥٤٩	١٥,٩٨٧	١٨,٣٠٧	٢٠,٤٨٣	٢٣,٢٠٩	٢٥,١٨٨
١١	١٣,٧٠١	١٧,٢٧٥	١٩,٦٧٥	٢١,٩٢٠	٢٤,٧٢٥	٢٦,٧٥٧
١٢	١٤,٨٤٥	١٨,٥٤٩	٢١,٠٢٦	٢٣,٣٣٧	٢٦,٢١٧	٢٨,٢٩٩
١٣	١٥,٩٨٤	١٩,٨١٢	٢٢,٣٦٢	٢٤,٧٣٦	٢٧,٦٨٨	٢٩,٨١٩
١٤	١٧,١١٧	٢١,٠٦٤	٢٣,٦٨٥	٢٦,١١٩	٢٩,١٤١	٣١,٣١٩
١٥	١٨,٢٤٥	٢٢,٣٠٧	٢٤,٩٩٦	٢٧,٤٨٨	٣٠,٥٧٨	٣٢,٨٠١

جدول (٥). قيم ف (٠,٩٥، د١ ، د٢)

د٢ = درجات الحرية للمقام	د١ = درجات الحرية للبسط																		
	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١٢	١٥	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٦٠	١٢٠	∞
١	١٦١	٢٠٠	٢١٦	٢٢٥	٢٣٠	٢٣٤	٢٣٧	٢٣٩	٢٤١	٢٤٢	٢٤٤	٢٤٦	٢٤٨	٢٤٩	٢٥٠	٢٥١	٢٥٢	٢٥٣	٢٥٤
٢	١٨,٥	١٩,٠	١٩,٢	١٩,٢	١٩,٣	١٩,٣	١٩,٤	١٩,٤	١٩,٤	١٩,٤	١٩,٤	١٩,٤	١٩,٤	١٩,٥	١٩,٥	١٩,٥	١٩,٥	١٩,٥	١٩,٥
٣	١٠,١	٩,٥٥	٩,٢٨	٩,١٢	٩,٠١	٨,٩٤	٨,٨٩	٨,٨٥	٨,٨١	٨,٧٩	٨,٧٤	٨,٧٠	٨,٦٦	٨,٦٤	٨,٦٢	٨,٥٩	٨,٥٧	٨,٥٥	٨,٥٣
٤	٧,٧١	٦,٩٤	٦,٥٩	٦,٣٩	٦,٢٦	٦,١٦	٦,٠٩	٦,٠٤	٦,٠٠	٥,٩٦	٥,٩١	٥,٨٦	٥,٨٠	٥,٧٧	٥,٧٥	٥,٧٢	٥,٦٩	٥,٦٦	٥,٦٣
٥	٦,٦١	٥,٧٩	٥,٤١	٥,١٩	٥,٠٥	٤,٩٥	٤,٨٨	٤,٨٢	٤,٧٧	٤,٧٤	٤,٦٨	٤,٦٢	٤,٥٦	٤,٥٣	٤,٥٠	٤,٤٦	٤,٤٣	٤,٤٠	٤,٣٧
٦	٥,٩٩	٥,١٤	٤,٧٦	٤,٥٣	٤,٣٩	٤,٢٨	٤,٢١	٤,١٥	٤,١٠	٤,٠٦	٤,٠٠	٣,٩٤	٣,٨٧	٣,٨٤	٣,٨١	٣,٧٧	٣,٧٤	٣,٧٠	٣,٦٧
٧	٥,٥٩	٤,٧٤	٤,٣٥	٤,١٢	٣,٩٧	٣,٨٧	٣,٧٩	٣,٧٣	٣,٦٨	٣,٦٤	٣,٥٧	٣,٥١	٣,٤٤	٣,٤١	٣,٣٨	٣,٣٤	٣,٣٠	٣,٢٧	٣,٢٣
٨	٥,٣٢	٤,٤٦	٤,٠٧	٣,٨٤	٣,٦٩	٣,٥٨	٣,٥٠	٣,٤٤	٣,٣٩	٣,٣٥	٣,٢٨	٣,٢٢	٣,١٥	٣,١٢	٣,٠٨	٣,٠٤	٣,٠١	٢,٩٧	٢,٩٣
٩	٥,١٢	٤,٢٦	٣,٨٦	٣,٦٣	٣,٤٨	,٣٧	٣,٢٩	٣,٢٣	٣,١٨	٣,١٤	٣,٠٧	٣,٠١	٢,٩٤	٢,٩٠	٢,٨٦	٢,٨٣	٢,٧٩	٢,٧٥	٢,٧١
١٠	٤,٩٦	٤,١٠	٣,٧١	٣,٤٨	٣,٣٣	٣,٢٢	٣,١٤	٣,٠٧	٣,٠٢	٢,٩٨	٢,٩١	٢,٨٥	٢,٧٧	٢,٧٤	٢,٧٠	٢,٦٦	٢,٦٢	٢,٥٨	٢,٥٤
١١	٤,٨٤	٣,٩٨	٣,٥٩	٣,٣٦	٣,٢٠	٣,٠٩	٣,٠١	٢,٩٥	٢,٩٠	٢,٨٥	٢,٧٩	٢,٧٢	٢,٦٥	٢,٦١	٢,٥٧	٢,٥٣	٢,٤٩	٢,٤٥	٢,٤٠
١٢	٤,٧٥	٣,٨٩	٣,٤٩	٣,٢٦	٣,١١	٣,٠٠	٢,٩١	٢,٨٥	٢,٨٠	٢,٧٥	٢,٦٩	٢,٦٢	٢,٥٤	٢,٥١	٢,٤٧	٢,٤٣	٢,٣٨	٢,٣٤	٢,٣٠
١٣	٤,٦٧	٣,٨١	٣,٤١	٣,١٨	٣,٠٣	٢,٩٢	٢,٨٣	٢,٧٧	٢,٧١	٢,٦٧	٢,٦٠	٢,٥٣	٢,٤٦	٢,٤٢	٢,٣٨	٢,٣٤	٢,٣٠	٢,٢٥	٢,٢١
١٤	٤,٦٠	٣,٧٤	٣,٣٤	٣,١١	٢,٩٦	٢,٨٥	٢,٧٦	٢,٧٠	٢,٦٥	٢,٦٠	٢,٥٣	٢,٤٦	٢,٣٩	٢,٣٥	٢,٣١	٢,٢٧	٢,٢٢	٢,١٨	٢,١٣
١٥	٤,٥٤	٣,٦٨	٣,٢٩	٣,٠٦	٢,٩٠	٢,٧٩	٢,٧١	٢,٦٤	٢,٥٩	٢,٥٤	٢,٤٨	٢,٤٠	٢,٣٣	٢,٢٩	٢,٢٥	٢,٢٠	٢,١٦	٢,١١	٢,٠٧
١٦	٤,٤٩	٣,٦٣	٣,٢٤	٣,٠١	٢,٨٥	٢,٧٤	٢,٦٦	٢,٥٩	٢,٥٤	٢,٤٩	٢,٤٢	٢,٣٥	٢,٢٨	٢,٢٤	٢,١٩	٢,١٥	٢,١١	٢,٠٦	٢,٠١
١٧	٤,٤٥	٣,٥٩	٣,٢٠	٢,٩٦	٢,٨١	٢,٧٠	٢,٦١	٢,٥٥	٢,٤٩	٢,٤٥	٢,٣٨	٢,٣١	٢,٢٣	٢,١٩	٢,١٥	٢,١٠	٢,٠٦	٢,٠١	١,٩٧
١٨	٤,٤١	٣,٥٥	٣,١٦	٢,٩٣	٢,٧٧	٢,٦٦	٢,٥٨	٢,٥١	٢,٤٦	٢,٤١	٢,٣٤	٢,٢٧	٢,١٩	٢,١٥	٢,١١	٢,٠٦	٢,٠٢	١,٩٧	١,٩٢
١٩	٤,٣٨	٣,٥٢	٣,١٣	٢,٩٠	٢,٧٤	٢,٦٣	٢,٥٤	٢,٤٨	٢,٤٢	٢,٣٨	٢,٣١	٢,٢٣	٢,١٦	٢,١١	٢,٠٧	٢,٠٣	١,٩٨	١,٩٣	١,٨٨
٢٠	٤,٣٥	٣,٤٩	٣,١٠	٢,٨٧	٢,٧١	٢,٦٠	٢,٥١	٢,٤٥	٢,٣٩	٢,٣٥	٢,٢٨	٢,٢٠	٢,١٢	٢,٠٨	٢,٠٤	١,٩٩	١,٩٥	١,٩٠	١,٨٤
٢١	٤,٣٢	٣,٤٧	٣,٠٧	٢,٨٤	٢,٦٨	٢,٥٧	٢,٤٩	٢,٤٢	٢,٣٧	٢,٣٢	٢,٢٥	٢,١٨	٢,١٠	٢,٠٥	٢,٠١	١,٩٦	١,٩٢	١,٨٧	١,٨١
٢٢	٤,٣٠	٣,٤٤	٣,٠٥	٢,٨٢	٢,٦٦	٢,٥٥	٢,٤٦	٢,٤٠	٢,٣٤	٢,٣٠	٢,٢٣	٢,١٥	٢,٠٧	٢,٠٣	١,٩٨	١,٩٤	١,٨٩	١,٨٤	١,٧٨
٢٣	٤,٢٨	٣,٤٢	٣,٠٣	٢,٨٠	٢,٦٤	٢,٥٣	٢,٤٤	٢,٣٧	٢,٣٢	٢,٢٧	٢,٢٠	٢,١٣	٢,٠٥	٢,٠١	١,٩٦	١,٩١	١,٨٦	١,٨١	١,٧٦
٢٤	٤,٢٦	٣,٤٠	٣,٠١	٢,٧٨	٢,٦٢	٢,٥١	٢,٤٢	٢,٣٦	٢,٣٠	٢,٢٥	٢,١٨	٢,١١	٢,٠٣	١,٩٨	١,٩٤	١,٨٩	١,٨٤	١,٧٩	١,٧٣
٢٥	٤,٢٤	٣,٣٩	٢,٩٩	٢,٧٦	٢,٦٠	٢,٤٩	٢,٤٠	٢,٣٤	٢,٢٨	٢,٢٤	٢,١٦	٢,٠٩	٢,٠١	١,٩٦	١,٩٢	١,٨٧	١,٨٢	١,٧٧	١,٧١
٣٠	٤,١٧	٣,٣٢	٢,٩٢	٢,٦٩	٢,٥٣	٢,٤٢	٢,٣٣	٢,٢٧	٢,٢١	٢,١٦	٢,٠٩	٢,٠١	١,٩٣	١,٨٩	١,٨٤	١,٧٩	١,٧٤	١,٦٨	١,٦٢
٤٠	٤,٠٨	٣,٢٣	٢,٨٤	٢,٦١	٢,٤٥	٢,٣٤	٢,٢٥	٢,١٨	٢,١٢	٢,٠٨	٢,٠٠	١,٩٢	١,٨٤	١,٧٩	١,٧٤	١,٦٩	١,٦٤	١,٥٨	١,٥١
٦٠	٤,٠٠	٣,١٥	٢,٧٦	٢,٥٣	٢,٣٧	٢,٢٥	٢,١٧	٢,١٠	٢,٠٤	١,٩٩	١,٩٢	١,٨٤	١,٧٥	١,٧٠	١,٦٥	١,٥٩	١,٥٣	١,٤٧	١,٣٩
١٢٠	٣,٩٢	٣,٠٧	٢,٦٨	٢,٤٥	٢,٢٩	٢,١٨	٢,٠٩	٢,٠٢	١,٩٦	١,٩١	١,٨٣	١,٧٥	١,٦٦	١,٦١	١,٥٥	١,٥٠	١,٤٣	١,٣٥	١,٢٥
∞	٣,٨٤	٣,٠٠	٢,٦٠	٢,٣٧	٢,٢١	٢,١٠	١,٠١	١,٩٤	١,٨٨	١,٨٣	١,٧٥	١,٦٧	١,٥٧	١,٥٢	١,٤٦	١,٣٩	١,٣٢	١,٢٢	١,٠٠

تابع جدول (٥). قيم ف (٠,٩٩، د$_1$ ، د$_2$)

د$_2$ = درجات الحرية للمقام	د$_1$ = درجات الحرية للبسط											
	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	١٢	٢٤	∞
١	٤٠٥٢	٩٩٩٤	٥٤٠٣	٥٦٢٥	٥٧٦٤	٥٨٥٩	٥٩٢٨	٥٩٨١	٦٠٥٦	٦١٠٦	٦٢٣٥	٦٣٦٦
٢	٩٨,٥٠	٩٩,٠٠	٩٩,١٧	٩٩,٢٥	٩٩,٣٠	٩٩,٣٣	٩٩,٣٦	٩٩,٣٧	٩٩,٤٠	٩٩,٤٢	٩٩,٤٦	٩٩,٥٠
٣	٣٤,١٢	٣٠,٨٢	٢٩,٤٦	٢٨,٧١	٢٨,٢٤	٢٧,٩١	٢٧,٦٧	٢٧,٤٩	٢٧,٢٣	٢٧,٠٥	٢٦,٦٠	٢٦,١٣
٤	٢١,٢٠	١٨,٠٠	١٦,٦٩	١٥,٩٨	١٥,٥٢	١٥,٢١	١٤,٩٨	١٤,٨٠	١٤,٥٥	١٤,٣٧	١٣,٩٣	١٣,٤٦
٥	١٦,٢٦	١٣,٢٧	١٢,٠٦	١١,٣٩	١٠,٩٧	١٠,٦٧	١٠,٤٦	١٠,٢٩	١٠,٠٥	٩,٨٨٨	٩,٤٦٦	٩,٠٢٠
٦	١٣,٧٥	١٠,٩٢	٩,٧٨٠	٩,١٤٨	٨,٧٤٦	٨,٤٦٦	٨,٢٦٠	٨,١٠٢	٧,٨٧٤	٧,٧١٨	٧,٣١٣	٦,٨٨٠
٧	١٢,٢٥	٩,٥٤٧	٨,٤٥١	٧,٨٤٧	٧,٤٦٠	٧,١٩١	٦,٩٩٣	٦,٨٤٠	٦,٦٢٠	٦,٤٦٩	٦,٠٧٤	٥,٦٥٠
٨	١١,٢٦	٨,٦٤٩	٧,٥٩١	٧,٠٠٦	٦,٦٣٢	٦,٣٧١	٦,١٧٨	٦,٠٢٩	٥,٨١٤	٥,٦٦٧	٥,٢٧٩	٤,٨٥٩
٩	١٠,٥٦	٨,٠٢٢	٦,٩٩٢	٦,٤٢٢	٦,٠٥٧	٥,٨٠٢	٥,٦١٣	٥,٤٦٧	٥,٢٥٧	٥,١١١	٤,٧٢٩	٤,٣١١
١٠	١٠,٠٤	٧,٥٥٩	٦,٥٥٢	٥,٩٩٤	٥,٦٣٦	٥,٣٨٦	٥,٢٠٠	٥,٠٥٧	٤,٨٤٩	٤,٧٠٦	٤,٣٢٧	٣,٩٠٩
١١	٩,٦٤٦	٧,٢٠٦	٦,٢١٧	٥,٦٦٨	٥,٣١٦	٥,٠٦٩	٤,٨٨٦	٤,٧٤٤	٤,٥٣٩	٤,٣٩٧	٤,٠٢١	٣,٦٠٢
١٢	٩,٣٣٠	٦,٩٢٧	٥,٩٥٣	٥,٤١٢	٥,٠٦٤	٤,٨٢١	٤,٦٤٠	٤,٤٩٩	٤,٢٩٦	٤,١٥٥	٣,٧٨٠	٣,٣٦١
١٣	٩,٠٧٤	٦,٧٠١	٥,٧٣٩	٥,٢٠٥	٤,٨٦٢	٤,٦٢٠	٤,٤٤١	٤,٣٠٢	٤,١٠٠	٣,٩٦٠	٣,٥٨٧	٣,١٦٥
١٤	٨,٨٦٢	٦,٥١٥	٥,٥٦٤	٥,٠٣٥	٤,٦٩٥	٤,٤٥٦	٤,٢٧٨	٤,١٤٠	٣,٩٣٩	٣,٨٠٠	٣,٤٢٧	٣,٠٠٤
١٥	٨,٦٨٣	٦,٣٥٩	٥,٤١٧	٤,٨٩٣	٤,٥٥٦	٤,٣١٨	٤,١٤٢	٤,٠٠٤	٣,٨٠٥	٣,٦٦٦	٣,٢٩٤	٢,٨٦٨
١٦	٨,٥٣١	٦,٢٢٦	٥,٢٩٢	٤,٧٧٣	٤,٤٣٧	٤,٢٠٢	٤,٠٢٦	٣,٨٩٠	٣,٦٩١	٣,٥٥٣	٣,١٨١	٢,٧٥٣
١٧	٨,٤٠٠	٦,١١٢	٥,١٨٥	٤,٦٦٩	٤,٣٣٦	٤,١٠٢	٣,٩٢٧	٣,٧٩١	٣,٥٩٣	٣,٤٥٥	٣,٠٨٤	٢,٦٥٣
١٨	٨,٢٨٥	٦,٠١٣	٥,٠٩٢	٤,٥٧٩	٤,٢٤٨	٤,٠١٥	٣,٨٤١	٣,٧٠٥	٣,٥٠٨	٣,٣٧١	٢,٩٩٩	٢,٥٦٦
١٩	٨,١٨٥	٥,٩٢٦	٥,٠١٠	٤,٥٠٠	٤,١٧١	٥,٩٣٩	٥,٧٦٥	٣,٦٣١	٣,٤٣٤	٣,٢٩٧	٢,٩٢٥	٢,٤٨٩

تابع جدول (٥). قيم ف (٠,٩٩، $د_1$ ، $د_2$)

$د_2$ = درجات الحرية للمقام	$د_1$ = درجات الحرية للبسط											
	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	١٢	٢٤	∞
٢٠	٨,٠٩٦	٥,٨٤٩	٤,٩٣٨	٤,٤٣١	٤,١٠٣	٣,٨٧١	٣,٦٩٩	٣,٥٦٤	٣,٣٦٨	٣,٢٣١	٢,٨٥٩	٢,٤٢١
٢١	٨,٠١٧	٥,٧٨٠	٤,٨٧٤	٤,٣٦٩	٤,٠٤٢	٣,٨١٢	٣,٦٤٠	٣,٥٠٦	٣,٣١٠	٣,١٧٣	٢,٨٠١	٢,٣٦٠
٢٢	٧,٩٤٥	٥,٧١٩	٤,٨١٧	٤,٣١٣	٣,٩٨٨	٣,٧٥٨	٣,٥٨٧	٣,٤٥٣	٣,٢٥٨	٣,١٢١	٢,٧٤٩	٢,٣٠٥
٢٣	٧,٨٨١	٥,٦٦٤	٤,٧٦٥	٤,٢٦٤	٣,٩٣٩	٣,٧١٠	٣,٥٣٩	٣,٤٠٦	٣,٢١١	٣,٠٧٤	٢,٧٠٢	٢,٢٥٦
٢٤	٧,٨٢٣	٥,٦١٤	٤,٧١٨	٤,٢١٨	٣,٨٩٥	٣,٦٦٧	٣,٤٩٦	٣,٣٦٣	٣,١٦٨	٣,٠٣٢	٢,٦٥٩	٢,٢١١
٢٥	٧,٧٧٠	٥,٥٦٨	٤,٦٧٥	٤,١٧٧	٣,٨٥٥	٣,٦٢٧	٣,٤٥٧	٣,٣٢٤	٣,١٢٩	٢,٩٩٣	٢,٦٢٠	٢,١٦٩
٢٦	٧,٧٢١	٥,٥٢٦	٤,٦٣٧	٤,١٤٠	٣,٨١٨	٣,٥٩١	٣,٤٢١	٣,٢٨٨	٣,٠٩٤	٢,٩٥٨	٢,٥٨٥	٢,١٣١
٢٧	٧,٦٧٧	٥,٤٨٨	٤,٦٠١	٤,١٠٦	٣,٧٨٥	٣,٥٥٨	٣,٣٨٨	٣,٢٥٦	٣,٠٦٢	٢,٩٢٦	٢,٥٥٢	٢,٠٩٧
٢٨	٧,٦٣٦	٥,٤٥٣	٤,٥٦٨	٤,٠٧٤	٣,٧٥٤	٣,٥٢٨	٣,٣٥٨	٣,٢٢٦	٣,٠٣٢	٢,٨٩٦	٢,٥٢٢	٢,٠٦٤
٢٩	٧,٥٩٨	٥,٤٢٠	٤,٥٣٨	٤,٠٤٥	٣,٧٢٥	٣,٤٩٩	٣,٣٣٠	٣,١٩٨	٣,٠٠٥	٢,٨٦٨	٢,٤٩٥	٢,٠٣٤
٣٠	٧,٥٦٢	٥,٣٩٠	٤,٥١٠	٤,٠١٨	٣,٦٩٩	٣,٤٧٣	٣,٣٠٤	٣,١٧٣	٢,٩٧٩	٢,٨٤٣	٢,٤٦٩	٢,٠٠٦
٣٢	٧,٤٩٩	٥,٣٣٦	٤,٤٥٩	٣,٩٦٩	٣,٦٥٢	٣,٤٢٧	٣,٢٥٨	٣,١٢٧	٢,٩٣٤	٢,٧٩٨	٢,٤٢٣	١,٩٥٦
٣٤	٧,٤٤٤	٥,٢٨٩	٤,٤١٦	٣,٩٢٧	٣,٦١١	٣,٣٨٦	٣,٢١٨	٣,٠٨٧	٢,٨٩٤	٢,٧٥٨	٢,٣٨٣	١,٩١١
٣٦	٧,٣٩٦	٥,٢٤٨	٤,٣٧٧	٣,٨٩٠	٣,٥٧٤	٣,٣٥١	٣,١٨٣	٣,٠٥٢	٢,٨٥٩	٢,٧٢٣	٢,٣٤٧	١,٨٧٢
٣٨	٧,٣٥٣	٥,٢١١	٤,٣٤٣	٣,٨٥٨	٣,٥٤٢	٣,٣١٩	٣,١٥٢	٣,٠٢١	٢,٨٢٨	٢,٦٩٢	٢,٣١٦	١,٨٣٧
٤٠	٧,٣١٤	٥,١٧٩	٤,٣١٣	٣,٨٢٨	٣,٥١٤	٣,٢٩١	٣,١٢٤	٢,٩٩٣	٢,٨٠١	٢,٦٦٥	٢,٢٨٨	١,٨٠٥
٦٠	٧,٠٧٧	٤,٩٧٧	٤,١٢٦	٣,٦٤٩	٣,٣٣٩	٣,١١٩	٢,٩٥٣	٢,٨٢٣	٢,٦٣٢	٢,٤٩٦	٢,١١٥	١,٦٠١
١٢٠	٦,٨٥١	٤,٧٨٧	٣,٩٤٩	٣,٤٨٠	٣,١٧٤	٢,٩٥٦	٢,٧٩٢	٢,٦٦٣	٢,٤٧٢	٢,٣٣٦	١,٩٥٠	١,٣٨١
∞	٦,٦٣٥	٤,٦٠٥	٣,٧٨٢	٣,٣١٩	٣,٠١٧	٢,٨٠٢	٢,٦٣٩	٢,٥١١	٢,٣٢١	٢,١٨٥	١,٧٩١	١,٠٠٠

جدول (٦). توزيـــع ولكوكســـون

			$و = ت_١ - \frac{١}{٢} ن_١ (ن_١ + ١)$																				
$ن_١$	$ن_٢$	$ع_{ن_١ن_٢}$	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
٣	٣	٢٠	١	٢	٤	٧	١٠	١٣	١٦	١٨	١٩	٢٠											
٣	٤	٣٥	١	٢	٤	٧	١١	١٥	٢٠	٢٤	٢٨	٣١	٣٣	٣٤	٣٥								
٤	٤	٧٠	١	٢	٤	٧	١٢	١٧	٢٤	٣١	٣٩	٤٦	٥٣	٥٨	٦٣	٦٦	٦٨	٦٩	٧٠				
٣	٥	٥٦	١	٢	٤	٧	١١	١٦	٢٢	٢٨	٣٤	٤٠	٤٥	٤٩	٥٢	٥٤	٥٥	٥٦					
٤	٥	١٢٦	١	٢	٤	٧	١٢	١٨	٢٦	٣٥	٤٦	٥٧	٦٩	٨٠	٩١	١٠٠	١٠٨	١١٤	١١٩	١٢٢	١٢٤	١٢٥	٢٢٦
٥	٥	٢٥٢	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٢٨	٣٩	٥٣	٦٩	٨٧	١٠٦	١٢٦	١٤٦	١٦٥	١٨٣	١٩٩	٢١٣	٢٢٤	٢٣٣	١٤٠
٣	٦	٨٤	١	٢	٤	٧	١١	١٦	٢٣	٣٠	٣٨	٤٦	٥٤	٦١	٦٨	٧٣	٧٧	٨٠	٨٢	٨٣	٨٤		
٤	٦	٢١٠	١	٢	٤	٧	١٢	١٨	٢٧	٣٧	٥٠	٦٤	٨٠	٩٦	١١٤	١٣٠	١٤٦	١٦٠	١٧٣	١٨٣	١٩٢	١٩٨	٢٠٣
٥	٦	٤٦٢	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٢٩	٤١	٥٧	٧٦	٩٩	١٢٤	١٥٣	١٨٣	٢١٥	٢٤٧	٢٧٩	٣٠٩	٣٣٨	٣٦٣	٣٨٦
٦	٦	٩٢٤	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٣٠	٤٣	٦١	٨٣	١١١	١٤٣	١٨٢	٢٢٤	٢٧٢	٣٢٣	٣٧٨	٤٣٣	٤٩١	٥٤٦	٦٠١
٣	٧	١٢٠	١	٢	٤	٧	١١	١٦	٢٣	٣١	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٨٩	٩٧	١٠٤	١٠٩	١١٣	١١٦	١١٨	١١٩
٤	٧	٣٣٠	١	٢	٤	٧	١٢	١٨	٢٧	٣٨	٥٢	٦٨	٨٧	١٠٧	١٣٠	١٥٣	١٧٧	٢٠٠	٢٢٣	٢٤٣	٢٦٢	٢٧٨	٢٩٢
٥	٧	٧٩٢	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٢٩	٤٢	٥٩	٨٠	١٠٦	١٣٦	١٧١	٢١٠	٢٥٣	٢٩٩	٣٤٧	٣٩٦	٤٤٥	٤٩٣	٥٣٩
٦	٧	١٧١٦	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٣٠	٤٤	٦٣	٨٧	١١٨	١٥٥	٢٠١	٢٥٣	٣١٤	٣٨٢	٤٥٨	٥٣٩	٦٢٧	٧١٧	٨١١
٧	٧	٣٤٣٢	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٣٠	٤٥	٦٥	٩١	١٢٥	١٦٧	٢٢٠	٢٨٣	٣٥٨	٤٤٥	٥٤٥	٦٥٧	٧٨٢	٩١٨	١٠٦٤
٣	٨	١٦٥	١	٢	٤	٧	١١	١٦	٢٣	٣١	٤١	٥٢	٦٤	٧٦	٨٩	١٠١	١١٣	١٢٤	١٣٤	١٤٢	١٤٩	١٥٤	١٥٨
٤	٨	٤٩٥	١	٢	٤	٧	١٢	١٨	٢٧	٣٨	٥٣	٧٠	٩١	١١٤	١٤١	١٦٩	٢٠٠	٢٣١	٢٦٤	٢٩٥	٣٢٦	٣٥٤	٣٨١
٥	٨	١٢٨٧	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٢٩	٤٢	٦٠	٨٢	١١٠	١٤٣	١٨٣	٢٢٨	٢٨٠	٣٣٧	٤٠٠	٤٦٦	٥٣٦	٦٠٧	٦٨٠
٦	٨	٣٠٠٣	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٣٠	٤٤	٦٤	٨٩	١٢٢	١٦٢	٢١٣	٢٧٢	٣٤٣	٤٢٤	٥١٨	٦٢١	٧٣٧	٨٦٠	٩٩٤
٧	٨	٦٤٣٥	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٣٠	٤٥	٦٦	٩٣	١٢٩	١٧٤	٢٣٢	٣٠٢	٣٨٨	٤٨٩	٦٠٩	٧٤٦	٩٠٤	١٠٨٠	١٢٧٧
٨	٨	١٢٨٧٠	١	٢	٤	٧	١٢	١٩	٣٠	٤٥	٦٧	٩٥	١٣٣	١٨١	٢٤٤	٣٢١	٤١٨	٥٣٤	٦٧٥	٨٣٩	١٠٣٣	١٢٥٤	١٥٠٩

$ع_{ن_١ن_٢}$: يمثل عدد التبديلات الممكنة للرتب التي مجموعها $ن_١ + ن_٢$

جدول (٧). اللوغاريثمات للأساس (١٠)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١٠	٠٠٠٠	٠٠٤٣	٠٠٨٦	٠١٢٨	٠١٧٠						٤	٩	١٣	١٧	٢١	٢٥	٣٠	٣٤	٣٨
						٠٢١٢	٠٢٥٣	٠٢٩٤	٠٣٣٤	٠٣٧٤	٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	٢٨	٣٢	٣٦
١١	٠٤١٤	٠٤٥٣	٠٤٩٢	٠٥٣١	٠٥٦٩						٤	٨	١٢	١٥	١٩	٢٣	٢٧	٣١	٣٥
						٠٦٠٧	٠٦٤٥	٠٦٨٢	٠٧١٩	٠٧٥٥	٤	٧	١١	١٥	١٩	٢٢	٢٦	٣٠	٣٢
١٢	٠٧٩٢	٠٨٢٨	٠٨٦٤	٠٨٩٩	٠٩٣٤						٤	٧	١١	١٤	١٨	٢١	٢٥	٢٨	٣٢
						٠٩٦٩	١٠٠٤	١٠٣٨	١٠٧٢	١١٠٦	٣	٧	١٠	١٤	١٧	٢٠	٢٤	٢٧	٣١
١٣	١١٣٩	١١٧٣	١٢٠٦	١٢٣٩	١٢٧١						٣	٧	١٠	١٣	١٦	٢٠	٢٣	٢٦	٣٠
						١٣٠٣	١٣٣٥	١٣٦٧	١٣٩٩	١٤٣٠	٣	٦	١٠	١٣	١٦	١٩	٢٢	٢٥	٢٨
١٤	١٤٦١	١٤٩٢	١٥٢٣	١٥٥٣	١٥٨٤						٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	٢٤	٢٧
						١٦١٤	١٦٤٤	١٦٧٣	١٧٠٣	١٧٣٢	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	٢٤	٢٧
١٥	١٧٦١	١٧٩٠	١٨١٨	١٨٤٧	١٨٧٥						٣	٦	٩	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٣	٢٦
						١٩٠٣	١٩٣١	١٩٥٩	١٩٨٧	٢٠١٤	٣	٦	٨	١١	١٤	١٧	١٩	٢٢	٢٥
١٦	٢٠٤١	٢٠٦٨	٢٠٩٥	٢١٢٢	٢١٤٨						٣	٥	٨	١١	١٣	١٦	١٩	٢١	٢٤
						٢١٧٥	٢٢٠١	٢٢٢٧	٢٢٥٣	٢٢٧٩	٣	٥	٨	١٠	١٣	١٦	١٨	٢١	٢٣
١٧	٢٣٠٤	٢٣٣٠	٢٣٥٥	٢٣٨٠	٢٤٠٥						٣	٥	٨	١٠	١٣	١٥	١٨	٢٠	٢٣
						٢٤٣٠	٢٤٥٥	٢٤٨٠	٢٥٠٤	٢٥٢٩	٢	٥	٧	١٠	١٢	١٥	١٧	٢٠	٢٢
١٨	٢٥٥٣	٢٥٧٧	٢٦٠١	٢٦٢٥	٢٦٤٨						٢	٥	٧	١٠	١٢	١٤	١٧	١٩	٢١
						٢٦٧٢	٢٦٩٥	٢٧١٨	٢٧٤٢	٢٧٦٥	٢	٥	٧	٩	١٢	١٤	١٦	١٩	٢١
١٩	٢٧٨٨	٢٨١٠	٢٨٣٣	٢٨٥٦	٢٨٧٨						٢	٥	٧	٩	١١	١٤	١٦	١٨	٢٠
						٢٩٠٠	٢٩٢٣	٢٩٤٥	٢٩٦٧	٢٩٨٩	٢	٤	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٨	٢٠
٢٠	٣٠١٠	٣٠٣٢	٣٠٥٤	٣٠٧٥	٣٠٩٦	٣١١٨	٣١٣٩	٣١٦٠	٣١٨١	٣٢٠١	٢	٤	٦	٨	١١	١٣	١٥	١٧	١٩
٢١	٣٢٢٢	٣٢٤٣	٣٢٦٣	٣٢٨٤	٣٣٠٤	٣٣٢٤	٣٣٤٥	٣٣٦٥	٣٣٨٥	٣٤٠٤	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨
٢٢	٣٤٢٤	٣٤٤٤	٣٤٦٤	٣٤٨٣	٣٥٠٢	٣٥٢٢	٣٥٤١	٣٥٦٠	٣٥٧٩	٣٥٩٨	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧
٢٣	٣٦١٧	٣٦٣٦	٣٦٥٥	٣٦٧٤	٣٦٩٢	٣٧١١	٣٧٢٩	٣٧٤٧	٣٧٦٦	٣٧٨٤	٢	٤	٦	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧
٢٤	٣٨٠٢	٣٨٢٠	٢٨٣٨	٣٨٥٦	٣٨٧٤	٣٨٩٢	٣٩٠٩	٣٩٢٧	٣٩٤٥	٣٩٦٢	٢	٤	٥	٧	٩	١١	١٢	١٤	١٦
٢٥	٣٩٧٩	٣٩٩٧	٤٠١٤	٤٠٣١	٤٠٤٨	٤٠٦٥	٤٠٨٢	٤٠٩٩	٤١١٦	٤١٣٣	٢	٣	٥	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٥

تابع جدول (٧). اللوغاريثمات للأساس (١٠)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٢٦	٤١٥٠	٤١٦٦	٤١٨٣	٤٢٠٠	٤٢١٦	٤٢٣٢	٤٢٤٩	٤٢٦٥	٤٢٨١	٤٢٩٨	٢	٣	٥	٧	٨	١٠	١١	١٣	١٥
٢٧	٤٣١٤	٤٣٣٠	٤٣٤٦	٤٣٦٢	٤٣٧٨	٤٣٩٣	٤٤٠٩	٤٤٢٥	٤٤٤٠	٤٤٥٦	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٣	١٤
٢٨	٤٤٧٢	٤٤٨٧	٤٥٠٢	٤٥١٨	٤٥٣٣	٤٥٤٨	٤٥٦٤	٤٥٧٩	٤٥٩٤	٤٦٠٩	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٤
٢٩	٤٦٢٤	٤٦٣٩	٤٦٥٤	٤٦٦٩	٤٦٨٣	٤٦٩٨	٤٧١٣	٤٧٢٨	٤٧٤٢	٤٧٥٧	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١٢	١٣
٣٠	٤٧٧١	٤٧٨٦	٤٨٠٠	٤٨١٤	٤٨٢٩	٤٨٤٣	٤٨٥٧	٤٨٧١	٤٨٨٦	٤٩٠٠	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١١	١٣
٣١	٤٩١٤	٤٩٢٨	٤٩٤٢	٤٩٥٥	٤٩٦٩	٤٩٨٣	٤٩٩٧	٥٠١١	٥٠٢٤	٥٠٣٨	١	٣	٤	٦	٧	٨	١٠	١١	١٢
٣٢	٥٠٥١	٥٠٦٥	٥٠٧٩	٥٠٩٢	٥١٠٥	٥١١٩	٥١٣٢	٥١٤٥	٥١٥٩	٥١٧٢	١	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١١	١٢
٣٣	٥١٨٥	٥١٩٨	٥٢١١	٥٢٢٤	٥٢٣٧	٥٢٥٠	٥٢٦٣	٥٢٧٦	٥٢٨٩	٥٣٠٢	١	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠	١٢
٣٤	٥٣١٥	٥٣٢٨	٥٣٤٠	٥٣٥٣	٥٣٦٦	٥٣٧٨	٥٣٩١	٥٤٠٣	٥٤١٦	٥٤٢٨	١	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠	١١
٣٥	٥٤٤١	٥٤٥٣	٥٤٦٥	٥٤٧٨	٥٤٩٠	٥٥٠٢	٥٥١٤	٥٥٢٧	٥٥٣٩	٥٥٥١	١	٢	٤	٥	٦	٧	٩	١٠	١١
٣٦	٥٥٦٣	٥٥٧٥	٥٥٨٧	٥٥٩٩	٥٦١١	٥٦٢٣	٥٦٣٥	٥٦٤٧	٥٦٥٨	٥٦٧٠	١	٢	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	١١
٣٧	٥٦٨٢	٥٦٩٤	٥٧٠٥	٥٧١٧	٥٧٢٩	٥٧٤٠	٥٧٥٢	٥٧٦٣	٥٧٧٥	٥٧٨٦	١	٢	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٣٨	٥٧٩٨	٥٨٠٩	٥٨٢١	٥٨٣٢	٥٨٤٣	٥٨٥٥	٥٨٦٦	٥٨٧٧	٥٨٨٨	٥٨٩٩	١	٢	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٣٩	٥٩١١	٥٩٢٢	٥٩٣٣	٥٩٤٤	٥٩٥٥	٥٩٦٦	٥٩٧٧	٥٩٨٨	٥٩٩٩	٦٠١٠	١	٢	٣	٤	٦	٧	٨	٩	١٠
٤٠	٦٠٢١	٦٠٣١	٦٠٤٢	٦٠٥٣	٦٠٦٤	٦٠٧٥	٦٠٨٥	٦٠٩٦	٦١٠٧	٦١١٧	١	٢	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠
٤١	٦١٢٨	٦١٣٨	٦١٤٩	٦١٦٠	٦١٧٠	٦١٨٠	٦١٩١	٦٢٠١	٦٢١٢	٦٢٢٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٢	٦٢٣٢	٦٢٤٣	٦٢٥٣	٦٢٦٣	٦٢٧٤	٦٢٨٤	٦٢٩٤	٦٣٠٤	٦٣١٤	٦٣٢٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٣	٦٣٣٥	٦٣٤٥	٦٣٥٥	٦٣٦٥	٦٣٧٥	٦٣٨٥	٦٣٩٥	٦٤٠٥	٦٤١٥	٦٤٢٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٤	٦٤٣٥	٦٤٤٤	٦٤٥٤	٦٤٦٤	٦٤٧٤	٦٤٨٤	٦٤٩٣	٦٥٠٣	٦٥١٣	٦٥٢٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٥	٦٥٣٢	٦٥٤٢	٦٥٥١	٦٥٦١	٦٥٧١	٦٥٨٠	٦٥٩٠	٦٥٩٩	٦٦٠٩	٦٦١٨	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٦	٦٦٢٨	٦٦٣٧	٦٦٤٦	٦٦٥٦	٦٦٦٥	٦٦٧٥	٦٦٨٤	٦٦٩٣	٦٧٠٢	٦٧١٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٧	٨
٤٧	٦٧٢١	٦٧٣٠	٦٧٣٩	٦٧٤٩	٦٧٥٨	٦٧٦٧	٦٧٧٦	٦٧٨٥	٦٧٩٤	٦٨٠٣	١	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧	٨
٤٨	٦٨١٢	٦٨٢١	٦٨٣٠	٦٨٣٩	٦٨٤٨	٦٨٥٧	٦٨٦٦	٦٨٧٥	٦٨٨٤	٦٨٩٣	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧	٨
٤٩	٦٩٠٢	٦٩١١	٦٩٢٠	٦٩٢٨	٦٩٣٧	٦٩٤٦	٦٩٥٥	٦٩٦٤	٦٩٧٢	٦٩٨١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧	٨
٥٠	٦٩٩٠	٦٩٩٨	٧٠٠٧	٧٠١٦	٧٠٢٤	٧٠٣٣	٧٠٤٢	٧٠٥٠	٧٠٥٩	٧٠٦٧	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٧	٨

تابع جدول (٧). اللوغاريتمات للأساس (١٠)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٥١	٦٩٧٦	٦٩٩٨	٧٠٠٧	٧٠١٦	٧٠٢٤	٧٠٣٣	٧٠٤٢	٧٠٥٠	٧٠٥٩	٧٠٦٧	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٥٢	٧١٦٠	٧١٦٨	٧١٧٧	٧١٨٥	٧١٩٣	٧٢٠٢	٧٢١٠	٧٢١٨	٧٢٢٦	٧٢٣٥	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٧
٥٣	٧٢٤٣	٧٢٥١	٧٢٥٩	٧٢٦٧	٧٢٧٥	٧٢٨٤	٧٢٩٢	٧٣٠٠	٧٣٠٨	٧٣١٦	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧
٥٤	٧٣٢٤	٧٣٣٢	٧٣٤٠	٧٣٤٨	٧٣٥٦	٧٣٦٤	٧٣٧٢	٧٣٨٠	٧٣٨٨	٧٣٩٦	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧
٥٥	٧٤٠٤	٧٤١٢	٧٤١٩	٧٤٢٧	٧٤٣٥	٧٤٤٣	٧٤٥١	٧٤٥٩	٧٤٦٦	٧٤٧٤	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٥٦	٧٤٨٢	٧٤٩٠	٧٤٩٧	٧٥٠٥	٧٥١٣	٧٥٢٠	٧٥٢٨	٧٥٣٦	٧٥٤٣	٧٥٥١	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٥٧	٧٥٥٩	٧٥٦٦	٧٥٧٤	٧٥٨٢	٧٥٨٩	٧٥٩٧	٧٦٠٤	٧٦١٢	٧٦١٩	٧٦٢٧	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٥٨	٧٦٣٤	٧٦٤٢	٧٦٤٩	٧٦٥٧	٧٦٦٤	٧٦٧٢	٧٦٧٩	٧٦٨٦	٧٦٩٤	٧٧٠١	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧
٥٩	٧٧٠٩	٧٧١٦	٧٧٢٣	٧٧٣١	٧٧٣٨	٧٧٤٥	٧٧٥٢	٧٧٦٠	٧٧٦٧	٧٧٧٤	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧
٦٠	٧٧٨٢	٧٧٨٩	٧٧٩٦	٧٨٠٣	٧٨١٠	٧٨١٨	٧٨٢٥	٧٨٣٢	٧٨٣٩	٧٨٤٦	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٦١	٧٨٥٣	٧٨٦٠	٧٨٦٨	٧٨٧٥	٧٨٨٢	٧٨٨٩	٧٨٩٦	٧٩٠٣	٧٩١٠	٧٩١٧	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٦٢	٧٩٢٤	٧٩٣١	٧٩٣٨	٧٩٤٥	٧٩٥٢	٧٩٥٩	٧٩٦٦	٧٩٧٣	٧٩٨٠	٧٩٨٧	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٦
٦٣	٧٩٩٣	٨٠٠٠	٨٠٠٧	٨٠١٤	٨٠٢١	٨٠٢٨	٨٠٣٥	٨٠٤١	٨٠٤٨	٨٠٥٥	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٤	٨٠٦٢	٨٠٦٩	٨٠٧٥	٨٠٨٢	٨٠٨٩	٨٠٩٦	٨١٠٢	٨١٠٩	٨١١٦	٨١٢٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٥	٨١٢٩	٨١٣٦	٨١٤٢	٨١٤٩	٨١٥٦	٨١٦٢	٨١٦٩	٨١٧٦	٨١٨٢	٨١٨٩	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٦	٨١٩٥	٨٢٠٢	٨٢٠٩	٨٢١٥	٨٢٢٢	٨٢٢٨	٨٢٣٥	٨٢٤١	٨٢٤٨	٨٢٥٤	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٧	٨٢٦١	٨٢٦٧	٨٢٧٤	٨٢٨٠	٨٢٨٧	٨٢٩٣	٨٢٩٩	٨٣٠٦	٨٣١٢	٨٣١٩	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٨	٨٣٢٥	٨٣٣١	٨٣٣٨	٨٣٤٤	٨٣٥١	٨٣٥٧	٨٣٦٣	٨٣٧٠	٨٣٧٦	٨٣٨٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٤	٥	٦
٦٩	٨٣٨٨	٨٣٩٥	٨٤٠١	٨٤٠٧	٨٤١٤	٨٤٢٠	٨٤٢٦	٨٤٣٢	٨٤٣٩	٨٤٤٥	١	١	٢	٣	٣	٤	٤	٥	٦
٧٠	٨٤٥١	٨٤٥٧	٨٤٦٣	٨٤٧٠	٨٤٧٦	٨٤٨٢	٨٤٨٨	٨٤٩٤	٨٥٠٠	٨٥٠٦	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٧١	٨٥١٣	٨٥١٩	٨٥٢٥	٨٥٣١	٨٥٣٧	٨٥٤٣	٨٥٤٩	٨٥٥٥	٨٥٦١	٨٥٦٧	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٧٢	٨٥٧٣	٨٥٧٩	٨٥٨٥	٨٥٩١	٨٥٩٧	٨٦٠٣	٨٦٠٩	٨٦١٥	٨٦٢١	٨٦٢٧	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٧٣	٨٦٣٣	٨٦٣٩	٨٦٤٥	٨٦٥١	٨٦٥٧	٨٦٦٣	٨٦٦٩	٨٦٧٥	٨٦٨١	٨٦٨٦	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٧٤	٨٦٩٢	٨٦٩٨	٨٧٠٤	٨٧١٠	٨٧١٦	٨٧٢٢	٨٧٢٧	٨٧٣٣	٨٧٣٩	٨٧٤٥	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥
٧٥	٨٧٥١	٨٧٥٦	٨٧٦٢	٨٧٦٨	٨٧٧٤	٨٧٧٩	٨٧٨٥	٨٧٩١	٨٧٩٧	٨٨٠٢	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥

تابع جدول (٧). اللوغاريثمات للأساس (١٠)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٧٦	٨٨٠٨	٨٨١٤	٨٨٢٠	٨٨٢٥	٨٨٣١	٨٨٣٧	٨٨٤٢	٨٨٤٨	٨٨٥٤	٨٨٥٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥
٧٧	٨٨٦٥	٨٨٧١	٨٨٧٦	٨٨٨٢	٨٨٨٧	٨٨٩٣	٨٨٩٩	٨٩٠٤	٨٩١٠	٨٩١٥	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٧٨	٨٩٢١	٨٩٢٧	٨٩٣٢	٨٩٣٨	٨٩٤٣	٨٩٤٩	٨٩٥٤	٨٩٦٠	٨٩٦٥	٨٩٧١	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٧٩	٨٩٧٦	٨٩٨٢	٨٩٨٧	٨٩٩٣	٨٩٩٨	٩٠٠٤	٩٠٠٩	٩٠١٥	٩٠٢٠	٩٠٢٥	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٠	٩٠٣١	٩٠٣٦	٩٠٤٢	٩٠٤٧	٩٠٥٣	٩٠٥٨	٩٠٦٣	٩٠٦٩	٩٠٧٤	٩٠٧٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨١	٩٠٨٥	٩٠٩٠	٩٠٩٦	٩١٠١	٩١٠٦	٩١١٢	٩١١٧	٩١٢٢	٩١٢٨	٩١٣٣	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٢	٩١٣٨	٩١٤٣	٩١٤٩	٩١٥٤	٩١٥٩	٩١٦٥	٩١٧٠	٩١٧٥	٩١٨٠	٩١٨٦	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٣	٩١٩١	٩١٩٦	٩٢٠١	٩٢٠٦	٩٢١٢	٩٢١٧	٩٢٢٢	٩٢٢٧	٩٢٣٢	٩٢٣٨	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٤	٩٢٤٣	٩٢٤٨	٩٢٥٣	٩٢٥٨	٩٢٦٣	٩٢٦٩	٩٢٧٤	٩٢٧٩	٩٢٨٤	٩٢٨٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٥	٩٢٩٤	٩٢٩٩	٩٣٠٤	٩٣٠٩	٩٣١٥	٩٣٢٠	٩٣٢٥	٩٣٣٠	٩٣٣٥	٩٣٤٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٦	٩٣٤٥	٩٣٥٠	٩٣٥٥	٩٣٦٠	٩٣٦٥	٩٣٧٠	٩٣٧٥	٩٣٨٠	٩٣٨٥	٩٣٩٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٧	٩٣٩٥	٩٤٠٠	٩٤٠٥	٩٤١٠	٩٤١٥	٩٤٢٠	٩٤٢٥	٩٤٣٠	٩٤٣٥	٩٤٤٠	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٨٨	٩٤٤٥	٩٤٥٠	٩٤٥٥	٩٤٦٠	٩٤٦٥	٩٤٦٩	٩٤٧٤	٩٤٧٩	٩٤٨٤	٩٤٨٩	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٨٩	٩٤٩٤	٩٤٩٩	٩٥٠٤	٩٥٠٩	٩٥١٣	٩٥١٨	٩٥٢٣	٩٥٢٨	٩٥٣٣	٩٥٣٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٠	٩٥٤٢	٩٥٤٧	٩٥٥٢	٩٥٥٧	٩٥٦٢	٩٥٦٦	٩٥٧١	٩٥٧٦	٩٥٨١	٩٥٨٦	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩١	٩٥٩٠	٩٥٩٥	٩٦٠٠	٩٦٠٥	٩٦٠٩	٩٦١٤	٩٦١٩	٩٦٢٤	٩٦٢٨	٩٦٣٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٢	٩٦٣٨	٩٦٤٣	٩٦٤٧	٩٦٥٢	٩٦٥٧	٩٦٦١	٩٦٦٦	٩٦٧١	٩٦٧٥	٩٦٨٠	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٣	٩٦٨٥	٩٦٨٩	٩٦٩٤	٩٦٩٩	٩٧٠٣	٩٧٠٨	٩٧١٣	٩٧١٧	٩٧٢٢	٩٧٢٧	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٤	٩٧٣١	٩٧٣٦	٩٧٤١	٩٧٤٥	٩٧٥٠	٩٧٥٤	٩٧٥٩	٩٧٦٣	٩٧٦٨	٩٧٧٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٥	٩٧٧٧	٩٧٨٢	٩٧٨٦	٩٧٩١	٩٧٩٥	٩٨٠٠	٩٨٠٥	٩٨٠٩	٩٨١٤	٩٨١٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٦	٩٨٢٣	٩٨٢٧	٩٨٣٢	٩٨٣٦	٩٨٤١	٩٨٤٥	٩٨٥٠	٩٨٥٤	٩٨٥٩	٩٨٦٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٧	٩٨٦٨	٩٨٧٢	٩٨٧٧	٩٨٨١	٩٨٨٦	٩٨٩٠	٩٨٩٤	٩٨٩٩	٩٩٠٣	٩٩٠٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٨	٩٩١٢	٩٩١٧	٩٩٢١	٩٩٢٦	٩٩٣٠	٩٩٣٤	٩١٣٩	٩١٤٣	٩٩٤٨	٩٩٥٢	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٩	٩٩٥٦	٩٩٦١	٩٩٦٥	٩٩٦٩	٩٩٧٤	٩٩٧٨	٩٩٨٣	٩٩٨٧	٩٩٩١	٩٩٩٦	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤

جدول (٨). اللوغاريثمات المقابلة

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠٠	١٠٠٠	١٠٠٢	١٠٠٥	١٠٠٧	١٠٠٩	١٠١٢	١٠١٤	١٠١٦	١٠١٩	١٠٢١	٠	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢
٠,٠١	١٠٢٣	١٠٢٦	١٠٢٨	١٠٣٠	١٠٣٣	١٠٣٥	١٠٣٨	١٠٤٠	١٠٤٢	١٠٤٥	٠	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢
٠,٠٢	١٠٤٧	١٠٥٠	١٠٥٢	١٠٥٤	١٠٥٧	١٠٥٩	١٠٦٢	١٠٦٤	١٠٦٧	١٠٦٩	٠	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢
٠,٠٣	١٠٧٢	١٠٧٤	١٠٧٦	١٠٧٩	١٠٨١	١٠٨٤	١٠٨٦	١٠٨٩	١٠٩١	١٠٩٤	٠	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢
٠,٠٤	١٠٩٦	١٠٩٩	١١٠٢	١١٠٤	١١٠٧	١١٠٩	١١١٢	١١١٤	١١١٧	١١١٩	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٢
٠,٠٥	١١٢٢	١١٢٥	١١٢٧	١١٣٠	١١٣٢	١١٣٥	١١٣٨	١١٤٠	١١٤٣	١١٤٦	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٢
٠,٠٦	١١٤٨	١١٥١	١١٥٣	١١٥٦	١١٥٩	١١٦١	١١٦٤	١١٦٧	١١٦٩	١١٧٢	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٢
٠,٠٧	١١٧٥	١١٧٨	١١٨٠	١١٨٣	١١٨٦	١١٨٩	١١٩١	١١٩٤	١١٩٧	١١٩٩	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٢
٠,٠٨	١٢٠٢	١٢٠٥	١٢٠٨	١٢١١	١٢١٤	١٢١٦	١٢١٩	١٢٢٢	١٢٢٥	١٢٢٧	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٣
٠,٠٩	١٢٣٠	١٢٣٣	١٢٣٦	١٢٣٩	١٢٤٢	١٢٤٥	١٢٤٧	١٢٥٠	١٢٥٣	١٢٥٦	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٣
٠,١٠	١٢٥٩	١٢٦٢	١٢٦٥	١٢٦٨	١٢٧١	١٢٧٤	١٢٧٦	١٢٧٩	١٢٨٢	١٢٨٥	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٣
٠,١١	١٢٨٨	١٢٩١	١٢٩٤	١٢٩٧	١٣٠٠	١٣٠٣	١٣٠٦	١٣٠٩	١٣١٢	١٣١٥	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢	٣
٠,١٢	١٣١٨	١٣٢١	١٣٢٤	١٣٢٧	١٣٣٠	١٣٣٤	١٣٣٧	١٣٤٠	١٣٤٣	١٣٤٦	٠	١	١	١	٢	٢	٢	٢	٣
٠,١٣	١٣٤٩	١٣٥٢	١٣٥٥	١٣٥٨	١٣٦١	١٣٦٥	١٣٦٨	١٣٧١	١٣٧٤	١٣٧٧	٠	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣
٠,١٤	١٣٨٠	١٣٨٤	١٣٨٧	١٣٩٠	١٣٩٣	١٣٩٦	١٤٠٠	١٤٠٣	١٤٠٦	١٤٠٩	٠	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣
٠,١٥	١٤١٣	١٤١٦	١٤١٩	١٤٢٢	١٤٢٦	١٤٢٩	١٤٣٢	١٤٣٥	١٤٣٩	١٤٤٢	٠	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣
٠,١٦	١٤٤٥	١٤٤٩	١٤٥٢	١٤٥٥	١٤٥٩	١٤٦٢	١٤٦٦	١٤٦٩	١٤٧٢	١٤٧٦	٠	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣
٠,١٧	١٤٧٩	١٤٨٣	١٤٨٦	١٤٨٩	١٤٩٣	١٤٩٦	١٥٠٠	١٥٠٣	١٥٠٧	١٥١٠	٠	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣
٠,١٨	١٥١٤	١٥١٧	١٥٢١	١٥٢٤	١٥٢٨	١٥٣١	١٥٣٥	١٥٣٨	١٥٤٢	١٥٤٥	٠	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣
٠,١٩	١٥٤٩	١٥٥٢	١٥٥٦	١٥٦٠	١٥٦٣	١٥٦٧	١٥٧٠	١٥٧٤	١٥٧٨	١٥٨١	٠	١	١	١	٢	٢	٣	٣	٣
٠,٢٠	١٥٨٥	١٥٨٩	١٥٩٢	١٥٩٦	١٦٠٠	١٦٠٣	١٦٠٧	١٦١١	١٦١٤	١٦١٨	٠	١	١	١	٢	٢	٣	٣	٣
٠,٢١	١٦٢٢	١٦٢٦	١٦٢٩	١٦٣٣	١٦٣٧	١٦٤١	١٦٤٤	١٦٤٨	١٦٥٢	١٦٥٦	٠	١	١	٢	٢	٢	٣	٣	٣
٠,٢٢	١٦٦٠	١٦٦٣	١٦٦٧	١٦٧١	١٦٧٥	١٦٧٩	١٦٨٣	١٦٨٧	١٦٩٠	١٦٩٤	٠	١	١	٢	٢	٢	٣	٣	٣
٠,٢٣	١٦٩٨	١٧٠٢	١٧٠٦	١٧١٠	١٧١٤	١٧١٨	١٧٢٢	١٧٢٦	١٧٣٠	١٧٣٤	٠	١	١	٢	٢	٢	٣	٣	٤
٠,٢٤	١٧٣٨	١٧٤٢	١٧٤٦	١٧٥٠	١٧٥٤	١٧٥٨	١٧٦٢	١٧٦٦	١٧٧٠	١٧٧٤	٠	١	١	٢	٢	٢	٣	٣	٤
٠,٢٥	١٧٧٨	١٧٨٢	١٧٨٦	١٧٩١	١٧٩٥	١٧٩٩	١٨٠٣	١٨٠٧	١٨١١	١٨١٦	٠	١	١	٢	٢	٢	٣	٣	٤

تابع جدول (٨). اللوغاريثمات المقابلة

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٢٦	١٨٢٠	١٨٢٤	١٨٢٨	١٨٣٢	١٨٣٧	١٨٤١	١٨٤٥	١٨٤٩	١٨٥٤	١٨٥٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٣	٤
٠,٢٧	١٨٦٢	١٨٦٦	١٨٧١	١٨٧٥	١٨٧٩	١٨٨٤	١٨٨٨	١٨٩٢	١٨٩٧	١٩٠١	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٣	٤
٠,٢٨	١٩٠٥	١٩١٠	١٩١٤	١٩١٩	١٩٢٣	١٩٢٨	١٩٣٢	١٩٣٦	١٩٤١	١٩٤٥	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٠,٢٩	١٩٥٠	١٩٥٤	١٩٥٩	١٩٦٣	١٩٦٨	١٩٧٢	١٩٧٧	١٩٨٢	١٩٨٦	١٩٩١	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٠,٣٠	١٩٩٥	٢٠٠٠	٢٠٠٤	٢٠٠٩	٢٠١٤	٢٠١٨	٢٠٢٣	٢٠٢٨	٢٠٣٢	٢٠٣٧	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٠,٣١	٢٠٤٢	٢٠٤٦	٢٠٥١	٢٠٥٦	٢٠٦١	٢٠٦٥	٢٠٧٠	٢٠٧٥	٢٠٨٠	٢٠٨٤	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٠,٣٢	٢٠٨٩	٢٠٩٤	٢٠٩٩	٢١٠٤	٢١٠٩	٢١١٣	٢١١٨	٢١٢٣	٢١٢٨	٢١٣٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٠,٣٣	٢١٣٨	٢١٤٣	٢١٤٨	٢١٥٣	٢١٥٨	٢١٦٣	٢١٦٨	٢١٧٣	٢١٧٨	٢١٨٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٠,٣٤	٢١٨٨	٢١٩٣	٢١٩٨	٢٢٠٣	٢٢٠٨	٢٢١٣	٢٢١٨	٢٢٢٣	٢٢٢٨	٢٢٣٤	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٠,٣٥	٢٢٣٩	٢٢٤٤	٢٢٤٩	٢٢٥٤	٢٢٥٩	٢٢٦٥	٢٢٧٠	٢٢٧٥	٢٢٨٠	٢٢٨٦	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٠,٣٦	٢٢٩١	٢٢٩٦	٢٣٠١	٢٣٠٧	٢٣١٢	٢٣١٧	٢٣٢٣	٢٣٢٨	٢٣٣٣	٢٣٣٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٠,٣٧	٢٣٤٤	٢٣٥٠	٢٣٥٥	٢٣٦٠	٢٣٦٦	٢٣٧١	٢٣٧٧	٢٣٨٢	٢٣٨٨	٢٣٩٣	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٠,٣٨	٢٣٩٩	٢٤٠٤	٢٤١٠	٢٤١٥	٢٤٢١	٢٤٢٧	٢٤٣٢	٢٤٣٨	٢٤٤٣	٢٤٤٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٠,٣٩	٢٤٥٥	٢٤٦٠	٢٤٦٦	٢٤٧٢	٢٤٧٧	٢٤٨٣	٢٤٨٩	٢٤٩٥	٢٥٠٠	٢٥٠٦	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥
٠,٤٠	٢٥١٢	٢٥١٨	٢٥٢٣	٢٥٢٩	٢٥٣٥	٢٥٤١	٢٥٤٧	٢٥٥٣	٢٥٥٩	٢٥٦٤	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥
٠,٤١	٢٥٧٠	٢٥٧٦	٢٥٨٢	٢٥٨٨	٢٥٩٤	٢٦٠٠	٢٦٠٦	٢٦١٢	٢٦١٨	٢٦٢٤	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٠,٤٢	٢٦٣٠	٢٦٣٦	٢٦٤٢	٢٦٤٩	٢٦٥٥	٢٦٦١	٢٦٦٧	٢٦٧٣	٢٦٧٩	٢٦٨٥	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٠,٤٣	٢٦٩٢	٢٦٩٨	٢٧٠٤	٢٧١٠	٢٧١٦	٢٧٢٣	٢٧٢٩	٢٧٣٥	٢٧٤٢	٢٧٤٨	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٠,٤٤	٢٧٥٤	٢٧٦١	٢٧٦٧	٢٧٧٣	٢٧٨٠	٢٧٨٦	٢٧٩٣	٢٧٩٩	٢٨٠٥	٢٨١٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٤	٥	٦
٠,٤٥	٢٨١٨	٢٨٢٥	٢٨٣١	٢٨٣٨	٢٨٤٤	٢٨٥١	٢٨٥٨	٢٨٦٤	٢٨٧١	٢٨٧٧	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٠,٤٦	٢٨٨٤	٢٨٩١	٢٨٩٧	٢٩٠٤	٢٩١١	٢٩١٧	٢٩٢٤	٢٩٣١	٢٩٣٨	٢٩٤٤	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٠,٤٧	٢٩٥١	٢٩٥٨	٢٩٦٥	٢٩٧٢	٢٩٧٩	٢٩٨٥	٢٩٩٢	٢٩٩٩	٣٠٠٦	٣٠١٣	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٠,٤٨	٣٠٢٠	٣٠٢٧	٣٠٣٤	٣٠٤١	٣٠٤٨	٣٠٥٥	٣٠٦٢	٣٠٦٩	٣٠٧٦	٣٠٨٣	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٠,٤٩	٣٠٩٠	٣٠٩٧	٣١٠٥	٣١١٢	٣١١٩	٣١٢٦	٣١٣٣	٣١٤١	٣١٤٨	٣١٥٥	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٠,٥٠	٣١٦٢	٣١٧٠	٣١٧٧	٣١٨٤	٣١٩٢	٣١٩٩	٣٢٠٦	٣٢١٤	٣٢٢١	٣٢٢٨	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧

تابع جدول (٨). اللوغاريثمات المقابلة

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٥١	٣٢٣٦	٣٢٤٣	٣٢٥١	٣٢٥٨	٣٢٦٦	٣٢٧٣	٣٢٨١	٣٢٨٩	٣٢٩٦	٣٣٠٤	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٠,٥٢	٣٣١١	٣٣١٩	٣٣٢٧	٣٣٣٤	٣٣٤٢	٣٣٥٠	٣٣٥٧	٣٣٦٥	٣٣٧٣	٣٣٨١	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٠,٥٣	٣٣٨٨	٣٣٩٦	٣٤٠٤	٣٤١٢	٣٤٢٠	٣٤٢٨	٣٤٣٦	٣٤٤٣	٣٤٥١	٣٤٥٩	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧
٠,٥٤	٣٤٦٧	٣٤٧٥	٣٤٨٣	٣٤٩١	٣٤٩٩	٣٥٠٨	٣٥١٦	٣٥٢٤	٣٥٣٢	٣٥٤٠	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧
٠,٥٥	٣٥٤٨	٣٥٥٦	٣٥٦٥	٣٥٧٣	٣٥٨١	٣٥٨٩	٣٥٩٧	٣٦٠٦	٣٦١٤	٣٦٢٢	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٧
٠,٥٦	٣٦٣١	٣٦٣٩	٣٦٤٨	٣٦٥٦	٣٦٦٤	٣٦٧٣	٣٦٨١	٣٦٩٠	٣٦٩٨	٣٧٠٧	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٠,٥٧	٣٧١٥	٣٧٢٤	٣٧٣٣	٣٧٤١	٣٧٥٠	٣٧٥٨	٣٧٦٧	٣٧٧٦	٣٧٨٤	٣٧٩٣	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٠,٥٨	٣٨٠٢	٣٨١١	٣٨١٩	٣٨٢٨	٣٨٣٧	٣٨٤٦	٣٨٥٥	٣٨٦٤	٣٨٧٣	٣٨٨٢	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧	٨
٠,٥٩	٣٨٩٠	٣٨٩٩	٣٩٠٨	٣٩١٧	٣٩٢٦	٣٩٣٦	٣٩٤٥	٣٩٥٤	٣٩٦٣	٣٩٧٢	١	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧	٨
٠,٦٠	٣٩٨١	٣٩٩٠	٣٩٩٩	٤٠٠٩	٤٠١٨	٤٠٢٧	٤٠٣٦	٤٠٤٦	٤٠٥٥	٤٠٦٤	١	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧	٨
٠,٦١	٤٠٧٤	٤٠٨٣	٤٠٩٣	٤١٠٢	٤١١١	٤١٢١	٤١٣٠	٤١٤٠	٤١٥٠	٤١٥٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٦٢	٤١٦٩	٤١٧٨	٤١٨٨	٤١٩٨	٤٢٠٧	٤٢١٧	٤٢٢٧	٤٢٣٦	٤٢٤٦	٤٢٥٦	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٦٣	٤٢٦٦	٤٢٧٦	٤٢٨٥	٤٢٩٥	٤٣٠٥	٤٣١٥	٤٣٢٥	٤٣٣٥	٤٣٤٥	٤٣٥٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٦٤	٤٣٦٥	٤٣٧٥	٤٣٨٥	٤٣٩٥	٤٤٠٦	٤٤١٦	٤٤٢٦	٤٤٣٦	٤٤٤٦	٤٤٥٧	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٦٥	٤٤٦٧	٤٤٧٧	٤٤٨٧	٤٤٩٨	٤٥٠٨	٤٥١٩	٤٥٢٩	٤٥٣٩	٤٥٥٠	٤٥٦٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٦٦	٤٥٧١	٤٥٨١	٤٥٩٢	٤٦٠٣	٤٦١٣	٤٦٢٤	٤٦٣٤	٤٦٤٥	٤٦٥٦	٤٦٦٧	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٩	١٠
٠,٦٧	٤٦٧٧	٤٦٨٨	٤٦٩٩	٤٧١٠	٤٧٢١	٤٧٣٢	٤٧٤٢	٤٧٥٣	٤٧٦٤	٤٧٧٥	١	٢	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١٠
٠,٦٨	٤٧٨٦	٤٧٩٧	٤٨٠٨	٤٨١٩	٤٨٣١	٤٨٤٢	٤٨٥٣	٤٨٦٤	٤٨٧٥	٤٨٨٧	١	٢	٣	٤	٦	٧	٨	٩	١٠
٠,٦٩	٤٨٩٨	٤٩٠٩	٤٩٢٠	٤٩٣٢	٤٩٤٣	٤٩٥٥	٤٩٦٦	٤٩٧٧	٤٩٨٩	٥٠٠٠	١	٢	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٠,٧٠	٥٠١٢	٥٠٢٣	٥٠٣٥	٥٠٤٧	٥٠٥٨	٥٠٧٠	٥٠٨٢	٥٠٩٣	٥١٠٥	٥١١٧	١	٢	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١١
٠,٧١	٥١٢٩	٥١٤٠	٥١٥٢	٥١٦٤	٥١٧٦	٥١٨٨	٥٢٠٠	٥٢١٢	٥٢٢٤	٥٢٣٦	١	٢	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	١١
٠,٧٢	٥٢٤٨	٥٢٦٠	٥٢٧٢	٥٢٨٤	٥٢٩٧	٥٣٠٩	٥٣٢١	٥٣٣٣	٥٣٤٦	٥٣٥٨	١	٢	٤	٥	٦	٧	٩	١٠	١١
٠,٧٣	٥٣٧٠	٥٣٨٣	٥٣٩٥	٥٤٠٨	٥٤٢٠	٥٤٣٣	٥٤٤٥	٥٤٥٨	٥٤٧٠	٥٤٨٣	١	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠	١١
٠,٧٤	٥٤٩٥	٥٥٠٨	٥٥٢١	٥٥٣٤	٥٥٤٦	٥٥٥٩	٥٥٧٢	٥٥٨٥	٥٥٩٨	٥٦١٠	١	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠	١٢
٠,٧٥	٥٦٢٣	٥٦٣٦	٥٦٤٩	٥٦٦٢	٥٦٧٥	٥٦٨٩	٥٧٠٢	٥٧١٥	٥٧٢٨	٥٧٤١	١	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١٠	١٢

تابع جدول (٨). اللوغاريتمات المقابلة

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٧٦	٥٧٥٤	٥٧٦٨	٥٧٨١	٥٧٩٤	٥٨٠٨	٥٨٢١	٥٨٣٤	٥٨٤٨	٥٨٦١	٥٨٧٥	١	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١١	١٢
٠,٧٧	٥٨٨٨	٥٩٠٢	٥٩١٦	٥٩٢٩	٥٩٤٣	٥٩٥٧	٥٩٧٠	٥٩٨٤	٥٩٩٨	٦٠١٢	١	٣	٤	٥	٧	٨	١٠	١١	١٢
٠,٧٨	٦٠٢٦	٦٠٣٩	٦٠٥٣	٦٠٦٧	٦٠٨١	٦٠٩٥	٦١٠٩	٦١٢٤	٦١٣٨	٦١٥٢	١	٣	٤	٦	٧	٨	١٠	١١	١٣
٠,٧٩	٦١٦٦	٦١٨٠	٦١٩٤	٦٢٠٩	٦٢٢٣	٦٢٣٧	٦٢٥٢	٦٢٦٦	٦٢٨١	٦٢٩٥	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١١	١٣
٠,٨٠	٦٣١٠	٦٣٢٤	٦٣٣٩	٦٣٥٣	٦٣٦٨	٦٣٨٣	٦٣٩٧	٦٤١٢	٦٤٢٧	٦٤٤٢	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١٢	١٣
٠,٨١	٦٤٥٧	٦٤٧١	٦٤٨٦	٦٥٠١	٦٥١٦	٦٥٣١	٦٥٤٦	٦٥٦١	٦٥٧٧	٦٥٩٢	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٤
٠,٨٢	٦٦٠٧	٦٦٢٢	٦٦٣٧	٦٦٥٣	٦٦٦٨	٦٦٨٣	٦٦٩٩	٦٧١٤	٦٧٣٠	٦٧٤٥	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٤
٠,٨٣	٦٧٦١	٦٧٧٦	٦٧٩٢	٦٨٠٨	٦٨٢٣	٦٨٣٩	٦٨٥٥	٦٨٧١	٦٨٨٧	٦٩٠٢	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٣	١٤
٠,٨٤	٦٩١٨	٦٩٣٤	٦٩٥٠	٦٩٦٦	٦٩٨٢	٦٩٩٨	٧٠١٥	٧٠٣١	٧٠٤٧	٧٠٦٣	٢	٣	٥	٦	٨	١٠	١١	١٣	١٥
٠,٨٥	٧٠٧٩	٧٠٩٦	٧١١٢	٧١٢٩	٧١٤٥	٧١٦١	٧١٧٨	٧١٩٤	٧٢١١	٧٢٢٨	٢	٣	٥	٧	٨	١٠	١٢	١٣	١٥
٠,٨٦	٧٢٤٤	٧٢٦١	٧٢٧٨	٧٢٩٥	٧٣١١	٧٣٢٨	٧٣٤٥	٧٣٦٢	٧٣٧٩	٧٣٩٦	٢	٣	٥	٧	٨	١٠	١٢	١٣	١٥
٠,٨٧	٧٤١٣	٧٤٣٠	٧٤٤٧	٧٤٦٤	٧٤٨٢	٧٤٩٩	٧٥١٦	٧٥٣٤	٧٥٥١	٧٥٦٨	٢	٣	٥	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٦
٠,٨٨	٧٥٨٦	٧٦٠٣	٧٦٢١	٧٦٣٨	٧٦٥٦	٧٦٧٤	٧٦٩١	٧٧٠٩	٧٧٢٧	٧٧٤٥	٢	٤	٥	٧	٩	١١	١٢	١٤	١٦
٠,٨٩	٧٧٦٢	٧٧٨٠	٧٧٩٨	٧٨١٦	٧٨٣٤	٧٨٥٢	٧٨٧٠	٧٨٨٩	٧٩٠٧	٧٩٢٥	٢	٤	٥	٧	٩	١١	١٣	١٤	١٦
٠,٩٠	٧٩٤٣	٧٩٦٢	٧٩٨٠	٧٩٩٨	٨٠١٧	٨٠٣٥	٨٠٥٤	٨٠٧٢	٨٠٩١	٨١١٠	٢	٤	٦	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧
٠,٩١	٨١٢٨	٨١٤٧	٨١٦٦	٨١٨٥	٨٢٠٤	٨٢٢٢	٨٢٤١	٨٢٦٠	٨٢٧٩	٨٢٩٩	٢	٤	٦	٨	٩	١١	١٣	١٥	١٧
٠,٩٢	٨٣١٨	٨٣٣٧	٨٣٥٦	٨٣٧٥	٨٣٩٥	٨٤١٤	٨٤٣٣	٨٤٥٣	٨٤٧٢	٨٤٩٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧
٠,٩٣	٨٥١١	٨٥٣١	٨٥٥١	٨٥٧٠	٨٥٩٠	٨٦١٠	٨٦٣٠	٨٦٥٠	٨٦٧٠	٨٦٩٠	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨
٠,٩٤	٨٧١٠	٨٧٣٠	٨٧٥٠	٨٧٧٠	٨٧٩٠	٨٨١٠	٨٨٣١	٨٨٥١	٨٨٧٢	٨٨٩٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨
٠,٩٥	٨٩١٣	٨٩٣٣	٨٩٥٤	٨٩٧٤	٨٩٩٥	٩٠١٦	٩٠٣٦	٩٠٥٧	٩٠٧٨	٩٠٩٩	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٥	١٧	١٩
٠,٩٦	٩١٢٠	٩١٤١	٩١٦٢	٩١٨٣	٩٢٠٤	٩٢٢٦	٩٢٤٧	٩٢٦٨	٩٢٩٠	٩٣١١	٢	٤	٦	٨	١١	١٣	١٥	١٧	١٩
٠,٩٧	٩٣٣٣	٩٣٥٤	٩٣٧٦	٩٣٩٧	٩٤١٩	٩٤٤١	٩٤٦٢	٩٤٨٤	٩٥٠٦	٩٥٢٨	٢	٤	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧	٢٠
٠,٩٨	٩٥٥٠	٩٥٧٢	٩٥٩٤	٩٦١٦	٩٦٣٨	٩٦٦١	٩٦٨٣	٩٧٠٥	٩٧٢٧	٩٧٥٠	٢	٤	٧	٩	١١	١٣	١٦	١٨	٢٠
٠,٩٩	٩٧٧٢	٩٧٩٥	٩٨١٧	٩٨٤٠	٩٨٦٣	٩٨٨٦	٩٩٠٨	٩٩٣١	٩٩٥٤	٩٩٧٧	٢	٥	٧	٩	١١	١٤	١٦	١٨	٢٠

كشاف الموضوعات

أ

